Allineamenti - Esploriamo le funzioni lineari

di P. Accomazzo, M. Ajello, D. Paola, A. Perrotta

Introduzione.....
Indicazioni curricolari.....
Indicazioni curricolari: riferimenti.....
Prove INVALSI.....
Descrizione attività.....
Spunti per un approfondimento disciplinare.....
Elementi per prove di verifica.....
Spunti per altre attività con gli studenti.....
Documentazione e materiali.....
Bibliografia e sitografia.....
Protocollo per la sperimentazione.....

Introduzione

L'attività è il naturale proseguimento di "Introduzione al concetto di funzione" senza però esserne dipendente, può essere sviluppata autonomamente, ma dopo i primi rudimenti sulle funzioni.
Anche in questo caso, come in altri, si cerca di mettere in luce la possibilità che ha l'insegnante di praticare la continuità tra i diversi segmenti dell'istruzione scolastica. Da una parte, infatti, si sfrutta l'aggancio con la **proporzionalità diretta** (tematica già della scuola media) per il passaggio allo studio delle **funzioni lineari**, dall'altro si pone una forte attenzione agli **aspetti qualitativi dei grafici** e alla connotazione funzionale anche nella risoluzione di equazioni e disequazioni per preparare il terreno allo studio delle funzioni con l'analisi matematica.
L'attività si discosta, invece, dall'usuale proposta iniziale di un problema legato alla realtà del cittadino per far fronte alla necessità didattica, sempre molto sentita dagli insegnanti, di dare un assetto sistematico ai diversi momenti del far scuola laboratorialmente. Si sceglie, quindi, di analizzare soprattutto **situazioni** - problema incentrate sugli oggetti matematici per avere l'occasione di dare un primo supporto teorico alle diverse esperienze matematiche degli studenti.
È il caso di chiarire, inoltre, che la retta non è la protagonista di questa attività. Volutamente non si segue la strada che porta subito alla geometria analitica (che trova sempre grandi spazi nei curricoli di matematica), ma ci si sofferma ad osservare il **modello lineare** in tutti i suoi aspetti.

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 57 del 15/07/2010, Direttiva n. 65 del 09/07/2010) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni curricolari: riferimenti

Risultati di apprendimento comuni - Area scientifica, matematica e tecnologica:

- Comprendere il linguaggio formale specifico della matematica, saper utilizzare le procedure tipiche del pensiero matematico, conoscere i contenuti fondamentali delle teorie che sono alla base della descrizione matematica della realtà.

- Essere in grado di utilizzare criticamente strumenti informatici e telematici nelle attività di studio e di approfondimento; comprendere la valenza metodologica dell'informatica nella formalizzazione e modellizzazione dei processi complessi e nell'individuazione di procedimenti risolutivi.

Obiettivi specifici di apprendimento

Dati e previsioni

In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.
Lo studio delle funzioni del tipo $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ e la rappresentazione delle rette e delle parabole nel piano cartesiano consentiranno di acquisire i concetti di soluzione delle equazioni di primo e secondo grado in una incognita, delle disequazioni associate e dei sistemi di equazioni lineari in due incognite, nonché le tecniche per la loro risoluzione grafica e algebrica.

Istituti Tecnici e professionali

Relazioni e funzioni

Conoscenze

Le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.). Collegamento con il concetto di equazione. Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa).

Equazioni e disequazioni di primo e secondo grado. Sistemi di equazioni e di disequazioni. Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano. Rappresentazione grafica delle funzioni.

Abilità

Risolvere equazioni e disequazioni di primo e secondo grado; risolvere sistemi di equazioni e disequazioni.

Rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate.

Studiare le funzioni $f(x) = ax + b$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.

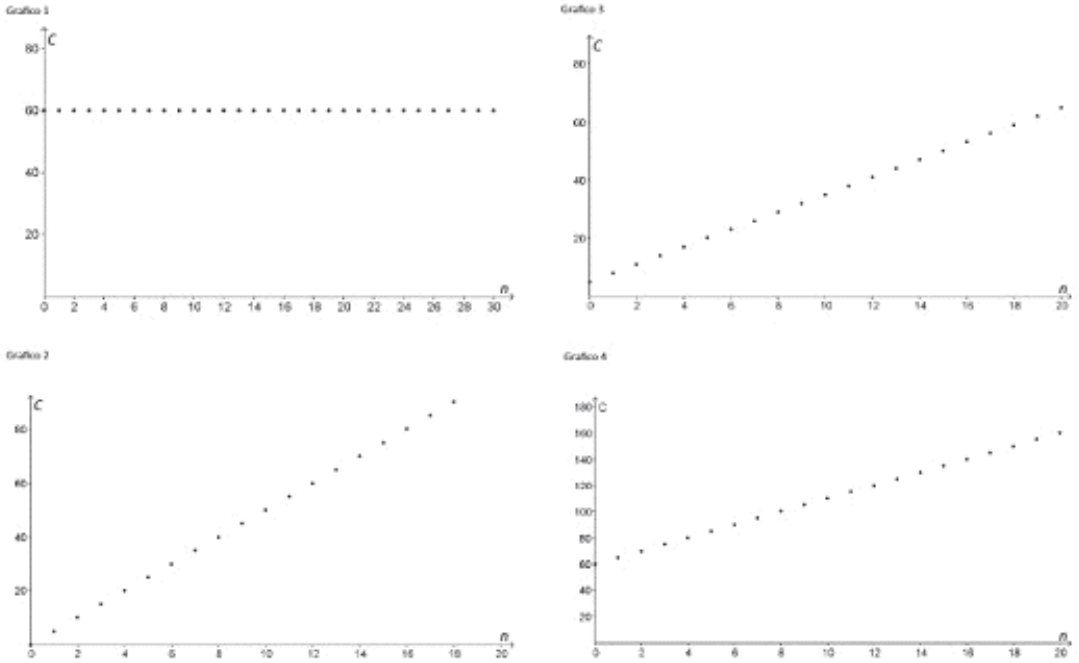
Prove INVALSI

a.s. 2013/2014 - Domanda D4

Scuola secondaria di II grado - Classe II

D4. **Per frequentare una palestra Paolo deve pagare quest'anno una quota fissa di 60 euro e 5 euro per ogni ingresso.**

a. **Quale fra i seguenti grafici descrive il costo *C* (in euro) della palestra in funzione del numero *n* di ingressi?**



A. ☐ Grafico 1

B. ☐ Grafico 2

C. ☐ Grafico 3

D. ☐ Grafico 4

b. **Paolo ha a disposizione 200 euro. Se si iscrive alla palestra, qual è il numero massimo di ingressi a cui ha diritto quest'anno?**

Risposta: .....

c. **Completa la formula che esprime il costo *C* della palestra in funzione del numero *n* di ingressi.**

***C* =** .....

Soluzione INVALSI: D4_a: D D4_b: 28 D4_c: 5*n*+60

L'item a. verifica la capacità degli studenti di leggere un grafico. La risposta corretta può essere fornita anche notando semplicemente che l'intercetta all'origine della successione lineare che descrive il costo al variare del numero di ingressi deve essere 60 euro, cioè la

quota fissa che è necessario pagare se si vuole frequentare la palestra. parte il grafico 1, che pur interseca l'asse y in (0;60), ma rappresenta una funzione costante, l'unico grafico che rispetta tale condizione è il grafico numero 4. Lo studente può in seguito verificare anche che per ogni incremento unitario di *n* (numero di ingressi) il costo aumenta di 5 euro, coerentemente con i dati indicati nel testo. Eventuali altre opzioni scelte dallo studente suggeriscono che allo studente non siano chiari i concetti di pendenza o di intercetta all'origine di una funzione lineare.

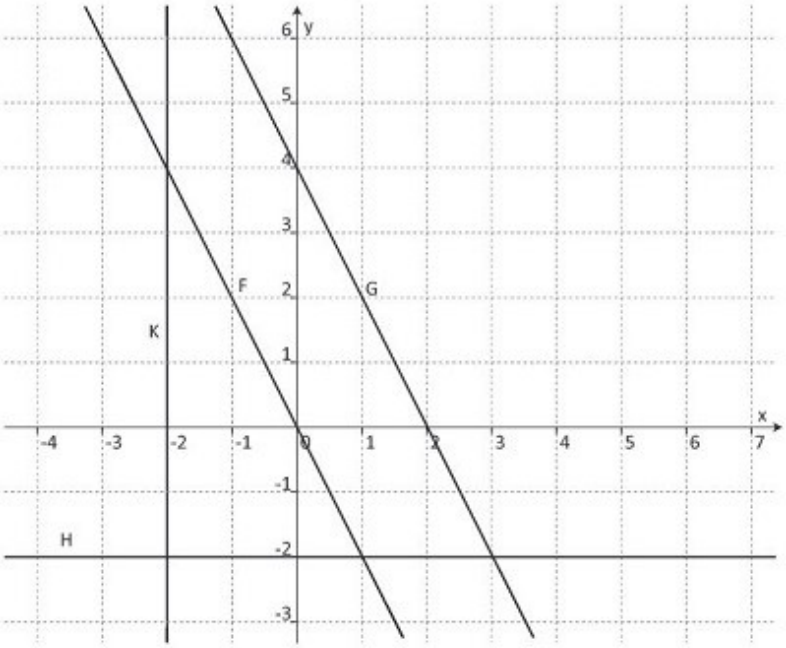
L'item b. si può rispondere notando che dei 200 euro disponibili 60 euro vanno spesi per la quota fissa. Rimangono cosi 140 euro disponibili per gli ingressi Al massimo possono quindi essere effettuati 140/5 = 28 ingressi. Naturalmente sono possibili anche altri procedimenti per arrivare alla risposta corretta. Per esempio è possibile leggere direttamente sul grafico che il costo per 20 ingressi, comprensivo della quota fissa, è di 160 euro e chiedersi quanti altri ingressi è possibile fare al massimo con i 40 euro restanti. Ovviamente si ottiene lo stesso risultato: 28 è il massimo numero di ingressi che è possibile effettuare con 200 euro

L'item c. verifica competenze legate alla messa in formula. Se la quota fissa è 60 euro e per ogni ingresso si devono pagare 5 euro, allora detto *n* il numero di ingressi, il costo C della palestra in funzione di *n* è dato da $C = 60 + 5n$ o espressioni equivalenti. Una difficoltà potrebbe essere costituita dalla locuzione "il costo C in funzione di *n*", che richiede un attento lavoro sul concetto di funzione, che, d'altra parte, è fondamentale sia nelle Indicazioni Nazionali, sia nelle Linee Guida.

Commento
Il quesito posto è molto simile all'attività sulla scuola di Pallavolo proposta nell'unità e le indicazioni delle invalsi seguono la linea didattica lì indicata, si presta quindi molto bene ad essere svolto con gli studenti.

a.s. 2013/2014 - Domanda D14
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D14. **Sul seguente piano cartesiano sono rappresentate le rette *F*, *G*, *H*, *K*.**



Associa a ciascuna delle equazioni in tabella la retta corrispondente.

Metti una crocetta per ogni riga.

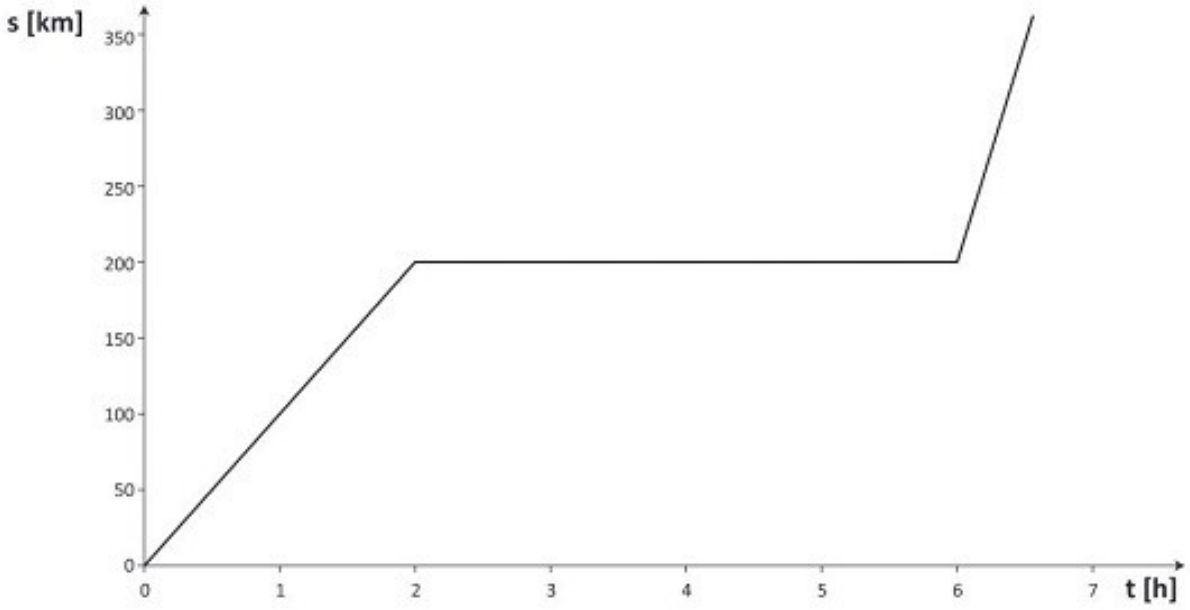
	Equazione	Retta *F*	Retta *G*	Retta *H*	Retta *K*
a.	$y = -2x + 4$	☐	☐	☐	☐
b.	$y = -2x$	☐	☐	☐	☐
c.	$y = -2$	☐	☐	☐	☐

Soluzione INVALSI: D14_a: retta *G* D14_b: retta *F* D14_c: retta *H*
L'item consente di verificare la competenza di conversione tra i diversi registri di rappresentazione, nello specifico tra il registro di rappresentazione grafica (i grafici) e quello di rappresentazione simbolica (le formule). Per associare in modo corretto alle formule i rispettivi grafici è sufficiente conoscere come possono essere individuate, in un grafico e in una formula del tipo $y = ax + b$ la pendenza e l'intercetta all'origine.

Commento
Dopo lo svolgimento dell'attività il significato di pendenza di una retta, della quota (o intercetta) di una retta dovrebbero essere chiari; in questo item si cerca anche di indagare eventuali confusioni che lo studente può avere ponendo uguale a -2 sia i due coefficienti angolari che la terza equazione proposta, e si cerca di comprendere se per lo studente sia chiara la differenza nelle equazioni di due rette parallele.

a.s. 2013/2014 - Domanda D28
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D28. **Il seguente grafico rappresenta le posizioni assunte da un corpo in funzione del tempo. La posizione *s* è espressa in chilometri (km) e il tempo *t* in ore (h).**



Quale fra le seguenti è una corretta descrizione del movimento del corpo?

A. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

B. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

C. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

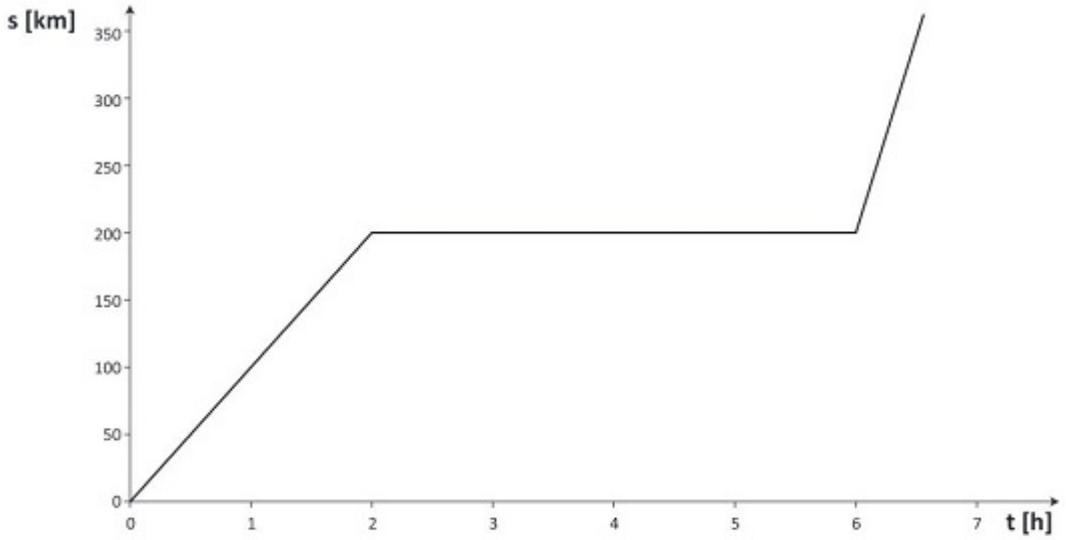
D. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

Soluzione INVALSI: D
Per rispondere correttamente alla domanda gli studenti devono riuscire a riconoscere in un grafico posizione - tempo il significato di un tratto orizzontale (velocità uguale a 0) e di un cambiamento di pendenza (variazione di velocità). Il riconoscere che il tratto orizzontale "dura" per 4 ore consente di scartare le opzioni che affermano che il corpo si ferma per 6 ore (A e C). Il riconoscere che la pendenza dell'ultimo segmento del grafico è maggiore della pendenza del primo segmento del grafico (che rappresenta il movimento del corpo nelle prime due ore) consente di scegliere l'opzione D fra le due rimaste.

Commento
Se oltre all'attività di base è stata svolta l'attività "Funzioni lineari e movimento" contenuta negli "Spunti per altre attività" questo item ben si presta ad essere svolto dagli studenti e richiama l'esercizio 4 contenuto nelle prove di verifica proposte. Interessante notare come sul campione nazionale si passa dal circa il 46% di risposte corrette degli studenti degli Istituti Professionale a circa il 73% di risposte corrette degli studenti del Liceo, a testimonianza che un item a carattere interpretativo risulta particolarmente ostico ai ragazzi.

a.s. 2013/2014 - Domanda D8
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D28. **Il seguente grafico rappresenta le posizioni assunte da un corpo in funzione del tempo. La posizione *s* è espressa in chilometri (km) e il tempo *t* in ore (h).**



Quale fra le seguenti è una corretta descrizione del movimento del corpo?

A. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

B. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

C. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

D. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

Soluzione INVALSI: D8_a.: B D8_b.: 1 D8_c: -1/3 D8_d: x > -1/3 oppure qualunque rappresentazione dell'intervallo aperto]- ⅓, +∞[
Per rispondere correttamente alla domanda gli studenti devono riuscire a riconoscere in un grafico posizione - tempo il significato di un tratto orizzontale (velocità uguale a 0) e di un cambiamento di pendenza (variazione di velocità). Il riconoscere che il tratto orizzontale "dura" per 4 ore consente di scartare le opzioni che affermano che il corpo si ferma per 6 ore (A e C). Il riconoscere che la pendenza dell'ultimo segmento del grafico è maggiore della pendenza del primo segmento del grafico (che rappresenta il movimento del corpo nelle prime due ore) consente di scegliere l'opzione D fra le due rimaste.

Commento
L'item a indaga la comprensione sulla pendenza e la quota di una retta, il coefficiente angolare positivo porta ad escludere le opzioni c e d, mentre l'intercetta uguale ad 1 porta ad indicare il grafico B. Per rispondere agli **item b** e **c** lo studente può utilizzare un registro numerico, sostituendo quindi il valore zero nelle corrispondenti variabili, o un linguaggio grafico per l'item b, mentre l'item c richiede sempre un corrispondente calcolo algebrico. **L'item d** propone un'analisi del segno della variabile y che nell'unità in esame è proposta a conclusione delle attività.

Descrizione attività

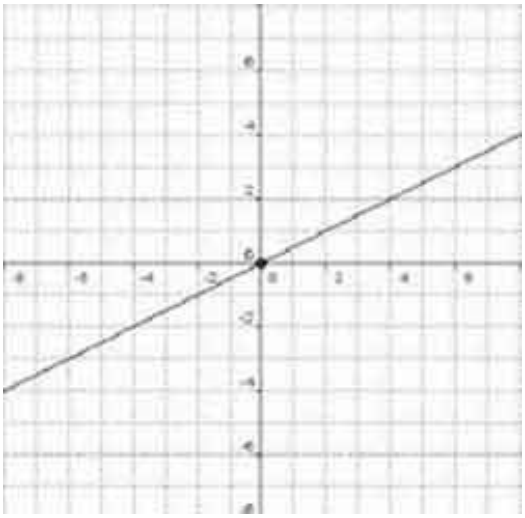
Fase 1

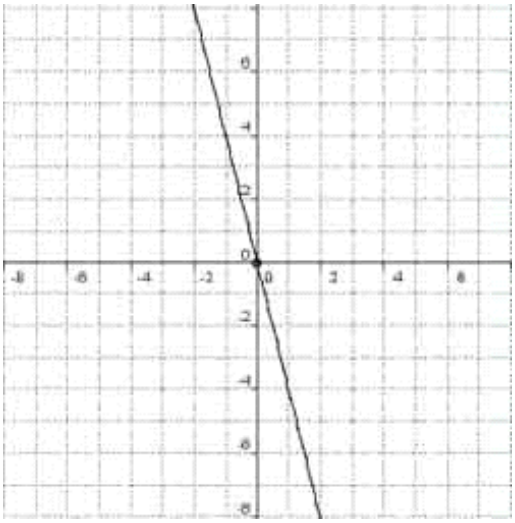
Allineamento di punti e proporzionalità

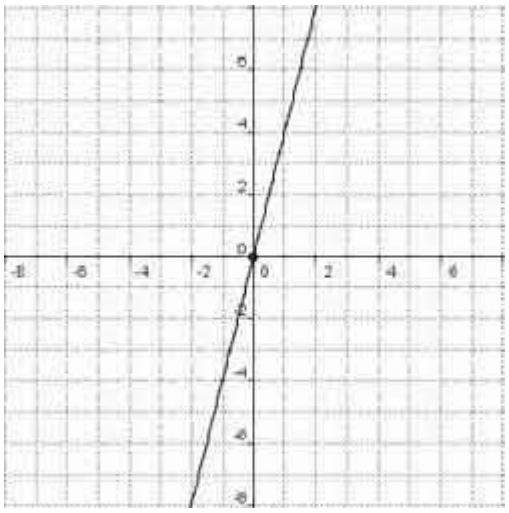
Vengono proposti agli allievi tre quesiti relativi all'**allineamento** di punti nel piano cartesiano. Inizialmente si lavora su punti allineati **con l'origine degli assi** e quindi le coordinate corrispondenti sono in relazione di **proporzionalità diretta**. L'insegnante segue le indicazioni della proposta di lavoro.

Quesito 1
Da svolgere a coppie

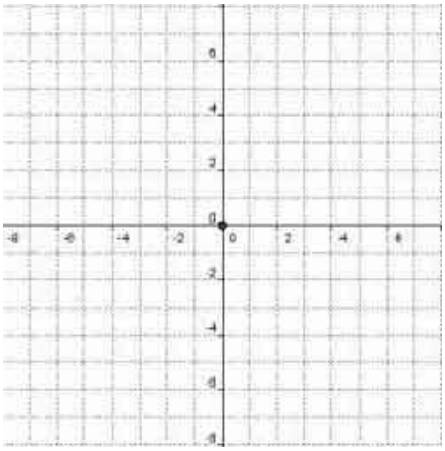
Il tuo compagno deve riprodurre i grafici sotto disegnati attraverso una tua descrizione; non puoi farglieli vedere. Sai dargli le indicazioni necessarie?

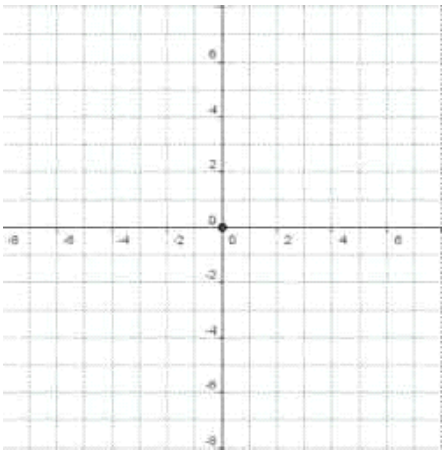


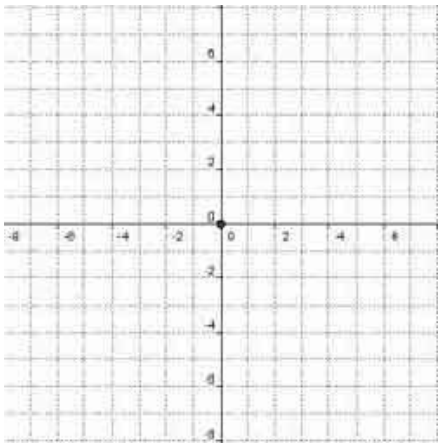




Il compagno avrà a disposizione uno schema analogo al precedente.







Scarica i grafici – [grafici-cartacea1]

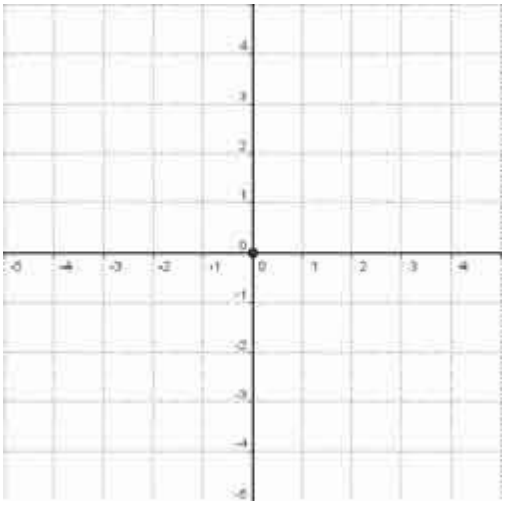
Quesito 2

Da svolgere singolarmente o a coppie con carta e matita

Completa la seguente tabella in modo che le coppie rappresentino coordinate di punti del piano cartesiano allineati.

Utilizza il piano cartesiano a fianco come base per i tuoi tentativi.

x	y
2	
4	3
	0.5
$\frac{4}{3}$	
-4	



Scarica il grafico – grafico 7

Quesito 3

Singolarmente o a coppie, con carta e matita

L'intrusa

Esamina ad una ad una le seguenti tabelle; in una delle tre i punti corrispondenti sul piano cartesiano non risultano allineati. Sapresti dire quale e perché?

x	-2	1,51	$\frac{2}{3}$	-100	-4,5
y	2	-1,51	$-\frac{2}{3}$	100	4,5

Tabella A

x	1	200	-2	$\frac{1}{2}$	80
y	20	10	-10	40	$\frac{1}{4}$

Tabella B

x	200	0	-1	60	-9
y	300	0	-1,5	90	$-\frac{27}{2}$

Tabella C

In questo esercizio si vuole puntare l'attenzione soprattutto sul **registro numerico**, riferendo l'allineamento di punti alla proporzionalità fra i valori di y e x.

Riflessione
Le esperienze comuni devono dare origine ad una discussione da cui si evidenzia che tutti i problemi sono caratterizzati dal modello algebrico $y = a\ x$. Si può fare riferimento alle conoscenze precedenti sulla **proporzionalità diretta**.
La proporzionalità diretta è spesso riferita a grandezze a misura positiva, ma la formula $y = a\ x$ è applicabile all'intero dominio Reale: è opportuno sottolineare l'**ampliamento del dominio**.
Al termine di questa proposta l'allievo dovrebbe associare al registro grafico dell'allineamento di punti con l'origine il registro numerico di proporzionalità diretta e la formula $y = a\ x$.
In seguito, l'insegnante può ricavare altre situazioni problematiche che diano origine allo stesso modello lavorando su situazioni tratte da vari contesti: il grafico dello spazio percorso da uno studente che cammina con regolarità in funzione del tempo trascorso; stesso problema con uno studente che corre; un problema costo/ quantità di merce acquistata. Per un riferimento si veda anche l'attività "Introduzione al concetto di funzione".

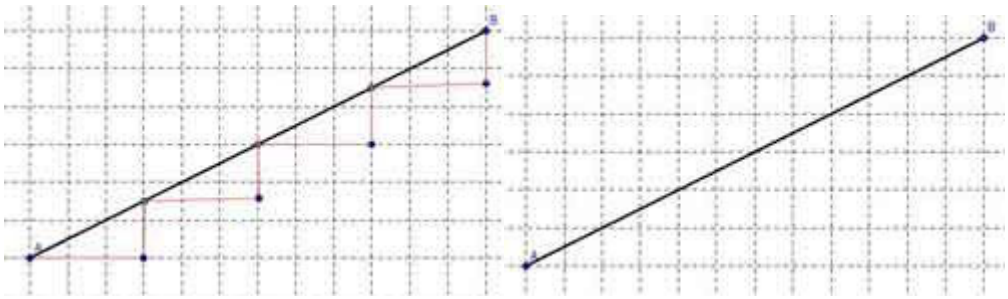
Fase 2

Il concetto di pendenza
Questa seconda fase collega l'allineamento di punti alla "pendenza" costante. Il metodo utilizzato è quello dei gradini e delle scale, come già indicato nell'attività "Introduzione al concetto di funzione".

Si arriva così gradualmente al concetto di **pendenza**, associato al rapporto costante $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

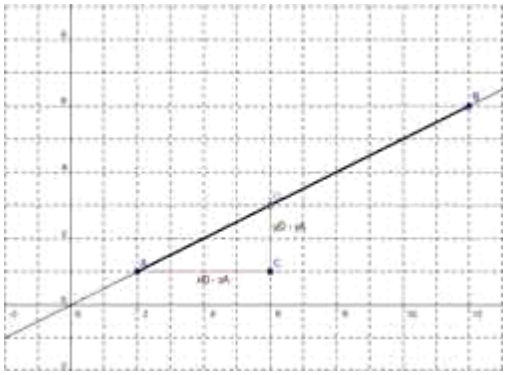
Quesito 1

Per andare dal punto A al punto B puoi seguire i gradini di una scala, così come nel disegno. Se l'unità del disegno è di 10 cm, quanto misurano la profondità e l'altezza di ciascun gradino?
Per lo stesso percorso da A a B potresti costruire una scala a gradini di profondità diversa? Come varia l'altezza?
Attenzione: devi pensare ad una scala con gradini tutti uguali!



L'insegnante, confrontando le diverse scale costruite dagli allievi, dovrà condurre la classe all'osservazione che la caratteristica dell'inclinazione del segmento è il rapporto costante tra l'altezza e la profondità del gradino, e non la singola misura.

Il passo successivo sarà di esaminare situazioni analoghe sul piano cartesiano dove il rapporto in questione si formalizza con $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



È il momento di dare un nome a questo rapporto costante indicandolo con "**pendenza del segmento o della retta**".

Si noti come alcuni software di geometria dinamica evidenzino il "gradino" di profondità unitaria associato al concetto di pendenza.

Osserva il seguente grafico.

Si può far notare che esistono segnali stradali che usano lo stesso metodo per indicare la pendenza di una strada. Il segnale seguente indica una salita ripida: di quanto ripida?

Si può chiedere agli allievi di disegnare su carta quadrettata un segmento che abbia la stessa pendenza rispetto alla linea orizzontale.

E cosa significa pendenza del 100%?

Si presenti ora il concetto di pendenza con la formula $y = a\,x$.

Si possono proporre situazioni in cui si chiede di disegnare il grafico di una retta per l'origine data la formula della funzione e di confrontare il valore di *a* con il rapporto che si ricava dal

gradino; viceversa, si proporrà di ricavare la formula della funzione che rappresenta un grafico dato (rette per l'origine con diverse inclinazioni) con la tecnica dei gradini e del loro rapporto.
Per completare l'approccio alla pendenza è necessario fissare l'attenzione su valutazioni di **natura numerica**. L'insegnante proporrà il quesito seguente da cui dovrà emergere l'analogia con la situazione geometrica (differenze finite costanti, pendenza costante, funzione lineare).
Per scaricare la versione cartacea dei grafici, **clicca qui**.

Quesito 2
Come camminano Marco e Luca?

Esamina la seguente tabella:

tempo t (in secondi)	Spazio percorso (in m) da Marco	Differenze prime	Spazio percorso (in m) da Luca	Differenze prime
1	0,6	-	0.6	-
2	1.2	0.6	1	0.4
3	1.8		1.8	
4	2.4		2.4	
5	3		3.4	
6	3.6		4	
7	4.2		4.6	
8	4.8		5	
9	5.4		5.5	
10	6		6	
11	6.6		6.6	

Chi, tra Marco e Luca si muove con maggiore regolarità?

Fai le tue osservazioni sulle funzioni che rappresentano le due situazioni (spazio in funzione del tempo); aiutati completando le due colonne che rappresentano le differenze prime dei due percorsi e confronta i risultati ottenuti.

Scarica la tabella - tabella_fase2_q2

Fase 3

La quota
L'insegnante chiede agli studenti quali significati si possano dare nel linguaggio comune al termine "quota". Sottolinea che si parla generalmente di quota come misura riferita ad un punto di partenza fissato.
Propone quindi un problema che conduca ad una funzione del tipo y = mx + q.

Corsi di pallavolo
La società sportiva "Salus" propone per il 2008 dei corsi di pallavolo. Per partecipare occorre iscriversi pagando una quota associativa di 20 euro; la retta mensile viene fissata, grazie ad una convenzione con la scuola, in 5 euro. Quanto spenderà Marco per 3 mesi? E per 5? E per 15?
Rappresenta in tabella la situazione e scrivi la funzione che indica la dipendenza costo - numero di mesi.
L'insegnante farà notare che il modello algebrico ottenuto è una funzione del tipo $y = mx + q$. In questo caso non vale la proporzionalità diretta: non basta, infatti, che alla crescita del numero di mesi corrisponda una crescita della spesa totale!

Fase 4

Esplorazione grafica
Si propongono quindi due situazioni analoghe: nella prima varia solo la **quota associativa** e nella seconda varia solo la **retta mensile**. È il caso di proporre un'esplorazione del modello lineare al variare dei parametri separatamente. Lo scopo dell'esplorazione è quello di caratterizzare il ruolo dei parametri ed in particolare giungere ad **un'analisi qualitativa dei grafici** (crescenza/decrescenza, intersezione con l'asse *y*).

Si potrà anche fare un cenno alle trasformazioni geometriche che intervengono (traslazione, rotazione).

Osserva i seguenti modelli:
allegato - modello lineare variazione pendenza
allegato - modello lineare variazione quota

Vengono poste agli alunni le seguenti domande:
- Che ruolo ha il valore di *q* nel problema? E nel grafico?
- Quale situazione ritrovi nel caso in cui *q* è 0?
- Trovi opportuna la scelta di denominare *q* "quota"?
- Al variare di *q* che cosa cambia nella retta rappresentata? Che cosa rimane invariato?
- Quale movimento sul piano corrisponde alla variazione di *q*?
- Che ruolo ha il valore di *m* nel problema? E nel grafico?
- Che senso ha, nel problema, porre *m*=0? Che cosa succede nel grafico corrispondente?
- Al variare di *m* che cosa cambia nella retta rappresentata? Che cosa rimane invariato?
- Quale movimento sul piano corrisponde alla variazione di *m*?

• Che cosa succede se si attribuisce ad *m* un valore negativo?

Il modello lineare

Esplorazione numerica
Si può indagare il ruolo di *m*, *q*, *x*, *y* con un foglio elettronico.
Si riprende il problema precedente e si costruisce la seguente tabella dei valori, facendo notare che nella formula di dipendenza lineare occorre usare il $ per *quota associativa* e *retta mensile* (parametri) e non per *numero mesi* (variabile).
Il Foglio elettronico consente anche di rispondere ad altre domande relative al problema, che possono indurre anche al concetto di funzione inversa, come ad esempio:
• Hai speso 75 euro: per quanti mesi hai frequentato il corso?
• Hai a disposizione 123 euro: per quanti mesi al più puoi frequentare il corso?

Fase 5

Equazioni, disequazioni e sistemi lineari
Si possono introdurre questi argomenti anche agganciandosi alla fase precedente di questa attività. In particolare ci si può collegare ad alcune delle domande relative al problema del corso di pallavolo e notare che:

• Non è necessario conoscere un algoritmo risolutivo per risolvere un'equazione di primo grado. Ad esempio, alla domanda "Hai speso 75 euro: per quanti mesi hai frequentato il corso?" (che conduce a $5x + 20 = 75$) si può rispondere osservando la tabella o il grafico, senza la manipolazione algebrica della formula.

• La domanda "Hai a disposizione 123 euro: per quanti mesi al più puoi frequentare il corso?" conduce ad una disequazione ($5x + 20 < 123$) che può essere anch'essa risolta in modo numerico o grafico.

• L'uso di parametri diversi nella proposta del corso di pallavolo (esempio quota associativa: 10 e retta mensile: 10) conduce anche alla ricerca di "situazioni di equilibrio" attraverso la risoluzione - sempre grafica o numerica - di un sistema lineare ($5x + 20 = 10x + 10$), che fornisce la risposta alla domanda "Per quale numero di mesi la spesa nelle due società sarebbe la stessa?".

• In generale, nell'affrontare questioni riconducibili alla forma $y = m x + q$ si può sottolineare che il valore di *x*, soluzione dell'equazione, rappresenta lo zero della funzione, mentre rimanda al segno della funzione.

Indicazioni metodologiche
È opportuno ricordare che le questioni metodologiche a carattere generale, più volte declinate in altre attività e in particolare nel nucleo "relazioni e funzioni", sono anche in questo caso valide e quindi sottintese.
Alcuni aspetti interessanti di didattica della matematica si presentano, invece, più in questa attività che in altre e sono segnalati durante lo svolgimento delle diverse fasi.
Rimane solo da fare qualche puntualizzazione che aiuti l'insegnante ad utilizzare al meglio il lavoro proposto.
"Si sconsiglia di introdurre precocemente simboli e formalismi non necessari; al contrario, per rendere comprensibile e apprezzabile l'uso dei simboli e delle formule conviene costruire e proporre, gradualmente, situazioni in cui siano evidenti i vantaggi di un linguaggio formale" (da Matematica 2003, prima parte sul curricolo).

La raccomandazione citata invita gli insegnanti a procedere senza fretta per dare spazio ai diversi registri interpretativi e non privilegiarne alcuno, mettendo in evidenza il vantaggio, in termini di informazione, che ciascun registro rappresentativo fornisce.
Si può concludere facendo notare che:
• le esperienze di carattere dinamico sono particolarmente adatte a descrivere fenomeni in evoluzione che si formalizzano con funzioni lineari, con o senza software specifico;
• è preferibile non separare lo studio di funzioni dalla risoluzione di equazioni e disequazioni, è bene parlare subito di zero e segno di una funzione;
• si deve fare attenzione a non banalizzare, nella fase 1, il passaggio all'ampliamento di Dominio della funzione $y = a\ x$, che è nota agli studenti prevalentemente con x numero razionale positivo: molti errori in Matematica hanno origine da generalizzazioni poco accorte;
• *"lo studio delle funzioni lineari può essere agevolato dalle osservazioni del cambiamento dei loro grafici per effetto di trasformazioni geometriche elementari" (da Matematica 2003).*

Spunti per un approfondimento disciplinare

Forma implicita $ax + by = c$ ed equazione diofantea lineare

Dall'equazione in forma esplicita $y = mx + q$ attraverso semplice manipolazione algebrica si giunge alla forma implicita che può essere anche introdotta a partire da problemi del tipo:

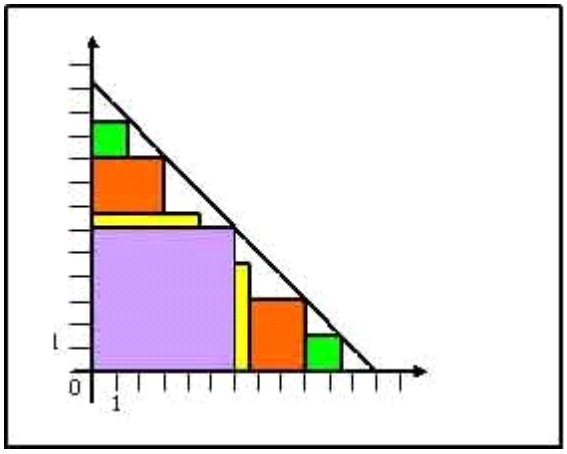
Spettacoli estivi
"Avendo assistito questa estate a spettacoli musicali al costo di 15 euro l'uno e a spettacoli cinematografici a 8 euro l'uno, posso aver speso 54 euro?".

Questo corrisponde a trovare le soluzioni intere di un'equazione diofantea del tipo $15x + 8y = 54$ (un primo esame della situazione può essere fatto con l'uso del seguente foglio elettronico.

Successivamente si può estendere il discorso a parametri negativi e non interi e se ne può fare uno studio grafico (scarica il file geogebra) e giungere ad osservare che coppie di valori che soddisfano la stessa equazione $ax + by = c$ sono le coordinate di punti allineati.
Il lavoro può essere condotto con l'ausilio di domande come queste:
• Esistono delle soluzioni?
• Come possono essere trovate?
• Quante sono le soluzioni?

Rettangoli isoperimetrici e funzioni lineari

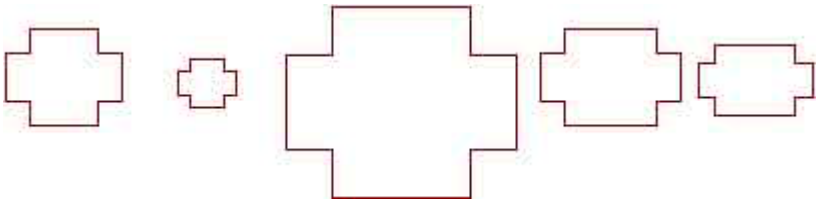
L'esame dell'equazione $ax + by = c$ può essere ricondotta nel caso $a = 1$ e $b = 1$ all'equazione $x + y = c$ che può essere il modello algebrico dell'isoperimetria di rettangoli di dimensioni x e y e semiperimetro c che viene efficacemente visualizzata nell'esperienza in figura:



Per approfondire confronta anche le attività m@t.abel "Diversi tra confini uguali" e "Rettangoli e fontane".

Similitudine e fattori di scala

La proporzionalità diretta può essere accompagnata a riflessioni sul significato di similitudine (attraverso semplici esempi come questo):



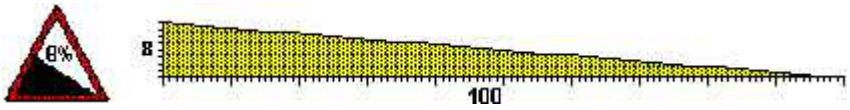
e domande del tipo:

- quali figure sono simili tra loro?
- come spiegheresti che alcune figure non sono simili ad altre?

Il discorso può ovviamente proseguire con il significato di fattore di scala e attività con carte stradali etc.

Pendenze, angoli, percentuali

A partire dall'esame del cartello stradale si può approfondire il concetto di pendenza percentuale e far notare che per pendenze poco accentuate come quelle stradali (con angolo molto piccolo rispetto al riferimento orizzontale) non c'è grande differenza tra lunghezza della strada percorsa e avanzamento in orizzontale. Ad esempio nel caso raffigurato la base del triangolo e il lato obliquo hanno lunghezza pressoché eguale: se la base misura 100 mm il lato obliquo misura 100.3 mm.



Si può, quindi, osservare il legame tra pendenza e angoli analizzando le variazioni relative in casi particolari e in maniera per ora solo qualitativa, per preparare al legame quantitativo dato dalle funzioni goniometriche.
Si noti anche che mentre nel caso della pendenza stradale si parla di pendenza, ad esempio del 10%, indistintamente per una salita come per una discesa, nel grafico di una retta si distingue il caso di un grafico "crescente" da quello di un grafico "descrescente", al quale si associa una pendenza negativa.

Elementi per prove di verifica

1. Sono allineati?
In un piano cartesiano sono segnati tre punti.

A(-3;-1) , B(5;1) e C(12;3)

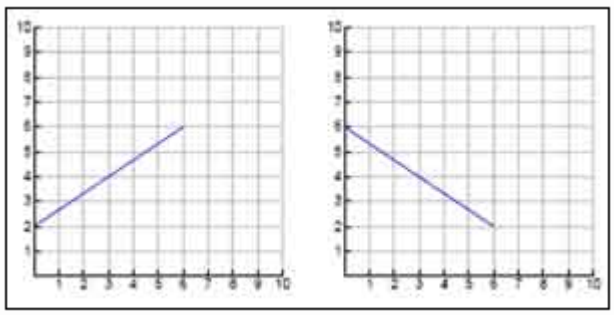
I tre punti sono allineati? Giustifica le tue affermazioni.

2. Per entrare nell'atrio della scuola "G. Marconi" bisogna salire tre gradini che hanno ciascuno una *pedata* (profondità) di 32 cm ed un'*alzata* (altezza) di 10 cm.
Si vuole costruire uno scivolo che permetta l'accesso anche alle carrozzelle. Quale deve essere la profondità dello scivolo se si vuole che la sua pendenza non superi il 12%? Bastano 2 metri?

3. Completa le seguenti tabelle in modo che i punti C e D stiano sulla retta passante per A e B.

	A	B	C	D
Retta 1	(0, -5)	(-1; -4)	(1;...)	(...; -1)
Retta 2	(3; 2)	(5; 2)	(-20; ....)	(...; 200)
Retta 3	(23; 1)	(1;43)	(0;...)	(-13;...)

4. Due ciclisti si stanno muovendo sulla stessa strada; sotto sono indicati i grafici dei rispettivi diagrammi *tempo - distanza dal Bar Sport* (il tempo è misurato in minuti, le distanze in Km).
Quali informazioni puoi trarre dai due diagrammi? In particolare, i due ciclisti sono partiti dal *Bar Sport*? Si stanno allontanando o avvicinando al Bar? Si può dire se la strada che stanno percorrendo è in salita o in discesa?



5. Una gita scolastica

Una classe vuole affittare un pullman per una gita ed ha contattato tre ditte per informarsi sui prezzi.

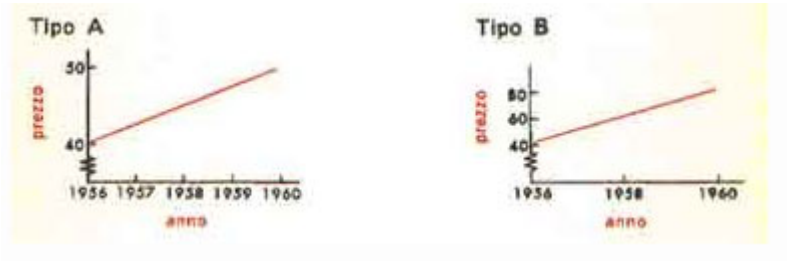
La ditta A richiede 375 euro come tariffa iniziale più 1.5 euro per km percorso.

La ditta B richiede 250 euro come tariffa iniziale più 1.75 euro per km percorso.

La ditta C fa pagare una tariffa fissa di 350 euro che comprende i primi 200 km percorsi, più 1.52 euro per ogni km oltre i 200.

Quale ditta dovrebbe scegliere la classe tenendo conto che nella gita si percorrerà una distanza compresa fra i 400 ed i 600 km?
(esempio tratto e riadattato da prove OCSE- PISA, Armando Editore)

6.Quale aumento?
Considerate i grafici seguenti e rispondete alle domande.



I grafici rappresentano l'aumento di prezzo - in euro - che due prodotti (tipo A e tipo B) hanno subito negli anni che vanno dal 1956 al 1960.

- Quale prodotto ha avuto il maggior aumento annuo di prezzo?
- Quale prodotto è aumentato maggiormente nel biennio 1958 - 1960?

(*da Matematica 2003, Misurare*)

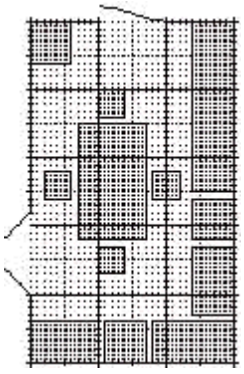
7. Per comprare una bici
La proposta di vendita della ditta XXX per una bicicletta da corsa del prezzo di 2000 euro è la seguente: 300 euro in contanti alla consegna e il resto in rate da 165 euro ciascuna. In una nota si fa presente che è compresa nelle rate una spesa aggiuntiva per alcuni attrezzi per la manutenzione della bici non compresi nei 2000 euro.

Esprimi la legge secondo la quale varia la quota da rateizzare in funzione del numero delle rate; in che modo la funzione
$y = 300 + 165\,x$ può rappresentare la proposta di vendita della bici?

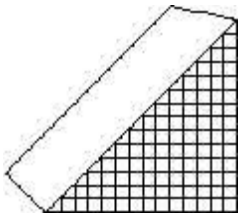
È possibile ricavare la "spesa aggiuntiva" dalle informazioni del problema o è bene chiedere qualche chiarimento? è importante sapere che il numero delle rate è 11?
A quanto ammonta la "spesa aggiuntiva" obbligatoria?

Il responsabile della ditta vorrebbe apportare alcune modifiche alla proposta fissando in 5 il numero delle rate mensili e includendo nella cifra iniziale in contanti la "spesa aggiuntiva". A quanto ammonterebbe la quota di ogni rata mensile in questo caso?

8. A fianco è riprodotta (su carta millimetrata) la piantina di una cucina con i mobili, disegnata per un cliente da un architetto che lavora in una ditta di arredamento. Quale potrebbe essere la scala di riduzione che ha impiegato?

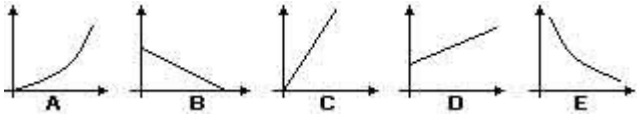


9. A lato è raffigurata una salita ripidissima. Che cosa possiamo dire della sua pendenza?



- (A) è del 70.7%
- (B) è del 45%
- (C) è del 50%
- (D) è del 100%
- (E) è del 30%

10. I seguenti grafici rappresentano 5 diversi modi in cui i valori y di una grandezza variano in funzione dei valori x di un'altra grandezza.



Associa a ciascun grafico la tabella di dati che potrebbe rappresentarlo parzialmente e la frase o le frasi (possono essere più di una) che possono essere usate per descrivere tali variazioni.

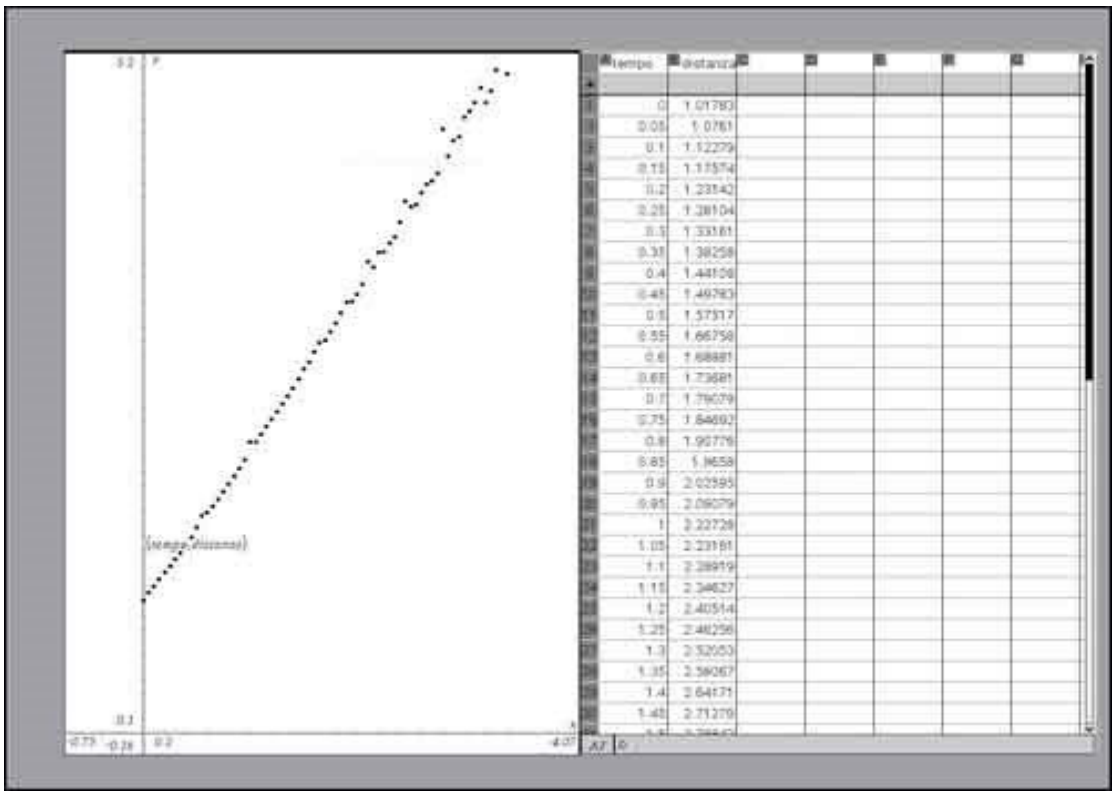
Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato doc o in formato pdf.

Spunti per altre attività con gli studenti

Funzioni lineari e movimento

Si è già parlato, nelle attività di "Introduzione al concetto di funzione" dell'importanza delle funzioni nella modellizzazione di relazioni spazio- temporali. Se ci riferiamo alle funzioni lineari il modello da prendere in considerazione è quello del **movimento a velocità costante**.

Nell'esempio seguente è stato chiesto ad un allievo di camminare con "regolarità" (stesso passo e stessa direzione) davanti ad un sensore di posizione. Il sensore ha rilevato la distanza dall'allievo, in metri, ad intervalli di tempo di 0.5 sec, ed ha prodotto tabella e grafico seguenti:



Si può chiedere agli studenti di analizzare grafico e tabella e di individuare a quale velocità ha camminato l'allievo. È possibile trovare una legge che esprima la posizione dell'allievo al trascorrere del tempo? E quanta strada sarà percorsa camminando a questa velocità per 1 ora?

I dati della tabella sono riportati nel seguente file Excel.

Ulteriori problemi relativi all'analisi di un movimento attraverso i sensori possono essere ricavati da "Camminiamo e corriamo" tratto da Matematica 2003.

Variabili e parametri: Un tipo prevedibile!

Ogni mese, il giorno 1, il Signor Rossi, percepisce il suo stipendio di 1800 euro dal quale si affretta a mettere da parte 350 euro per l'affitto della casa e 100 euro di spese fisse. Grazie alle sue meticolose annotazioni delle spese di ogni genere e al suo tenore di vita "costante", è riuscito a stabilire che, in media, spende ogni giorno circa 35 euro.
Inoltre annota immediatamente sia le spese che le entrate non previste (che non superano in entrambi i casi i 1000 euro mensili) per via delle quali i suoi risparmi subiscono, un'oscillazione, nell'arco di un anno, che varia tra 2000 e 6000 euro.
Così è stato in grado di elaborare un grafico interattivo, utilizzando un software dinamico, che gli consente, ogni giorno del mese, di vedere le condizioni delle sue finanze.
Sapresti realizzare anche tu un grafico del genere per il Signor Rossi, prevedendo con la stessa scrupolosità ogni "evento"? (*Consiglio: utilizza Geogebra e tieni conto della possibilità di inserire parametri che si controllano con la tecnica che conosci e che è implementata nell'icona "slider").*
Il problema offre spunti di discussione sul significato dei diversi dati del problema:
• Quali spese/entrate sono fisse e quali variabili?
• Ci sono spese/entrate a cui non si può attribuire un valore costante? Per questi dati è individuabile un intervallo di variabilità?
• Di quanto può disporre il signor Rossi all'inizio del mese?
• Quale può essere la variabile indipendente del problema? Fra quali valori può variare?

Si comincia con la funzione y = (a + b) + 1800 - (350 + 100) - 35x dove x sono giorni, "a" i risparmi all'inizio del mese - si può porre ad esempio a = 4000 e sarà il dato da aggiornare a ogni inizio mese - e variano di "b" per le spese o le entrate; "b" può essere, quindi, negativo o positivo, all'inizio lo si pone uguale a zero e lo si fa variare da -1000 a 1000 -.
Sorge la questione delle unità di misura che Geogebra gestisce bene perché offre possibilità di ridefinire le unità sugli assi. Osserva il seguente grafico.

Nel grafico l'ascissa di B rappresenta il giorno del mese, mentre l'ordinata rappresenta la cifra totale a disposizione del Sig. Rossi in quel preciso giorno del mese.

Lavorare in un dominio discreto: quante camicie usava Diofanto?
Un interessante problema che tratta di funzioni lineari nel dominio dei numeri naturali si può trovare in "Le camicie di Diofanto".

Confronto fra crescite lineari e crescite quadratiche: in che modo si cresce?
Visualizza l'attività: "Ognuno cresce a modo suo".

Documentazione e materiali

Materiali di supporto all'attività

- Pendenza retta per origine
- Modello lineare variazione pendenza
- Modello lineare variazione quota
- Retta generica
- Un tipo prevedibile
- Come cammini
- Corso di pallavolo
- Spettacoli estivi

Materiali per le prove di verifica
Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc o in formato .pdf.

Materiali di approfondimento all'attività
Problemi relativi all'analisi di un movimento attraverso i sensori "**Camminiamo e corriamo**".

Lavorare in un dominio discreto: quante camicie usava Diofanto?

- Un interessante problema che tratta di funzioni lineari nel dominio dei numeri naturali si può trovare in "Le camicie di Diofanto".

Confronto fra crescite lineari e crescite quadratiche: in che modo si cresce?

- Visualizza l'attività: "Ognuno cresce a modo suo".

Bibliografia e sitografia

AAVV, Matematica 2001. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculo di matematica. Scuola primaria. Scuola secondaria di primo grado. **https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2001.pdf**

AAVV, Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di matematica. Ciclo secondario.
https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf

PISA 2003, Valutazione dei quindicenni a cura dell'OCSE, Roma, Armando Armando, 2004.

Matematica in rete: **http://www.matematica.it/paola/Corso di matematica.htm**
Nella sezione "Lezione 1":
Le funzioni lineari (copia in pdf)
Modelli dinamici lineari (copia in pdf)

Sitografia

Sito dell'Unione matematica Italiana (UMI):

https://umi.dm.unibo.it/

Dal sito INVALSI
OCSE-PISA 2006
www.invalsi.it/invalsi/ri/pisa2012.php?page=pisa2012_it_08

Protocollo per la sperimentazione

Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti: individuare i principali **nodi didattici** cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto. Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze. Sperimentare l'unità proposta:

- fare una **ricognizione del contesto scolastico** specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli **adattamenti necessari**;
- formulare il **progetto didattico relativo**;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un **diario di bordo** (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuto in classe). L'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà. Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.

Scarica la versione cartacea in **formato .pdf**.