La foto

Riadattata da Matematica 2001 da Roberto Battisti, Fabio Brunelli, Carmela Milone

Attività aggiornata nel 2015 grazie ai fondi PON-FSE relativi al progetto PON MATEMATICA (B-10-FSE-2010-3)

Introduzione

Questa attività ha come prerequisiti in campo aritmetico le proporzioni tra numeri, nell'ambito della misura la misurazione di lunghezze espresse con unità di misura del Sistema Internazionale, con l'uso dei decimali, e in campo geometrico la similitudine tra figure. Va presentata come situazione problematica: all'inizio gli allievi non dispongono di alcuna procedura routinaria per risolverlo. Per questo è particolarmente delicata la fase di devoluzione, cioè quella in cui il problema viene 'passato' dall'insegnante agli allievi. In questa fase, l'insegnante pone la questione alla classe lasciando un tempo necessario alla riflessione individuale: ogni allievo si approprierà del problema e comincerà a cercare delle strategie opportune. Si tratta cioè di una tipica situazione problematica secondo la definizione di Brousseau (si veda D'Amore, 1999, pp. 231-238).

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi *obiettivi di apprendimento* che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni Curricolari attualmente in vigore (D.M. 16 novembre 2012, n. 254) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni Curricolari e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni curricolari: riferimenti

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado

L'alunno riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado

Numeri

- Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sia mediante frazione.
- Utilizzare scale graduate in contesti significativi per le scienze e per la tecnica.
- Utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale, sia mediante frazione

Relazioni e funzioni

Esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa.

Spazio e figure

- Riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata.
- Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).
- Rappresentare punti, segmenti e figure sul piano cartesiano.

Prove Invalsi

a.s. 2012/2013 - Domanda D4
Scuola secondaria di I grado – Classe I

D4. Marta e il nonno camminano insieme lungo un sentiero. Ogni 2 passi fatti dal nonno, Marta ne fa 3 per restargli al fianco. Quando il nonno ha fatto 40 passi, quanti passi ha fatto Marta?

A. ☐ 80

B. ☐ 60

C. ☐ 40

D. ☐ 20

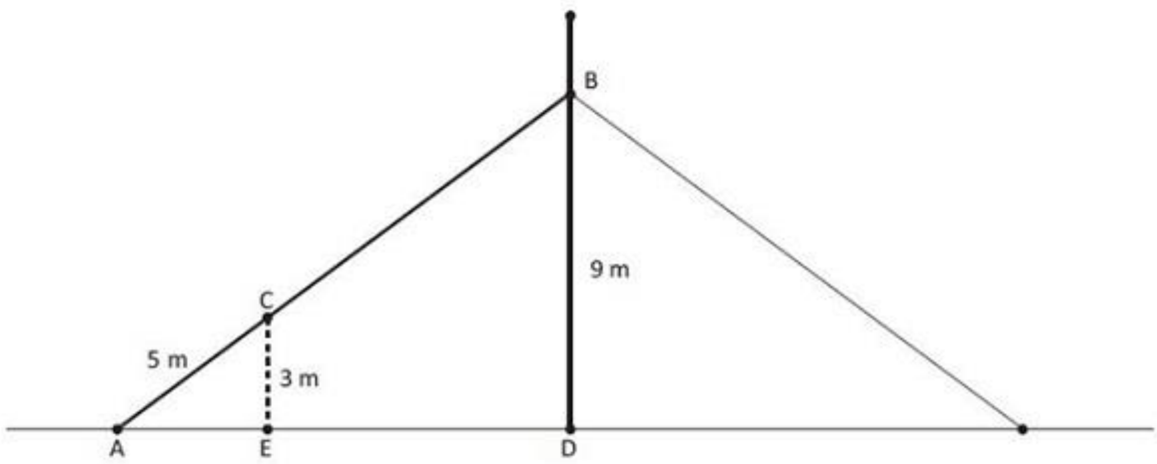
Soluzione INVALSI: B

Commento
Si tratta di un quesito di proporzionalità e diverse sono le strategie che lo studente può utilizzare per rispondere in modo corretto.
Ad esempio, lo studente può utilizzare uno schema del tipo 2 → 3, quindi 4 → 6, quindi 40 → 60.
Oppure 40 : 2 = 20 e 20 x 3 = 60.
Lo studente potrebbe anche procedere analizzando i singoli distrattori: eliminare subito C e D perché, se Marta fa più passi del nonno, non è possibile che il suo numero totale di passi sia inferiore o uguale a quello del nonno. Il distrattore A si elimina perché 80 è il doppio di 40 e Marta non fa il doppio dei passi del nonno.

a.s. 2011/2012 - Domanda E16
Scuola secondaria di I grado – Classe III

E16. **Il cavo (AB) di un ripetitore per telefonia cellulare è stato fissato a un palo a una distanza dal suolo di 9 m.**

Una lampada di segnalazione (C) viene agganciata al cavo a 3 m di altezza e a 5 m dal punto di ancoraggio a terra (A).



a. **Qual è la lunghezza del cavo AB?**

Risposta: ....

b. **Giustifica la tua risposta.**

....

....

....

Soluzione INVALSI: 15 m

Commento
Il quesito rientra nell'ambito Spazio e figure. L'allievo deve raccogliere le informazioni del testo insieme a quelle contenute nella figura. Per rispondere correttamente al quesito occorre riconoscere figure piane simili in un contesto diverso da quello standard e riferito ad una situazione reale.
Si tratta di riconoscere la similitudine fra i triangoli ACE e ADB in quanto i segmenti CE e BD sono entrambi perpendicolari al terreno e quindi paralleli fra loro. Le strategie di soluzione possono essere diverse.

a.s. 2011/2012 - Domanda E23
Scuola secondaria di I grado – Classe III

E23. **La seguente fotografia ha le dimensioni di 10 cm x 15 cm. Luciana la ingrandisce in proporzione; dopo l'ingrandimento la dimensione maggiore misura 18 cm.**

Quanto misura l'altra dimensione?

A. ☐ 12 cm

B. ☐ 15 cm

C. ☐ 16 cm

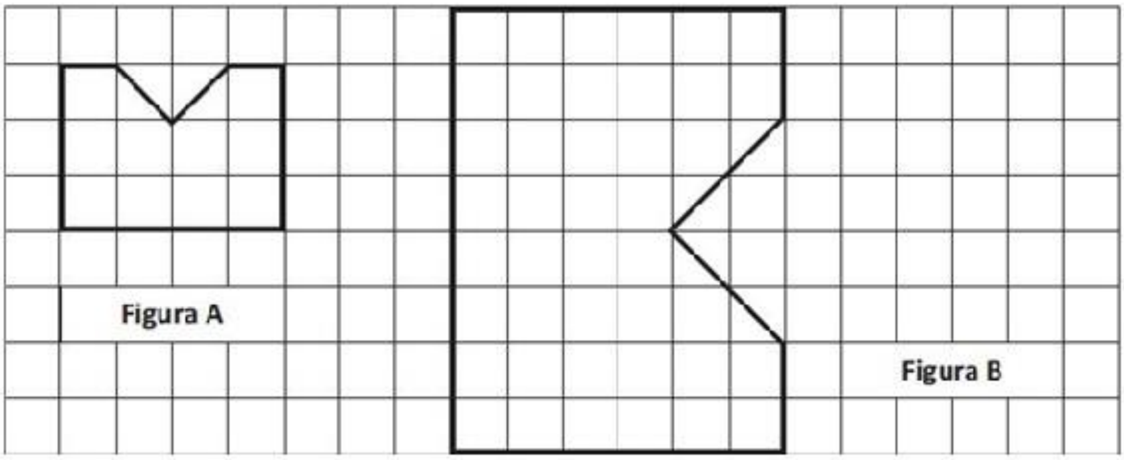
D. ☐ 18 cm

Soluzione INVALSI: A

Commento
I processi matematici coinvolti in questa prova riguardano procedure geometriche e aritmetiche: figure simili, proporzioni, riduzione in scala.
Si tratta di un classico quesito di proporzionalità, argomento di norma trattato nel secondo anno della scuola secondaria di primo grado. L'allievo è chiamato a valutare rapporti tra grandezze. Gli strumenti aritmetici sono le frazioni e le proporzioni.
Oltre il 70% degli studenti risponde correttamente.

a.s. 2011/2012 - Domanda D29
Scuola secondaria di I grado – Classe I

D29. Osserva le due figure:



Indica quale delle seguenti affermazioni è vera.

A. ☐ L'area della figura A è la metà dell'area della figura B

B. ☐ L'area della figura B è il triplo dell'area della figura A

C. ☐ L'area della figura B è il quadruplo dell'area della figura A

D. ☐ L'area della figura A è due terzi dell'area della figura B

A. ☐ 12 cm

B. ☐ 15 cm

C. ☐ 16 cm

D. ☐ 18 cm

Soluzione INVALSI: C

Commento
Per poter rispondere correttamente lo studente deve determinare il numero di quadratini che compongono la figura A (11) e di quelli che compongono la figura B (44), e poi effettuare il confronto.
È difficile che lo studente possa a occhio capire la relazione tra le due figure (le figure sono simili).
Interessante è controllare le diverse strategie utilizzate dagli studenti per il calcolo dell'area delle figure.

Descrizione dell'attività

Fase 1
L'insegnante propone alla classe una situazione problematica, lasciando alcuni minuti di tempo per la riflessione individuale degli allievi, prima di cominciare la discussione di classe.

Situazione-problema

Luca guardando una sua vecchia foto di quando aveva 5 anni (Fig. 1) dice a Piero: " Guarda come ero piccolo! Quanto sono cresciuto in questi anni!" Piero: "Sarebbe carino sapere quanto sei cresciuto." Luca:" Ma come si fa, non so quanto ero alto quando avevo cinque anni. E nemmeno la mamma se lo ricorda".
L'insegnante: *"Come potete fare per aiutare Luca e Piero a determinare la statura di Luca quando aveva cinque anni e di quanto è cresciuto da allora a oggi?"*

Fase 2

L'insegnante avvia la discussione, invitando gli alunni a formulare ipotesi sulla strategia da adottare per risolvere il problema.
Gli alunni faranno vari tipi di proposte, alcune delle quali di tipo affettivo e qualitativo (ad esempio, basarsi sui ricordi di Luca o di membri della sua famiglia), altre di tipo quantitativo che implicano l'utilizzazione di modelli lineari applicati a varie grandezze, quali il tempo, la statura ecc.
Ad esempio, Gabriele potrebbe proporre: "Misuriamo l'altezza di Luca, la dividiamo per il numero dei suoi anni e moltiplichiamo per 5".
L'insegnante raccoglie tutte le proposte sulla lavagna o su un cartellone (senza esprimere alcuna valutazione) e fa discutere gli allievi, guidandoli a rilevare che le strategie adatte a risolvere il problema devono essere di tipo quantitativo.

Fase 3

Si prova a questo punto a verificare l'adeguatezza delle proposta, ad esempio, di Gabriele, con calcoli opportuni: se l'altezza di Luca oggi è di 140 cm, dividiamo per 12 (anni di Luca) e moltiplichiamo per 5; otteniamo 58 cm, ma questa non può certo essere la statura di un bambino di 5 anni.
L'insegnante, utilizzando ad esempio una domanda-stimolo del tipo: "Di quali dati hanno bisogno Piero e Luca per risolvere il problema?", induce sia la riflessione individuale che la discussione di gruppo. Gli alunni faranno anche questa volta diverse proposte:
- usiamo la statura della mamma di Luca come confronto;
- utilizziamo l'altezza di un oggetto presente;
- ....

Fase 4

Si raccolgono nuovamente le proposte alla lavagna e, discutendo, si potrebbe giungere a scegliere di utilizzare l'altezza di un oggetto contenuto nella foto che deve però essere disponibile per la misura ancora oggi.
Dalla discussione emerge il fatto che l'oggetto nella foto deve avere le seguenti caratteristiche:
- essere in posizione verticale;
- essere allineato di fianco a Luca.

Si passa così a definire meglio la strategia di risoluzione. Gli allievi discutono insieme e propongono di misurare l'altezza dell'oggetto sia nella foto che nella realtà, trovando così il fattore di scala della foto.
Tale fattore di scala, moltiplicato per l'altezza di Luca nella foto, ci dirà quanto era alto Luca all'età di cinque anni.

Fase 5

L'attività potrebbe continuare chiedendo agli allievi di portare una foto di quando erano piccoli, con le caratteristiche opportune, in modo che ognuno possa calcolare quanto era alto.

Indicazioni metodologiche

La discussione matematica

La fase chiave dell'attività è sicuramente quella collettiva, gestita dall'insegnante come coordinatore della discussione 'matematica' (si veda il documento relativo nel volume Matematica 2001) attorno alla situazione-problema. La raccolta delle ipotesi di soluzione è la prima parte della discussione: va fatta con estrema disponibilità, senza valorizzarne una in particolare oppure stroncarne una non corretta.
Tutte le ipotesi dei ragazzi vanno rigorosamente raccolte e messe al vaglio da loro stessi, in una fase di negoziazione della correttezza o meno. Si verificherà magari che il sostenitore di una ipotesi la difenda accanitamente, con motivazioni più o meno razionali.
Il ruolo dell'insegnante in questa parte di discussione è quello di riportare sempre la discussione su un piano razionale, promuovendo l'argomentazione a favore di una congettura o contro di essa. In tal modo, si abituano i ragazzi a non abbracciare un'ipotesi sulla base dell'autorità che può esercitare l'allievo che l'ha formulata, o di fattori affettivi o irrazionali, o ancora di motivazioni di tipo qualitativo. Occorre, cioè, spingere verso un'argomentazione che giustifichi un'ipotesi con un ragionamento sorretto non solo da giustificazioni logiche, ma anche da calcoli sui dati.

Un punto delicato: quali dati scegliere
Particolare attenzione infatti merita la scelta dei dati sui quali operare: occorre scegliere quelli buoni e scartare quelli inutili, di nuovo motivando razionalmente la propria scelta. Per esempio, qualche allievo potrebbe scegliere di misurare un oggetto presente nella fotografia e ancora a disposizione attualmente, ma non sullo stesso piano prospettico del bambino in foto. Da altri allievi dovrà venir fuori un'opposizione a tale scelta, sulla base del fatto che, non essendo sullo stesso piano verticale, ma più vicino o più lontano, la sua altezza in fotografia non è rapportabile con quella del bambino, in quanto modificata (maggiore o minore) dalla profondità prospettica.

Modelli lineari e non lineari
Un ragionamento basato sulla linearità, come facilmente può esser proposto da qualcuno, va scartato solo sulla base di una prova numerica su dati reali, per far vedere che la crescita di un bambino non è lineare nel tempo, cioè la statura di un bambino non cresce proporzionalmente con gli anni (vedi Fig. 3). La tentazione, infatti, di usare il tempo come grandezza per fare i calcoli è sicuramente molto forte, poiché è un dato presente nel problema ed è molto sentito nel vissuto dei ragazzi, coinvolgendo la loro età.

Giunti alla proporzione fra la statura del bambino in foto, l'altezza di un oggetto sul suo stesso piano prospettico, la statura reale (incognita) del bambino e l'altezza dell'oggetto reale, si risolve la proporzione e si ottiene la misura cercata.

Competenze sviluppate

L'attività proposta intreccia abilità proprie del *Nucleo La misura e del Nucleo Geometria degli OSA*. Ciò al fine di aiutare gli allievi a trasformare in competenze le abilità e le conoscenze relative ai due Nuclei. In particolare è richiesto agli allievi di intrecciare conoscenze e abilità relative alle similitudini e alle rappresentazioni dello spazio tridimensionale con abilità tipiche dei processi di misura e di sviluppare qualche piccolo ragionamento in merito (coinvolgendo così anche il *Nucleo Introduzione al pensiero razionale*). Infatti per risolvere il problema dovranno decidere che cosa e come misurare, effettuare e stimare tali misure in modo diretto e indiretto, esprimere e interpretare i risultati di tali misure, ai fini della risoluzione della situazione problematica.

Possibili fraintendimenti

Ciò che l'insegnante dovrebbe evitare in questa attività è la fretta di giungere a una soluzione, dal momento che è più importante tutta l'attività di discussione che sta a monte del risultato che non il risultato stesso, ottenuto tramite una proporzione. Infatti, questa attività si presenta, collegata con altre, come un'attività a lungo termine, da costruire tramite una didattica lunga che mira alla costruzione dei significati matematici.

Spunti per un approfondimento disciplinare

Gli argomenti matematici di questa attività sono:

- la proporzionalità (linearità) in contesto geometrico;
- le trasformazioni geometriche;
- la nozione di piano prospettico;
- le funzioni empiriche.

Proporzionalità e linearità

Il concetto di proporzionalità[1] tra grandezze affonda le sue radici didattiche nei problemi moltiplicativi della scuola elementare: "se 3 pacchetti (identici) contengono

[1] La proporzionalità rappresenta un argomento fondamentale nell'ambito delle strutture matematiche moltiplicative ed è altresì un modello utilizzato in numerose situazioni concrete e reali. Il pensiero proporzionale, che comincia ad intravedersi alle elementari come aspetto puramente intuitivo deve, attraverso attività stimolanti, ricche e diversificate, assumere una dimensione più ampia e rigorosa con il riconoscimento della sua natura moltiplicativa. Questo passaggio è estremamente delicato, perché spesso genera ostacoli non facili poi da superare. Il passaggio dai numeri naturali ai razionali mette in gioco due strutture; il modello additivo dominante nei naturali ostacola non poco il trasferimento al modello moltiplicativo. Un aiuto (Malara, 2001) ci può venire dal far ricorso alla rappresentazione iconica, che rende più evidente il significato di quantità in proporzione, permettendo un maggior controllo dei risultati nelle operazioni. Tra gli errori che testimoniano questa "confusione" è senz'altro la convinzione che, stabilito un certo rapporto a/b, questo rimane invariato aggiungendo una stessa quantità k sia al numeratore che al denominatore. Un altro aspetto di ordine metodologico-didattico da tenere presente è quello di far lavorare i ragazzi su situazioni e contesti diversi, in modo da poter arricchire di esperienze il pensiero proporzionale in costruzione. Far apprendere in modo meccanico le proporzioni con tutte le proprietà annesse (invertire, permutare, comporre,…), quasi fosse una "scorciatoia" e poi farle utilizzare come uno schema rigido e formale, se pur efficace per risolvere i cosiddetti "problemi del tre semplice", abitua i ragazzi ad assumere un atteggiamento di puro meccanicismo, ma li priva completamente di un controllo significativo sui procedimenti messi in atto. Questo non fa crescere "il pensiero proporzionale", anzi spesso fa emergere nei ragazzi una rigidità e una fissità di pensiero tale da generare insuccessi e frustrazioni nel momento in cui vengono messi in situazioni problematiche "diverse".

75 caramelle, 5 pacchetti conterranno 125 caramelle”. Questi problemi richiedono di “ridurre all’unità” per risolvere il quesito (quante caramelle in 1 pacchetto?) e si presentano in modo diverso a seconda di quale numero si chiede di trovare dati 3 valori soltanto tra i 4: 3, 75, 5, 125. Tipicamente tale tipo di problemi fa riferimento a valori discreti (il numero di pacchetti e di caramelle).
Altri contesti permettono di considerare valori continui, che possono essere risolti sempre con lo stesso metodo. Ad esempio, se in 3 ore un’auto percorre 240 km (procedendo sempre alla stessa velocità), in 5 ore la stessa auto (alla stessa velocità) percorrerà 400 km. In quest’ultimo esempio è più evidente che problemi di questo tipo fanno riferimento a due tipi di relazioni: una tra grandezze diverse (la velocità dell’auto: 80 km/h), una tra grandezze dello stesso tipo (ore o chilometri in rapporto tra di loro come 5 e 3). La riduzione all’unità consiste nel calcolare la prima e poi nell’applicare la relazione trovata per risolvere il problema; la seconda permette di risolvere il problema con un solo passaggio (ad es. moltiplicare 240 km per 5/3 in modo da ottenere 400 km), che sintetizza il procedimento applicato nel primo.

La proporzionalità viene assorbita in un concetto più moderno e potente, la nozione di funzione lineare, che permette di considerare tutti i vari sottocasi dei problemi di proporzionalità in un unico caso e che costituisce oggetto di insegnamento nella scuola secondaria di primo grado. Ad esempio, il caso dell’automobile è modellizzato dalla funzione f: t --> 80t (ovvero s = 80t), dove t rappresenta il tempo (in ore) ed s esprime lo spazio percorso dall’auto (in km) in quel tempo, mentre 80 (km/h) è la velocità dell’auto.
In forma più astratta, la funzione lineare f, il cui grafico è una retta passante per l’origine di pendenza[2] 80, permette di modellizzare il problema considerato. In generale tutti i problemi di proporzionalità diretta sono riconducibili a una funzione lineare $y = kx$ (k non nullo).

Le trasformazioni geometriche
Il ricorso alle similitudini nella nostra situazione problematica, offre lo spunto per fare una distinzione fra la **similitudine** scoperta e sfruttata da Talete per misurare l’altezza di una piramide e riportata su quasi tutti i libri di testo e la trasformazione che lega un oggetto alla sua sezione d’ombra al suolo: **l’affinità**.

La sezione d’ombra sul suolo di una griglia a maglie quadrate illuminata dai raggi del sole (raggi paralleli) è una griglia le cui maglie sono quadrilateri a lati paralleli, ma, in generale, non quadrati (diventano quadrati nel caso in cui si dispone la griglia parallelamente al suolo). La trasformazione geometrica interessata è **l’affinità.**

La stessa griglia in classe alla luce di una lampada (raggi divergenti) fornisce sezioni d’ombra che non mantengono il

---

[2] Nel grafico di una retta è preferibile usare il termine pendenza piuttosto che l’espressione coefficiente angolare. Prima di tutto la parola “pendenza” è la stessa che si usa nel linguaggio comune, mentre l’espressione “coefficiente angolare” la si usa solo nel linguaggio matematico. Ma vi è una ragione più importante. La nozione di pendenza (Dy/Dx) è indipendente dalla scala usata sugli assi cartesiani. Non così succede per il coefficiente angolare, che invece dipende dall’angolo formato dalla retta con l’asse delle x, e quindi dalla scala. Si può parlare di coefficiente angolare solo se il sistema di assi cartesiani è monometrico (e ortogonale).

parallelismo. In questo caso si tratta di una **trasformazione proiettiva.**
Al fine di chiarire come sia possibile passare da una trasformazione geometrica ad un'altra in maniera continua è possibile svolgere in classe la seguente attività: disponiamo un cartoncino quadrato parallelamente al muro e lo illuminiamo con una torcia elettrica in modo che l'asse del cono d'ombra della torcia sia perpendicolare al cartoncino, la sezione d'ombra ottenuta sul muro è simile al cartoncino. La trasformazione geometrica coinvolta è una particolare similitudine, una **omotetia** il cui centro è il punto da cui si diffonde la luce.
L'ombra che si trova sul muro è un ingrandimento del cartoncino. Con un filo avente un capo coincidente con il punto luce della torcia e poggiato ad un vertice del cartoncino, è possibile prevedere a torcia spenta (ovviamente dopo aver illuminato l'ambiente) il punto sul muro corrispondente ad un vertice della sezione d'ombra e determinare il rapporto di omotetia.

Più avviciniamo il punto di luce (torcia), più la sezione d'ombra si ingrandisce, mentre più allontaniamo il punto di luce, più la sezione d'ombra si restringe. Finché, allontanando sempre più la torcia, la sezione d'ombra non rimpicciolisce più e diventa quasi uguale al cartoncino: si ha una **congruenza** (caso particolare della omotetia quando il centro è posto all'infinito).

Se non disponiamo il cartoncino parallelamente alla parete, la sezione d'ombra non è più una figura simile ad esso. Si ha ancora un quadrilatero, ma non rimangono le proprietà del quadrato. In questo caso parliamo di **trasformazione proiettiva.**

Allontanando sempre di più la torcia dal cartoncino la sezione d'ombra si trasforma in un quadrilatero a lati paralleli, si ottiene quindi una **affinità**. La torcia lontana si comporta come il sole (si passa dal modello a raggi luminosi divergenti a quello a raggi paralleli, dal cono di luce al cilindro di luce).

È interessante far notare che in una trasformazione proiettiva non si conserva né la forma della figura, né il parallelismo dei suoi lati, eppure esiste qualche caratteristica della figura che si conserva: a rette corrispondono rette. Questa proprietà non è scontata, infatti, proiettando su una superficie curva un oggetto "dritto", la sua ombra è curva, quindi, a linee rette possono anche corrispondere linee curve.

La nozione di piano prospettico
Il problema della fotografia per essere risolto richiede di considerare un piano perpendicolare al terreno e parallelo all'obiettivo della macchina fotografica passante per un qualche punto del corpo del ragazzo e poi di cercare un oggetto della fotografia che "giaccia" su tale piano, ad es. il guard-rail. Ciò al fine di produrre un confronto tra lunghezze che renda possibile calcolare l'altezza effettiva del ragazzo a partire da

quella apparente nella fotografia (naturalmente occorre conoscere l'altezza reale di un guard-rail dal terreno) usando appunto una proporzione.

Le funzioni empiriche

La domanda dell'insegnante e il problema posto permettono di introdurre anche le cosiddette funzioni empiriche[3], ad es. le funzioni che rappresentano l'andamento dell'altezza di un ragazzo nel corso degli anni (le funzioni empiriche quindi rappresentano risultati di misure effettuate concretamente e di solito si rappresentano con valori del tempo in ascisse e della grandezza misurata in ordinate). Interessanti questioni possono essere poste in relazione alle funzioni empiriche ad es. chiedendo se esiste una funzione che esprima analiticamente i valori rilevati dalla funzione empirica (la legge matematica del fenomeno). I valori di una funzione empirica a volte esprimono sintesi statistiche di dati misurati; ad esempio si possono considerare i valori medi dell'altezza dei bambini di una classe al passare degli anni.

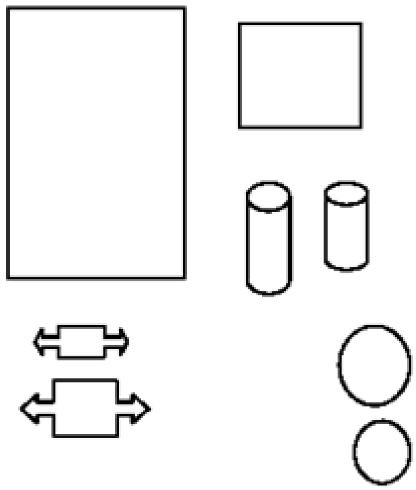
Elementi per le prove di verifica

Eppur son simili!

(Matematica 2001, pag. 378)

Abilità coinvolte: Riconoscere figure simili in vari contesti.

Osserva le seguenti coppie di disegni: per ognuna stabilisci se il disegno piccolo è una riduzione in scala di quello grande. Motiva in ogni caso la tua risposta e trova anche il fattore di scala quando la tua risposta è affermativa.

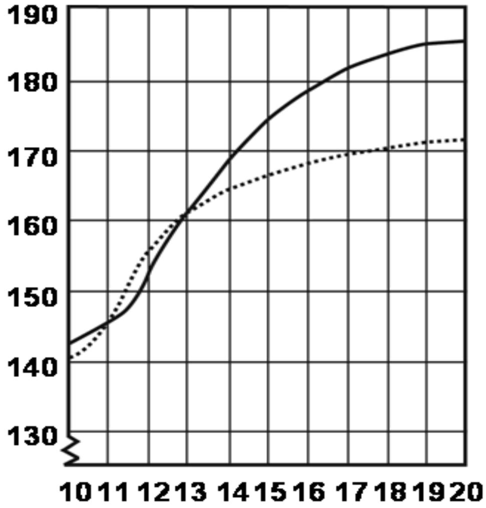


Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc (allegato verifica1.doc) o in formato .pdf (allegato verifica1.pdf).

Chi è più alto?

Le altezze dei ragazzi si prestano a prove di verifica di varia natura. Un esempio di questo genere è usato nelle prove OCSE-PISA per un quesito aperto, dove si esibisce un grafico dell'altezza media dei giovani olandesi divisi per sesso (vedi figura sotto) e si fanno domande del tipo: "Spiega in che modo il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni. In base al grafico, in che periodo della vita le ragazze sono, in media, più alte dei maschi della stessa età?"

[3] La distinzione tra le "funzioni matematiche", nelle quali le variabili sono legate da una legge matematica (ad esempio la misura di un quadrato che varia in funzione della misura del suo lato), e le "funzioni empiriche", nelle quali i valori delle variabili si ottengono attraverso operazioni di misura (ad esempio le temperature di un luogo che variano in funzione del tempo), potrebbe avere un valore didattico, ma in termini di rigore teorico non ha motivo di essere. in quanto anche le funzioni così dette "empiriche" sono a tutti gli effetti funzioni matematiche



Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc (file allegato verifica2.doc) o in formato .pdf (verifica2.pdf).

La cornice
Nell’ambito dei problemi che riguardano la similitudine è opportuno proporre situazioni in cui c’è una similitudine solo apparente, per mettere alla prova i ragazzi che di solito si limitano ad applicare formule in problemi ripetitivi e che non pongono alcun “problema”. Quesiti di questo tipo mettono di nuovo in discussione il modello additivo su cui si basa la falsa proporzionalità.

a) Osserva un quadro del tuo salotto ed in particolare la sua cornice. Il rettangolo esterno della cornice e quello interno sono rettangoli simili? Motiva la risposta.

b) Voglio incorniciare una fotografia con un listello di legno. La fotografia incorniciata e la fotografia non incorniciata rappresentano rettangoli simili? Motiva la risposta.

c) Paolo ha 4 anni e sua sorella Lucia 3. Quanti anni avrà Lucia quando Paolo ne avrà 8?

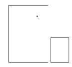
Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc (file allegato verifica3.doc) o in formato .pdf (file allegato verifica3.pdf).

Spunti per altre attività con gli studenti

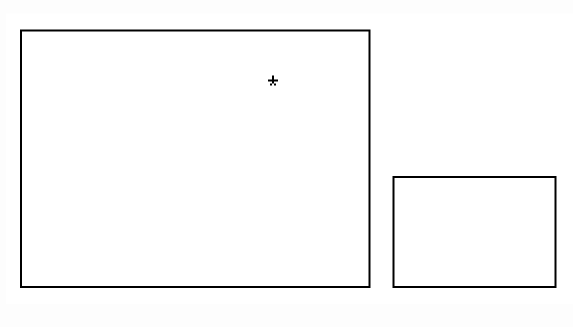
1. Considerare una fotografia di oggetti disposti su di un tavolo. Tra di essi vi è anche un campione di metro. Come calcolare le misure reali dei vari oggetti della fotografia?

2. Fare una fotografia in cui compaiano un passaggio pedonale (a strisce) e dei cartelli segnaletici di divieto (circolari), di obbligo (quadrati) e di nome di località (rettangolari).
Discutere quali forme assumono nella fotografia le strisce del passaggio pedonale e i cartelli segnaletici.

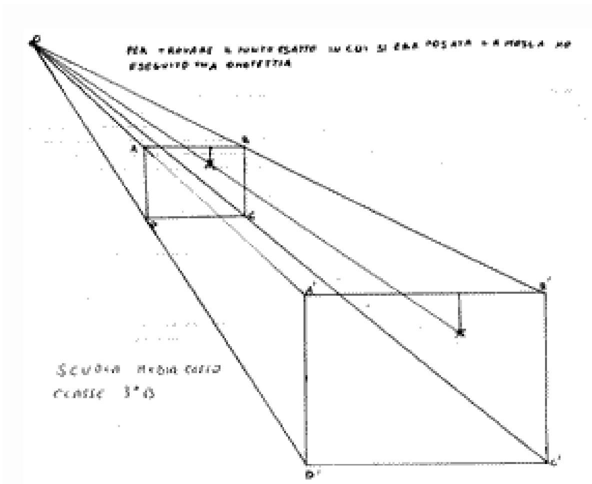
3. Dove si posa la mosca? (7° RMT[4])



Il rettangolo di destra è la fotografia del grande rettangolo di sinistra. Nel momento in cui la fotografia è stata scattata, una mosca si è posata sul rettangolo grande.
Il fotografo però quando ha stampato la fotografia l'ha cancellata.
Rimettete la mosca al posto giusto sulla foto. Spiegate come avete proceduto.
L'analisi a priori del compito, che accompagna ogni problema del rally matematico transalpino, prevedeva le procedure risolutive seguenti:



- Determinare il fattore di riduzione della fotografia a partire dai due rettangoli e verificare che è il medesimo per le due dimensioni: 2,5/6 = 3,5/8,4 = 5/12, determinare poi le coordinate della mosca sul foglio e calcolare le coordinate corrispondenti sulla foto
- Oppure utilizzare una procedura geometrica tracciando due rette passanti ciascuna per la mosca e un vertice del foglio e conducendo poi le parallele corrispondenti sulla foto
- Oppure cercare il centro di omotetia, etc.



In realtà, l'analisi a posteriori (Doretti et al.,2001, pp.216-229), che analizza le strategie risolutive utilizzate anche il relazione al livello scolastico e gli errori, che compaiono più frequentemente, fatta su 234 elaborati provenienti da varie regioni italiane e dalla Svizzera con un livello scolare dagli 11 ai 14 anni ha evidenziato che questo problema, benché di natura geometrica, sia stato risolto nella maggioranza dei casi mediante strategie di carattere numerico, anche se non sono mancate strategie "miste" in cui le procedure aritmetiche e geometriche sono state usate contemporaneamente.
La soluzione per via aritmetica (Grugnetti e Rinaldi, 2003, pp.105-113) può non risultare pienamente soddisfacente.
Le soluzioni geometriche sono evidentemente più "sicure" e anche meno faticose.
Si può focalizzare l'attenzione:

- sulla similitudine tra le singole figure (visione locale)
- sulla omotetia del piano (visione globale)

Questo problema, ricco di contenuti matematici da un lato e di possibilità di ricorso a numerose procedure risolutive dall'altro, sembra prestarsi bene alla costruzione di nuove conoscenze. L'enunciato del problema invita a considerare un "oggetto" e una sua fotografia, esempio classico per introdurre il discorso sulle figure simili. La similitudine e l'omotetia, in quanto tali possono poi costituire il punto di arrivo dell'attività indotta dal problema, che può svilupparsi lungo strade molto diverse.
L'analisi a posteriori ha messo in luce ben 17 tipi di procedure utilizzate dagli allievi. Si va dall'individuazione della posizione della mosca "ad occhio" o con qualche

[4] Il Rally Matematico Transalpino è una gara matematica internazionale tra classi, caratterizzata dal lavoro in gruppo e dall'argomentazione delle strategie risolutive

tentativo di procedura aritmetica, a metodi di approssimazioni successive (quadrettatura, suddivisioni via via più raffinate,...), a procedure basate sul coefficiente di proporzionalità e sulla proprietà moltiplicativa di linearità, esprimibile con f(kx) = kf(x), a procedure puramente geometriche che presentano costruzioni basate sulla conservazione degli angoli o del parallelismo, sull'omotetia, sulla suddivisione dei rettangoli con rette parallele ai lati o con "diagonali", sulla riproduzione del rettangolo piccolo sopra a quello grande.
Ci sembra particolarmente interessante, nel caso di questo problema, la fase di discussione in classe sulle diverse procedure messe in atto dagli allievi della classe, ma anche sulle procedure usate dalle classi impegnate nel rally. Un'attività in classe sviluppata a partire dal confronto di diverse strategie risolutive: dalle strategie che portano a trovare "più o meno dove si trova la mosca" (più o meno dovuto in generale a misurazioni empiriche) a quelle che consentono di trovare effettivamente "dove si trova la mosca", può costituire un terreno fertile per avviare la costruzione di una nuova conoscenza (omotetia, ad esempio) che permette di risolvere in maniera "ottimale" il problema.
I ragazzi di prima media incontrano difficoltà nella risoluzione del problema, in quanto, non possedendo ancora strumenti matematici adeguati, si affidano esclusivamente all'uso intuitivo delle proprietà della riduzione, come l'individuazione di un coefficiente valutato approssimativamente, la conservazione dei rapporti fra le dimensioni da un rettangolo all'altro, la conservazione degli angoli o del parallelismo, seguendo in ogni caso procedure "approssimate". Nel passare ai livelli scolastici successivi il problema tende a diventare un buon esercizio e un'applicazione di procedure acquisite, si perde l'importanza del ruolo dell'intuizione e prevale la strategia del coefficiente di proporzionalità.
Mettendo a confronto gli elaborati italiani con quelli svizzeri, si osserva che mentre i protocolli italiani privilegiano la via aritmetica, anche se porta a risultati approssimati, quelli svizzeri dedicano maggior attenzione alle costruzioni geometriche con riga, compasso e squadra (riporto di angoli, disegno dirette parallele, costruzioni di segmenti proporzionali,…..).

4. "Alla ricerca della città perduta" (Matematica 2001, pag. 188).

Materiali a supporto

Materiali per le prove di verifica
Versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc o in formato .pdf.

Bibliografia

AAVV, Matematica 2001. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola primaria. Scuola secondaria di I grado* (scarica il documento).
PISA 2003, *Valutazione dei quindicenni a cura dell'OCSE*, Armando Armando, Roma, 2004.

Arzarello F., Robutti O., *Matematica*, La Scuola, Brescia 2002.

D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna, 1999.

N. Malara, C. Pellegrino, R. Iaderosa, *Avvio ad attività di matematizzazione attraverso problemi*, La matematica e la sua didattica, n.2, 1994, pag.168.

N. Malara, *Una sperimentazione di avvio al pensiero proporzionale*, Progetto CNR per la formazione degli insegnanti, 2001.

AAVV, *RMT: evoluzione delle conoscenze e valutazione dei saperi matematici*, Bologna, Tecnoprint, 2001.

AAVV, *RMT: potenzialità per la classe e la formazione*, Bologna, Tecnoprint, 2003

Sitografia

Dal sito INVALSI OCSE-PISA 2006:
http://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=ocsepisa06

Proposta di attività

(da condividere e discutere in rete)
Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:
individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.
Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.
Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà. Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.