Introduzione al concetto di funzione

Pierangela Accomazzo, Marilina Aiello, Domingo Paola, Anna Perrotta

Introduzione
Quello di **funzione** è uno dei nodi concettuali più significativi incontrati dagli studenti nel loro percorso scolastico.

Agli inizi del Novecento il grande matematico tedesco Felix Klein considerò l'obiettivo dell'acquisizione di un pensiero funzionale come una vera e propria parola d'ordine per la proposta di riforma curricolare europea.

La definizione di funzione come sottoinsieme del prodotto cartesiano A x B, tale che a ogni $a \in A$ corrisponde uno e un solo $b \in B$, non è apparsa nella matematica per caso. Questa definizione fu il risultato di un lungo e tortuoso processo nello sviluppo del pensiero matematico.

A questo proposito, il concetto di funzione può essere considerato come un emergente dei problemi relativi allo studio delle variazioni di grandezze: uno strumento matematico particolarmente adeguato a modellizzare situazioni caratterizzate dalla variazione di una grandezza rispetto a un'altra. Si pensi, per esempio, a come sarebbero stati aiutati, nella loro ricerca e nell'esposizione dei loro risultati, Galileo e Keplero se avessero potuto disporre di una **teoria esplicita relativa alle funzioni**. Lo sviluppo del concetto di funzione fu aiutato in modo significativo dalla potenza espressiva messa a disposizione dalla notazione algebrica creata da Viète e, in particolar modo, dalla geometria analitica introdotta da Cartesio e Fermat.

Nell'introduzione del concetto di funzione in classe è necessario non dimenticare questo lungo e tortuoso processo per evitare di correre il rischio che gli studenti, anche i migliori e i più disponibili, si limitino, quando va bene, a ripetere definizioni formalmente corrette, ma vuote di significato. Se è vero che già a partire dalla scuola elementare si effettuano attività con le funzioni, è altrettanto vero che per una prima trattazione sistematica, esplicita e consapevole è bene attendere l'inizio della scuola secondaria di secondo grado.

Altrettanto importante è ricordare, nelle prime attività finalizzate alla trattazione esplicita e consapevole del concetto di funzione, che le radici cognitive di questo concetto vanno ricercate nel movimento, in particolare nell'idea di una grandezza che varia nel tempo o in alcune curve tracciate da punti in movimento.

Una didattica di carattere laboratoriale, particolarmente attenta alla costruzione di significati per gli oggetti di studio, non potrà non tenere conto di questi aspetti, soprattutto con le risorse oggi messe a disposizione dalle nuove tecnologie per effettuare esperienze significative legate al movimento.

Un altro punto didatticamente molto importante è minimizzare il rischio che gli studenti confondano l'oggetto matematico "funzione" con una delle sue rappresentazioni. I percorsi più tradizionali erano fondati sulla rappresentazione delle funzioni mediante formule espresse nel linguaggio simbolico ed erano caratterizzati da un lungo addestramento teso ad acquisire, consolidare e perfezionare tecniche di manipolazione algebrica per la determinazione del **grafico di una funzione**. Oggi le risorse messe a disposizione dalle nuove tecnologie consentono di rivoltare il percorso, partendo dal grafico per arrivare agli aspetti simbolici.

Entrambi i percorsi presentano limiti e potenzialità; fra i rischi, che qui ci interessa evidenziare, c'è il pericolo che gli studenti confondano il **concetto matematico** (la funzione) con una delle sue **rappresentazioni** (la formula, nel primo percorso, o il grafico, nel secondo). Per minimizzare il rischio di incorrere in questo equivoco, è necessario utilizzare fin da subito, parlando di funzioni, tutte le diverse rappresentazioni: **numeriche**, **grafiche** e **simboliche**. Tabelle, grafici e formule dovrebbero accompagnare sempre i primi esempi di funzioni proposti agli studenti, utilizzando non solo la carta e la matita, ma anche i software oggi facilmente disponibili.

Nell'attività qui presentata elenchiamo diversi esempi che possono essere proposti agli studenti per introdurre il concetto di funzione e che richiedono impegni differenziati in termini di investimento di risorse e di tempo. Tutti, però, prestano particolare attenzione all'**introduzione di un linguaggio adeguato** per parlare delle funzioni e per esprimere in modo adeguato ed efficace un pensiero funzionale. In particolare, l'idea principale è quella di **utilizzare termini adeguati**, prima nella lingua naturale, poi nel linguaggio matematico, per descrivere se una funzione cresce o decresce e per precisare **come** cresce o decresce (quindi crescenza e concavità).

Sarà compito e responsabilità dell'insegnante scegliere, fra quelli proposti, gli esempi ritenuti più significativi e adatti al contesto in cui opera. L'indicazione del tempo da dedicare all'attività è stata fornita supponendo che l'insegnante scelga di utilizzare, al più, due esempi fra i quattro qui proposti.

Riferimenti curriculari

Indicazioni curriculari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 57 del 15/07/2010, Direttiva n. 65 del 09/07/2010) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni Nazionali per i Licei

Linee generali e competenze

Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.), anche per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico. In particolare, lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni; a ottenere informazioni e ricavare le soluzioni di un modello matematico di fenomeni, anche in contesti di ricerca operativa o di teoria delle decisioni.
Lo studente sarà in grado di passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale), anche utilizzando strumenti informatici per la rappresentazione dei dati.

Istituti Tecnici e professionali

Competenze di base

Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Conoscenze

- Le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica). Linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.
- Collegamento con il concetto di equazione.
- Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa).

Abilità

Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.

Istituti professionali

Competenze di base

Utilizzare il linguaggio e i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative.

Conoscenze

- Le funzioni e la loro rappresentazione (numerica, funzionale, grafica).
- Linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.).
- Collegamento con il concetto di equazione. Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa).

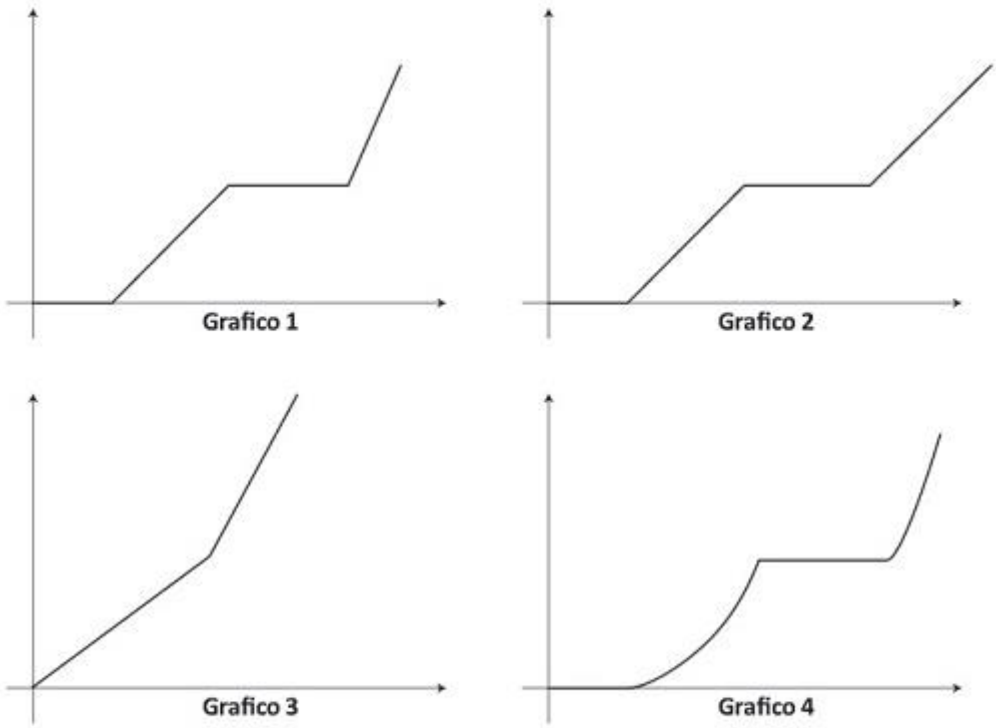
Abilità

- Rappresentare sul piano cartesiano le principali funzioni incontrate.
- Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, di equazioni e di sistemi di equazioni anche per via grafica.
- Collegamenti con altre discipline e situazioni di vita ordinaria.

Prove Invalsi

a.s. 2011/2012 - Domanda D27
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D27. **Durante il periodo estivo Anna deve leggere un libro di 305 pagine come compito per le vacanze. Nel mese di giugno si riposa e a partire dal primo giorno di luglio legge 5 pagine al giorno per tutto il mese. In agosto va in vacanza con i genitori e dimentica il libro a casa; al suo ritorno, negli ultimi 10 giorni di vacanza, per terminare il libro legge 15 pagine al giorno. Quale, fra i seguenti grafici, può rappresentare l'andamento del numero di pagine lette da Anna nel periodo estivo?**



A. ☐ Il grafico 1

B. ☐ Il grafico 2

C. ☐ Il grafico 3

D. ☐ Il grafico 4

Soluzione INVALSI: A

Commento
Si tratta di una tipica attività di conversione dal registro verbale-numerico a quello grafico. Per individuare il grafico corretto, gli studenti devono sapere tradurre graficamente informazioni come "nel mese di giugno (Anna) si riposa" (che consente di escludere il grafico 3, l'unico che non parte con un segmento orizzontale), "a partire dal 1° luglio legge 5 pagine al giorno" o "negli ultimi dieci giorni di vacanza legge 15 pagine al giorno" (che consentono di escludere il grafico 4, che esprime una relazione non lineare tra numero di pagine lette e giorni trascorsi in luglio).
Infine gli studenti devono collegare l'aumento del numero di pagine lette a un aumento della pendenza nel grafico, scegliendo così, il grafico 1 invece del grafico 2

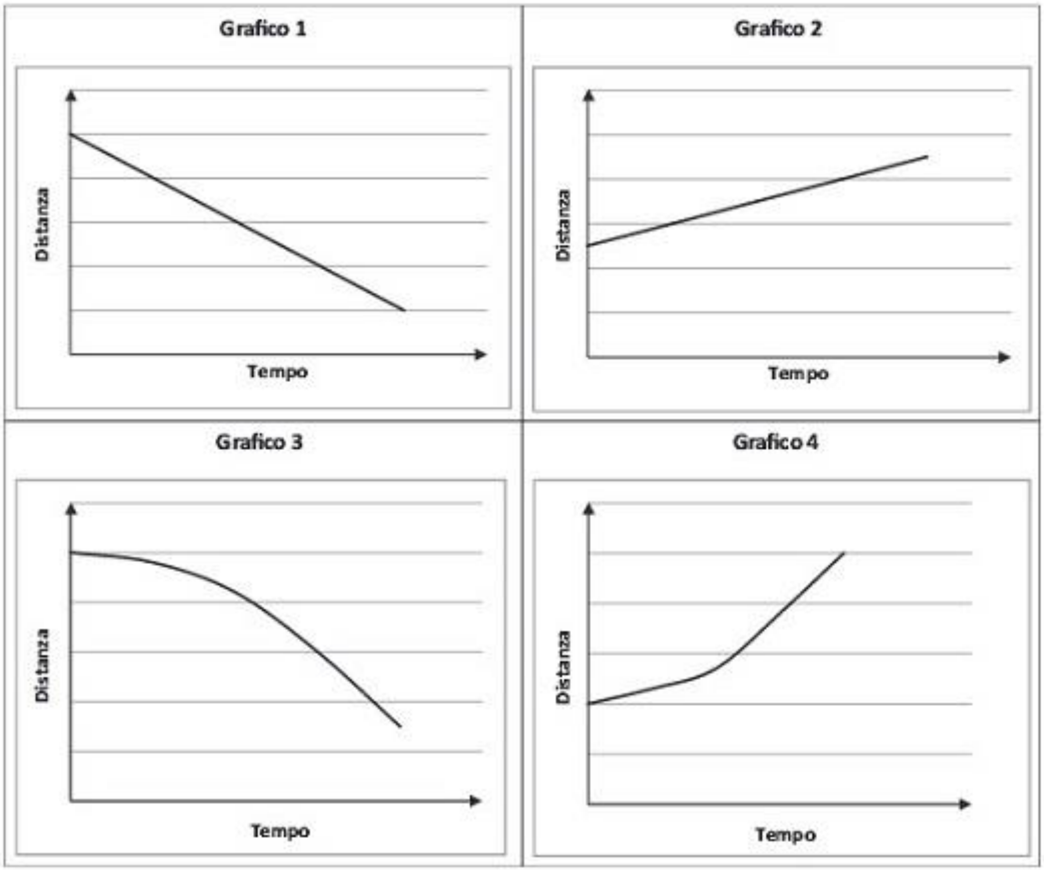
(in cui non c'è aumento di pendenza tra il periodo di luglio e quello degli ultimi dieci giorni di vacanza).

a.s. 2013/2014 - Domanda D9

Scuola secondaria di I grado - Classe III

D9. **Due treni viaggiano uno verso l'altro con velocità costanti.**

Individua fra i seguenti grafici quello che descrive come varia la distanza fra i due treni al passare del tempo.



A. ☐ Grafico 1

B. ☐ Grafico 2

C. ☐ Grafico 3

D. ☐ Grafico 4

Soluzione INVALSI: A

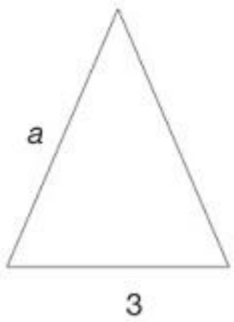
Commento

Il quesito richiede di interpretare un modello matematico (un grafico distanza-tempo) a lla luce della descrizione di un fenomeno. Si tratta di individuare quale grafico corrisponde alla descrizione del fenomeno fisico descritto a parole nello stimolo. Se i due treni viaggiano uno verso l'altro allora la distanza fra i due treni diminuisce, quindi si possono scartare i grafici 2 e 4 dove la distanza aumenta all'aumentare del tempo.

Inoltre, considerato che i treni viaggiano a velocità costante la distanza diminuisce in modo lineare, pertanto si può scartare il grafico 3 che invece rappresenta un decremento non lineare.

Scuola secondaria di I grado - Classe III

D22. Scrivi la formula che esprime il perimetro *p* del triangolo isoscele in figura in funzione di *a*.



$p =$ ....

Soluzione INVALSI: p = 2a + 3

Commento
Si richiede di passare da una rappresentazione geometrica alla rappresentazione algebrica del perimetro di un triangolo.

a.s. 2010/2011 - Domanda D26
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D26. **Nelle prime due colonne di un foglio elettronico sono state calcolate alcune coppie di valori (x, y) di una funzione.**

	A x	B y	C
◆			
1	1	0	
2	2	1	
3	5	2	
4	10	3	
5	17	4	
6	26	5	
7	37	6	
8			
9			
10			
11			

Quale tra le seguenti è la funzione di cui sono stati calcolati i valori (x, y)?

☐ A. $y = \sqrt{x} - 1$

☐ B. $y = \sqrt{x + 1}$

☐ C. $y = \sqrt{x - 1}$

☐ D. $y = 1 + \sqrt{x}$

Soluzione INVALSI: C

Commento

L'unica opzione possibile è la C. Infatti l'equazione $y = \sqrt{x - 1}$ è soddisfatta da tutte le coppie della tabella. potrebbe anche osservare che i valori della x diminuiti di 1 sono quadrati perfetti e quindi l'opzione C è l'unica corretta.

Per rispondere alla domanda lo studente deve essere in grado di effettuare conversioni tra due diversi registri di rappresentazione di una funzione: quello numerico, fornito mediante la tabella, e quello simbolico, fornito mediante la formula. In particolare può limitarsi a sostituire, nelle formule date nelle varie opzioni, i valori numerici forniti nella tabella per riconoscere la scrittura simbolica che rappresenta correttamente i valori della tabella.

a.s. 2011/2012 - Domanda D2

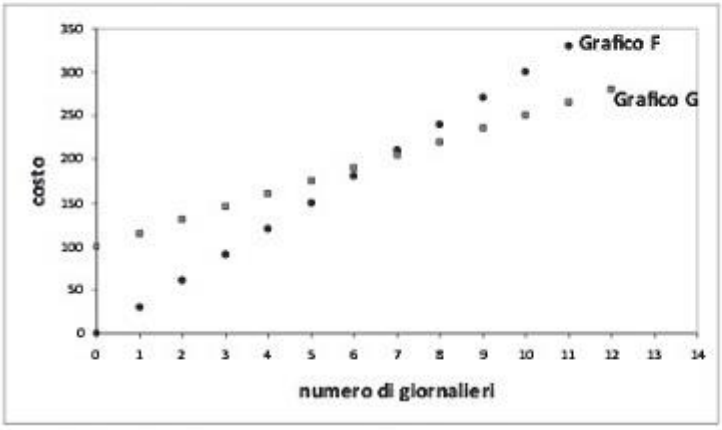
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D2. Mario va in vacanza in una località sciistica. Per usufruire degli impianti di risalita (seggiovie, funivie, ...), può scegliere tra due offerte, A e B, entrambe valide per tutta la stagione invernale.

Offerta A: costo iniziale fisso di 100 euro più 15 euro per ogni giornaliero (ossia per ogni giorno in cui si usano gli impianti di risalita).

Offerta B: 30 euro per ogni giornaliero, senza costo iniziale.

Osserva la seguente figura.



a. Quale, fra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A?

A. ☐ Il grafico F

B. ☐ Il grafico G

b. Completa la seguente tabella, relativa all'offerta B.

Numero di giorni in cui Mario usufruisce degli impianti di risalita	Costo in euro
1	30
2	....
3	....

c. Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?

Risposta: ....

d. Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B, che esprimano il costo c al variare del numero di giornalieri g.

Offerta A: c = ...

Offerta B: c = ...

e. Qual è il numero di giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A?

Risposta: ....

Soluzione INVALSI:

a. a) Quale, tra i grafici F e G, rappresenta l'offerta A?

B. Il grafico G

b. Completa la seguente tabella relativa all'offerta B

(2, 60) ; (3, 90)

c. Se Mario usa gli impianti di risalita solo per cinque giorni durante la stagione invernale, quale offerta gli conviene scegliere?

Risposta: B

d. Scrivi due formule, una per l'offerta A e una per l'offerta B che esprimano il costo c al variare del numero di giornalieri g.

Offerta A: $c=100+15g$

Offerta B: $c=30g$

e. Qual è il numero di giornalieri per cui il costo dell'offerta B è una volta e mezza il costo dell'offerta A?

Risposta: 20

Commento
Item **a**. È sufficiente notare che il grafico F passa per l'origine degli assi e quindi non può rappresentare l'offerta A, che ha un costo iniziale fisso di 100 euro. L'abilità testata riguarda quindi la capacità di leggere un grafico; non è necessario, né utile, l'uso di un registro simbolico per rispondere.

Item **b**. Anche in questo caso non è necessario, né utile, il passaggio al registro simbolico: la risposta può essere data lavorando esclusivamente nel registro numerico.

Item **c**. La risposta può essere data osservando attentamente i due grafici forniti: è immediato notare che, nel caso di 5 giornalieri, il costo (rappresentato dall'ordinata dei corrispondenti punti dei grafici F e G) è minore nel caso del grafico F che rappresenta l'offerta B.
La risposta può essere fornita anche lavorando nel registro puramente numerico, completando due tabelle fino a 5 giornalieri.
Anche in questo caso, quindi, non è necessario, né utile, il ricorso al registro simbolico.

Item **d**. In questo caso si richiede il passaggio al registro simbolico, che dovrebbe essere favorito dalla precedente attività.

Item **e**. Gli studenti potrebbero rispondere lavorando esclusivamente nel registro numerico, completando due tabelle, una per l'offerta A e una per l'offerta B, fino a ottenere un numero di giornalieri (20) per cui il costo dell'offerta B diventa una volta e mezza il costo dell'offerta A. Naturalmente l'uso di un registro simbolico e la capacità di lavorare in tale registro, semplificano notevolmente la risposta. Nel loro complesso gli item della D2 sono tesi a saggiare competenze di trattamento, ossia lavoro all'interno di uno stesso registro di rappresentazione (numerico, grafico o simbolico) e competenze di conversione ossia di passaggio da un registro di rappresentazione a un altro. Ci si aspetta che il lavoro all'interno dei registri grafico e numerico, opportuno nei primi item, favorisca il passaggio al registro simbolico, richiesto nell'item **e** e il successivo trattamento nel registro simbolico opportuno per rispondere velocemente all'item **e**.

Descrizione attività

Primo esempio raccolta di dati e costruzione di tabella

Fase 1

L'insegnante può invitare gli studenti a effettuare alcune ricerche in rete relative a un fenomeno che varia nel tempo (disoccupazione, prezzi di un determinato bene, flussi di popolazioni, ...), oppure cogliere l'occasione di tabelle presenti su un quotidiano che ha portato in classe per presentare i primi esempi di funzione.

Ecco, a titolo di semplice esempio, alcuni dati che riportano la variazione dei prezzi di alcuni beni nel tempo raccolti ogni cinque anni, dal 1950 al 2000. Si noti che i prezzi sono riportati tutti in lire: gli studenti a cui è stata proposta questa attività hanno scelto di non convertire i prezzi in euro.

Anno	1 quotidiano	1 kg di pane	1 kg di carne	1 l. di benzina	1 gr di oro
1950	20	105	805	116	918
1955	25	150	1200	138	721
1960	30	140	1400	120	835
1965	50	170	1900	120	870
1970	70	230	2100	160	1022
1975	150	450	4500	305	5440
1980	300	850	7600	850	10700
1985	650	1200	11000	1329	11800
1990	1200	1500	16000	1500	13800
1995	1600	1888	16940	1735	22450
2000	1620	2120	17300	2069	18046

Tabella 1

La tabella descrive la variazione dei prezzi relativi a cinque beni nel tempo. Si tratta, quindi, di rappresentazioni in tabella di 5 funzioni.

Fase 2

L'insegnante suggerisce di costruire cinque tabelle ciascuna costituita da due colonne, la prima delle quali riporti i dati relativi agli **anni** e la seconda i dati relativi ai **prezzi** di uno dei beni considerati.

In questo modo risulta più agevole evidenziare la variabile indipendente, la variabile dipendente e gli insiemi su cui variano.

Fase 3

L'insegnante chiede agli studenti di rappresentare **graficamente** le varie funzioni, utilizzando la carta e la matita o anche ricorrendo a un software adeguato, come per esempio un foglio elettronico. Può essere interessante vedere se gli studenti scelgano di unire i punti relativi alle coppie (anno, prezzo) per evidenziare la modalità di variazione dei prezzi, oppure scelgano una rappresentazione per punti che rispetti maggiormente il carattere di variazione discreta del fenomeno.

I successivi grafici (figure 1 e 2) si riferiscono alla variazione del prezzo del quotidiano in funzione del tempo e analoghi grafici dovrebbero essere effettuati per la variazione nel tempo dei prezzi di tutti beni considerati):

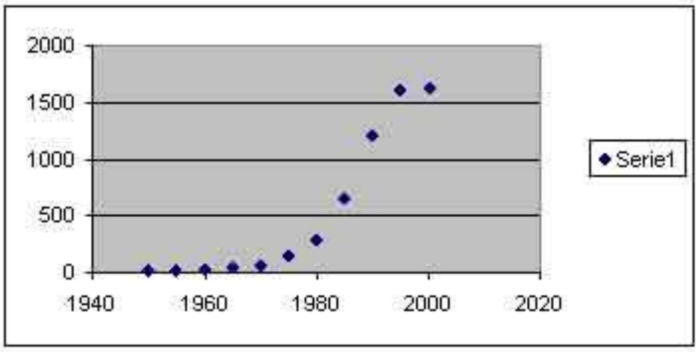


Figura 1

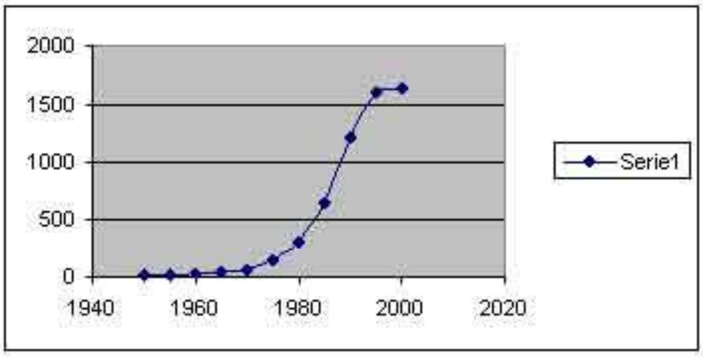


Figura 2

I limiti e le potenzialità dei due tipi di rappresentazione potrebbero costituire un'occasione di discussione in classe, evitando considerazioni raffinate sui punti di vista "discreto" e "continuo" per descrivere e analizzare fenomeni, che sarebbero eccessivamente avanzate per studenti di un primo anno di scuola secondaria di secondo grado.

Fase 4

L'insegnante dovrebbe iniziare a discutere con gli studenti i differenti tipi di andamenti dei vari grafici che si evidenziano soprattutto in quelli in cui si è scelto di unire i punti con linee continue.
In particolare l'insegnante dovrebbe insegnare agli studenti a:

- **individuare gli intervalli di crescenza e decrescenza;**
- **individuare i diversi modi di crescenza/decrescenza** (sempre più/sempre meno/costantemente), ossia la **concavità**.

Questa potrebbe essere anche l'occasione per introdurre la tecnica delle differenze finite: se la variabile indipendente varia con passo costante, come in questo caso, il segno delle differenze fra i successivi valori della variabile dipendente (differenze prime) e il segno delle differenze fra i successivi valori della tabella delle differenze prime (differenze seconde) forniscono, rispettivamente, la **crescenza** e la **concavità** della funzione descritta dalla tabella.

In particolare, differenze prime positive (negative) indicano che la funzione è crescente (decrescente); differenze seconde positive (negative) indicano che la funzione rivolge la concavità verso l'altro (verso il basso).

Nel caso della tabella 2, relativa alla variazione del prezzo del quotidiano nel tempo abbiamo:

Anno	Prezzo quotidiano	Differenze prime	Differenze seconde
1950	20	5	0
1955	25	5	15
1960	30	20	0
1965	50	20	60
1970	70	80	70
1975	150	150	200
1980	300	350	200
1985	650	550	-150
1990	1200	400	-380
1995	1600	20	
2000	1620		

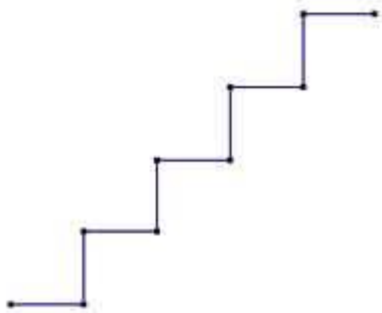
Tabella 2

La positività delle differenze prime indica che la funzione cresce su tutto l'intervallo [1950; 2000]. Differenze seconde uguali a 0 indicano un crescita lineare; differenze seconde positive indicano che la funzione cresce sempre più (concavità rivolta verso l'alto); differenze seconde negative indicano che la funzione cresce sempre meno (concavità rivolta verso il basso).

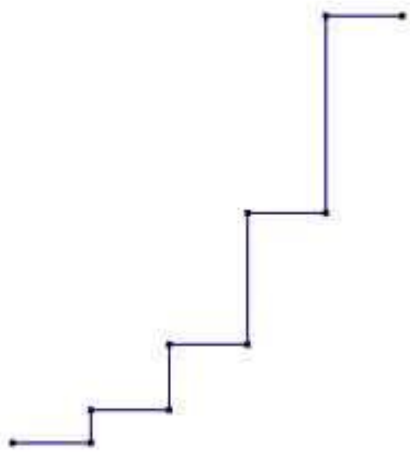
Naturalmente l'insegnante potrà accennare al fatto che la tabella raccoglie un **insieme finito di dati** e di limiti, quindi, di considerare la variabile indipendente come una variabile che varia con continuità e di congiungere con tratti continui i vari punti del grafico.

Fase 5

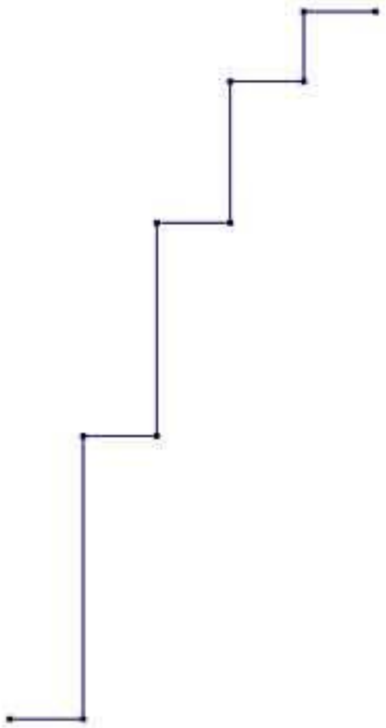
Un utile momento di riflessione sulla tecnica delle differenze finite e sul suo consolidamento potrebbe essere fornito da una lezione di **sistemazione** in cui l'insegnante potrebbe utilizzare la metafora della "scala a scalini di uguale base" (di profondità costante), qui suggerita dalle figure e dalle relative didascalie.



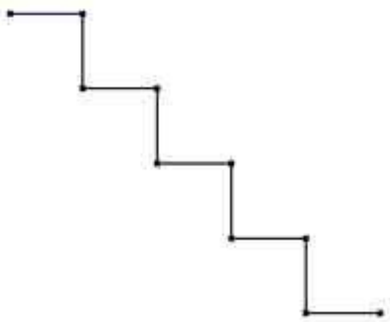
Scalini di altezza costante: crescita costante (lineare)



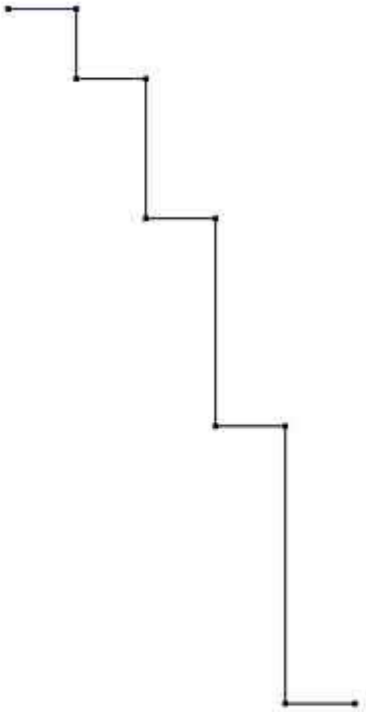
Scalini di altezza crescente: la funzione cresce sempre di più (rivolge la concavità verso l'alto)



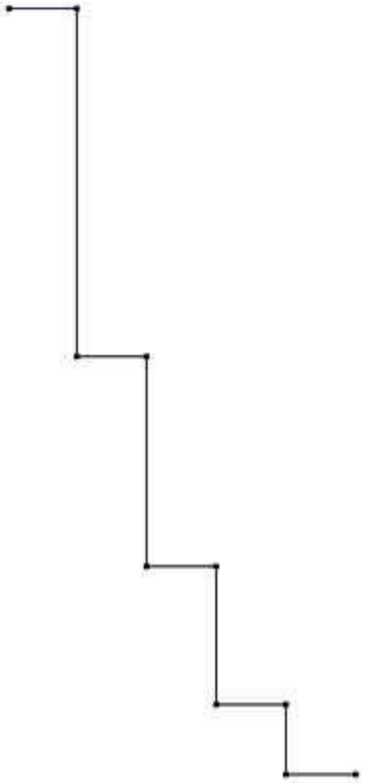
Scalini di altezza decrescente: la funzione cresce sempre meno (rivolge la concavità verso il basso)



Scalini di altezza costante: decrescita lineare



Scalini di altezza crescente: la funzione decresce sempre più (rivolge la concavità verso il basso)



Scalini di altezza decrescente: la funzione decresce sempre meno (rivolge la concavità verso l'alto)

Verso convenzionale di percorrenza della scala (in discesa: funzioni decrescenti)

Fase 6
Questo primo esempio di attività può completarsi proponendo l'analisi di una tabella in cui la variabile indipendente (il tempo, in anni) non varia più con passo costante.

Nella tabella 3, come si vede, i primi dati variano di 5 anni in 5 anni, mentre gli ultimi (dal 2000 al 2005) variano annualmente[1]

Anno	1 quotidiano	1 kg di pane	1 kg di carne	1 l. di benzina	1 gr di oro
1950	20	105	805	116	918
1955	25	150	1200	138	721
1960	30	140	1400	120	835
1965	50	170	1900	120	870
1970	70	230	2100	160	1022
1975	150	450	4500	305	5440
1980	300	850	7600	850	10700
1985	650	1200	11000	1329	11800
1990	1200	1500	16000	1500	13800
1995	1600	1888	16940	1735	22450
2000	1620	2120	17300	2069	18046
2001	1650	2217	17800	2030	18859
2002	1885	2281	18300	1975	20428
2003	1900	2338	18900	2005	20002
2004	1910	2420	19380	2131	20486
2005	1936	2455	19700	2325	29044

Tabella 3

Quando la variabile indipendente non varia con passo costante, in generale le differenze finite non possono dare informazioni sul come cresce la funzione (ossia sulla sua concavità). L'insegnante dovrebbe, quindi, cogliere l'occasione per introdurre il concetto di pendenza di un segmento[2] come rapporto fra incrementi

[1] Anche i prezzi dal 2000 al 2005 sono stati trasformati in lire, per omogeneità rispetto ai precedenti; l'insegnante potrebbe richiedere agli studenti di trasformare tutto in euro, evidenziando la legge di proporzionalità diretta che lega le due unità di prezzo coinvolte in questa trasformazione, magari cogliendo anche l'occasione di introdurre all'uso delle formule in un foglio elettronico quegli studenti che non le avessero mai utilizzate.
[2] Anche i prezzi dal 2000 al 2005 sono stati trasformati in lire, per omogeneità rispetto ai precedenti; l'insegnante potrebbe richiedere agli studenti di trasformare tutto in euro, evidenziando la legge di proporzionalità diretta che lega le due unità di prezzo coinvolte in

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(al denominatore l'incremento della variabile indipendente e al numeratore il relativo incremento della variabile dipendente).

Secondo esempio: la variazione della quantità d'aria nei polmoni

Nel precedente esempio il concetto di funzione è stato introdotto utilizzando soprattutto i **registri numerico e grafico** e accennando, mediante la tecnica delle differenze finite e la definizione di pendenza, ad alcuni aspetti di carattere algebrico-simbolico.
L'esempio di approccio che proponiamo ora fa esclusivo uso del **registro grafico**, anche se, nel caso in cui la scuola possedesse strumenti adeguati, potrebbe essere sviluppato anche il registro numerico.

Fase 1

L'insegnante propone la seguente attività a coppie o piccoli gruppi di studenti.
Inspirate ed espirate con regolarità più volte per circa 1 minuto. Che tipo di grafico può rappresentare a vostro avviso la variazione della quantità d'aria presente nei polmoni nel minuto appena trascorso? Giustificate la risposta e poi confrontatela nel piccolo gruppo di lavoro con quelle date dai vostri compagni.

Cercate, se possibile, di arrivare a un grafico condiviso, in modo da presentarlo poi all'insegnante durante la discussione collettiva. Se non riuscite a raggiungere un accordo, cercate di individuare i principali motivi e punti di disaccordo.

Nella discussione collettiva che segue, l'insegnante dovrà avere cura di evidenziare limiti e potenzialità delle proposte dei diversi gruppi.

In particolare dovrà invitare gli studenti a descrivere, spiegare e giustificare i grafici proposti, prestando particolare attenzione alle **argomentazioni degli studenti**, alla loro **plausibilità**, alla **pertinenza**, alla r**icchezza** e **correttezza del linguaggio** utilizzato.
Si tratta di osservazioni molto importanti per ottenere informazioni sul livello iniziale degli studenti nei primi giorni di scuola secondaria di secondo grado e, più in generale, sull'argomento "funzioni" che, anche se non esplicitamente, è già stato affrontato nei precedenti anni di studio.

Fase 2

Respirate a fondo e trattenete per circa cinque - dieci secondi l'aria nei polmoni. Poi espirate velocemente. Che tipo di grafico può rappresentare a vostro avviso la variazione della quantità d'aria presente nei polmoni nell'attività appena svolta?

Giustificate la risposta e poi confrontatela nel piccolo gruppo di lavoro con quelle date dai vostri compagni. Cercate, se possibile, di arrivare a un grafico condiviso, in modo da presentarlo poi all'insegnante durante la discussione collettiva. Se non riuscite a raggiungere un accordo, cercate di individuare i principali motivi e punti di disaccordo.

---

questa trasformazione, magari cogliendo anche l'occasione di introdurre all'uso delle formule in un foglio elettronico quegli studenti che non le avessero mai utilizzate.

La discussione che segue avrà cura di evidenziare le differenze rispetto alla situazione precedente in termini di grafici proposti. Si tratta di un'occasione utile a iniziare a caratterizzare alcune proprietà dei grafici disegnati: la crescenza e la concavità. L'insegnante potrebbe limitarsi a parlare di **funzioni crescenti**, **decrescenti e costanti** e a utilizzare i termini "gradualmente", "sempre più", "sempre meno" in riferimento alla crescenza o decrescenza dei grafici (magari suggerendo la metafora della "scala a scalini di uguale base" presentata nell'esempio trattato in precedenza).

Fase 3

L'insegnante traccia alla lavagna alcuni grafici.
Ciascun gruppo deve dare l'incarico a un suo componente di riprodurre una modalità di respirazione che dia luogo a una variazione della quantità d'aria presente nei polmoni, ben rappresentata dal grafico preso in considerazione.

Terzo esempio: movimento e sensori di movimento

Questo esempio vorrebbe suggerire due modalità per superare due limiti che potrebbero caratterizzare un'introduzione del tipo di quella suggerita nel secondo esempio:

- **il lavorare solo nel registro grafico**;
- l'**impossibilità**, in assenza di un'adeguata strumentazione, **a verificare l'adeguatezza dei grafici proposti con una misura**.

In realtà anche in questo caso si richiede la presenza a scuola di strumenti:**i sensori di movimento**. Però, nonostante la loro presenza nei laboratori scolastici non sia garantita, dovrebbe essere maggiormente diffusa rispetto alla presenza di strumenti che misurano la quantità d'aria nei polmoni.

Fase 1
Si suddividono gli studenti in piccoli gruppi.

A turno, ciascun coordinatore di ogni gruppo dovrà muoversi rispetto a un sensore, osservando la traccia del proprio movimento visualizzata su un muro dell'aula attraverso un videoproiettore o una LIM collegati a una calcolatrice o a un pc in grado di rilevare i dati (tempo, posizione).

La consegna prevede che anche gli altri studenti osservino attentamente, dal proprio banco, il movimento dei coordinatori e la traccia descritta sul muro dell'aula.

Fase 2
Gli studenti si riuniscono nei gruppi di lavoro per riflettere e discutere su quanto hanno fatto o visto fare durante la fase 1.
Devono avanzare **ipotesi** (o confrontare quelle eventualmente già pensate individualmente durante la precedente attività) sul come e perché il movimento sia legato al grafico osservato sul muro.

Fase 3

A turno, tutti gli alunni che nella prima attività si sono limitati semplicemente a osservare il movimento dei coordinatori dei gruppi di lavoro, sono chiamati a compiere essi stessi il movimento.

Inizialmente, però il videoproiettore o la LIM vengono spenti: tutti gli studenti devono disegnare un **grafico tempo – posizione** che rappresenti il movimento.

Alla fine del movimento, il videoproiettore o la LIM vengono riaccesi, in modo che gli studenti possano confrontare la traccia disegnata sul muro con il grafico tempo-posizione disegnato sul foglio.

Fase 4
Gli studenti si riuniscono nuovamente in gruppi di lavoro per rispondere a domande specifiche riguardanti l'interpretazione di alcune caratteristiche grafiche delle tracce osservate sul muro (per esempio devono spiegare che cosa suggeriscono un segmento orizzontale, uno obliquo, oppure un tratto di curva e così via...)

Fase 5
A turno, tutti gli studenti devono cercare di riprodurre, con il proprio movimento, un grafico tempo-posizione disegnato alla lavagna dall'insegnante o, nel caso si dispongano di adeguate calcolatrici, generato automaticamente dalla calcolatrice.

Fase 6
A turno, ciascun coordinatore si muove e i compagni di gruppo riportano, sul proprio quaderno, la traccia proiettata sul muro durante il **movimento del coordinatore**.

Al termine del movimento, il coordinatore, utilizzando una specifica funzione fornita dalla calcolatrice, rileva un certo numero di coppie di dati "tempo-posizione". I dati i raccolti sono elaborati in classe dagli studenti, con l'aiuto l'insegnante, in successive lezioni.

Questa attività ha lo scopo di avviare un lavoro nel registro numerico e di introdurre ciò che è necessario per definire il concetto di pendenza; si dovrebbe arrivare a far notare che in un grafico posizione - tempo la velocità media è la pendenza del segmento congiungente due coppie di punti (tempo, posizione).

Quarto esempio: diversi tipi di crescenza con carta e matita

Questo esempio propone un'attività non legata all'uso delle tecnologie di calcolo automatico, anche per questo motivo risulta forse più consonante con la prassi didattica legata all'introduzione delle funzioni.

Fase 1

L'insegnante può suggerire agli studenti di considerare le seguenti grandezze:
- il **perimetro dei quadrati di lato variabile *x***;
- l'**area dei quadrati di lato variabile *x***;
- il **lato dei quadrati di area variabile *x***.

La richiesta di considerare queste grandezze, dovrebbe impegnare gli studenti a descrivere se perimetro, area e lato crescono o decrescono (e come) al variare della variabile indipendente *x*.

Non è detto che sia scontato che gli studenti capiscano subito quello che l'insegnante si aspetta. Deve quindi essere preoccupazione specifica dell'insegnante insistere sul fatto che, nell'ambito delle funzioni di una variabile, "considerare" o "studiare" la variazione di una grandezza vuol dire:

- individuare **una variabile dipendente**, **una indipendente** e una **relazione funzionale** che lega la variabile dipendente a quella indipendente;
- spiegare, utilizzando se possibile differenti **forme di rappresentazione** (numerica, grafica e simbolica), se la funzione individuata cresce o decresce e *come* cresce e o decresce (ossia, in termini matematici "adulti", crescenza e concavità).

Fase 2

Se gli studenti comprendono questa consegna, hanno a disposizione, per descrivere la variazione delle grandezze oggetto di studio (perimetro, area e lato) **tabelle numeriche** (da studiare con la tecnica delle differenze finite, che può essere introdotta proprio nel modo già suggerito nel primo esempio come strumento di studio delle grandezze variabili), **grafici** associati alle tabelle e **formule** che, in questo caso sono relativamente semplici.

L'insegnante potrà far lavorare gli studenti individualmente o in piccoli gruppi e dovrebbe intervenire in zona di sviluppo prossimale per aiutare studenti o gruppi di essi che dovessero eventualmente rimanere bloccati. Per esempio l'insegnante potrà suggerire di costruire tabelle, di riportare su un piano cartesiano i dati raccolti in tabella, di calcolare e studiare le differenze prime e seconde e anche di descrivere sinteticamente i dati raccolti in tabella con una formula, come suggerito, dalle figure 7, 8,9 e relative didascalie:

lato	**perimetro**	**differenze prime**						
0,5	2	2						
1	4	2						
1,5	6	2						
2	8	2						
2,5	10	2						
3	12	2						
3,5	14	2						
4	16	2						
4,5	18	2						
5	20	2						
5,5	22	2						

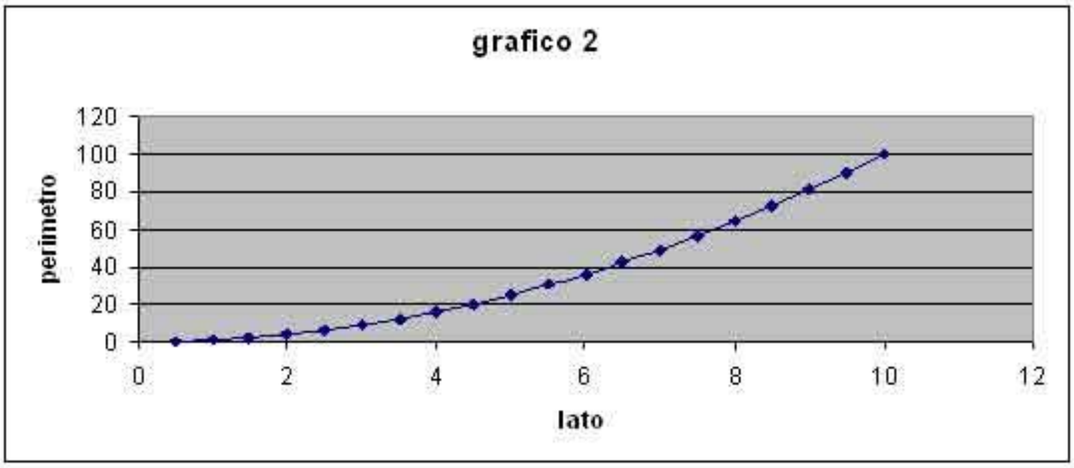
6	24	2						
6,5	26	2						
7	28	2						
7,5	30	2						
8	32	2						
8,5	34	2						
9	36	2						
9,5	38	2						
10	40							

Figura 7

Formula: *y*= 4*x* variazione del perimetro *y* al variare del lato *x*. La funzione "cresce costantemente (linearmente)".

lato	**area**	**differenze prime**	**differenze seconde**				
0,5	0,25	0,75	0,5				
1	1	1,25	0,5				
1,5	2,25	1,75	0,5				
2	4	2,25	0,5				
2,5	6,25	2,75	0,5				
3	9	3,25	0,5				
3,5	12,25	3,75	0,5				
4	16	4,25	0,5				
4,5	20,25	4,75	0,5				
5	25	5,25	0,5				
5,5	30,25	5,75	0,5				
6	36	6,25	0,5				
6,5	42,25	6,75	0,5				
7	49	7,25	0,5				
7,5	56,25	7,75	0,5				
8	64	8,25	0,5				
8,5	72,25	8,75	0,5				
9	81	9,25	0,5				

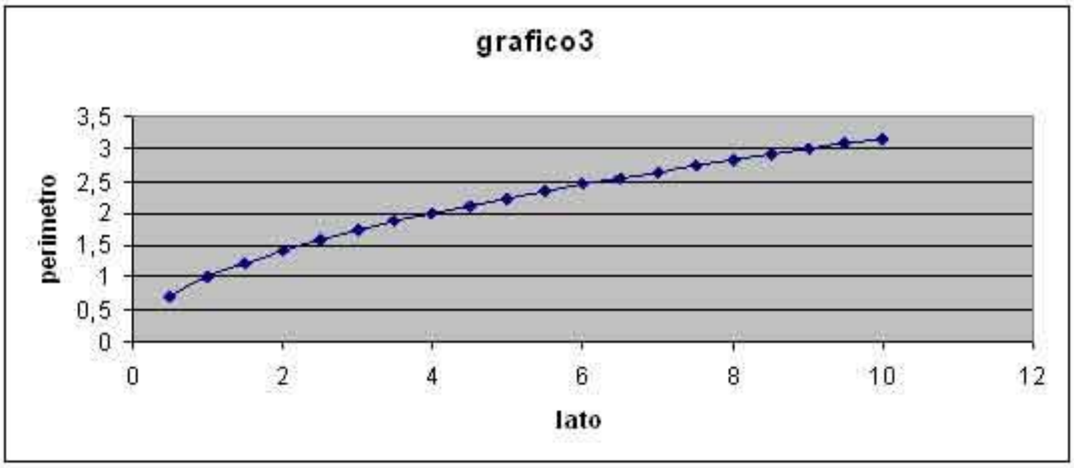
9,5	90,25	9,75					
10	100						



Formula: $y = x^2$: variazione dell'area y al variare del lato x. La funzione "cresce sempre più". Figura 8

area	**lato**	**differenze prime**	**differenze seconde**	
0,5	0,707107	0,292893219	-0,068148347	
1	1	0,224744871	-0,03527618	
1,5	1,224745	0,189468691	-0,022543423	
2	1,414214	0,166925268	-0,01601329	
2,5	1,581139	0,150911977	-0,012134092	
3	1,732051	0,138777886	-0,009606579	
3,5	1,870829	0,129171307	-0,007850963	
4	2	0,121320344	-0,00657271	
4,5	2,12132	0,114747634	-0,005607732	
5	2,236068	0,109139902	-0,00485804	
5,5	2,345208	0,104281863	-0,004261849	
6	2,44949	0,100020014	-0,00377846	
6,5	2,54951	0,096241554	-0,003380078	

7	2,645751	0,092861476	-0,003047139	
7,5	2,738613	0,089814337	-0,002765515	
8	2,828427	0,087048823	-0,00252477	
8,5	2,915476	0,084524053	-0,002317051	
9	3	0,082207001	-0,002136343	
9,5	3,082207	0,080070659		
10	3,162278			



Formula: $y = \sqrt{x}$: variazione del lato *y* al variare dell'area *x*. La funzione "cresce sempre meno".
Figura 9

Indicazioni metodologiche

Le indicazioni metodologiche più significative che pensiamo sia importante ribadire sono le seguenti:

- gli esempi di introduzione al concetto di funzione dovrebbero proporsi l'obiettivo di far capire che studiare come varia una grandezza vuol dire precisare **se cresce o decresce e come cresce o decresce**;

- nella presentazione e proposta degli esempi l'insegnante dovrà avere cura di proporre **diverse rappresentazioni** (numeriche, grafiche e simboliche) delle funzioni studiate, in modo da minimizzare il rischio che gli studenti confondano una delle possibili rappresentazioni con l'oggetto funzione;

- la definizione di funzione come particolare sottoinsieme del prodotto cartesiano dovrebbe essere un punto di arrivo a lungo termine: **le radici cognitive** (ma anche epistemologiche) del concetto di funzione si trovano nel movimento, e, più in generale, nello studio di grandezze che variano nel tempo.

- nei primi approcci al concetto di funzione discreto e continuo dovrebbero essere considerati un po' come due differenti "punti di vista taciti" per descrivere, rappresentare e analizzare fenomeni. Gradualmente, con l'arricchirsi e il consolidarsi dell'esperienza, l'insegnante potrà avviare una riflessione su limiti e potenzialità di questi due differenti punti di vista, approfondendone anche i risvolti interni alla matematica e alla sua storia, soprattutto per gli studenti più coinvolti e motivati;

- la tecnica delle **differenze finite**, per poter diventare parte di quel bagaglio di tecniche naturalmente utilizzate dagli studenti per lo studio delle variazioni delle grandezze, avrà bisogno di tanti altri momenti di applicazione e riflessione, che possono proseguire direttamente negli esempi di attività proposti, per esempio con la descrizione e lo studio della variazione dei prezzi nel tempo degli altri beni rappresentati nella tabella 1, sia in altre attività di ricerca, descrizione e analisi di tabelle di dati e grafici tratti da quotidiani, riviste e dalla rete;

- l'occasione di parlare di **pendenza** anche in contesti non geometrici è particolarmente significativa, perché consente di minimizzare il rischio che tale concetto venga confuso con quello geometrico di inclinazione e quindi di angolo: il concetto di pendenza viene utilizzato anche in ambiti non geometrici, per esempio nel rapporto di grandezze di differenti unità di misura come nell'esempio qui considerato. Si noti che, nei casi in cui le variabili dipendenti e indipendenti sono grandezze fisiche non omogenee, non ha più molto senso parlare di concetti metrici nel piano cartesiano utilizzato come sistema di riferimento per la rappresentazione dei grafici: l'identificazione della pendenza con il coefficiente angolare può essere fuorviante;

- i vantaggi di introdurre il concetto di funzione con l'esempio 2, invece che con gli altri proposti in questa attività, consistono essenzialmente nella **semplicità della proposta** e nel fatto che essa richiede solamente ragionamenti di tipo qualitativo nel registro grafico. Uno dei vantaggi (il limitarsi al registro grafico) può essere al tempo stesso un limite: se non si presta particolare attenzione e non si propongono esempi che lavorano anche su rappresentazioni numeriche e simboliche, si rischia che lo studente confonda l'oggetto funzione con un sua rappresentazione: il grafico. Un altro svantaggio consiste nel fatto che gli studenti, a meno che la scuola non sia dotata di un'adeguata strumentazione, non possono raccogliere dati: l'adeguatezza dei dati proposti non è quindi verificabile mediante uno strumento di misura, ma viene sancita dall'autorità dell'insegnante. Questo limite può essere trasformato in ricchezza se l'insegnante riuscirà a trovare argomentazioni adeguate, pertinenti, convincenti, ragionevoli in modo tale da riuscire a spiegare perché alcuni grafici proposti sono plausibili e altri non sono invece accettabili;

- l'attività con i sensori descritta nel terzo esempio è particolarmente ricca di informazioni per l'insegnante: ci sono studenti che dimostrano un'abilità sorprendente nel seguire la traccia del grafico generato dalla calcolatrice o proposto alla lavagna, mentre hanno enormi difficoltà a usare un linguaggio adeguato per collegare le proprietà del grafico alle caratteristiche del movimento effettuato. Un'altra osservazione molto interessante, quando si usano calcolatrici che generano grafici, riguarda gli studenti che sbagliano il punto di partenza, o meglio la distanza dal sensore: alcuni di essi tentando di recuperare subito la distanza corretta dal sensore introducendo però errori notevoli sulla forma del grafico (in particolare la crescenza/decrescenza e la concavità). Altri studenti hanno una reazione molto più composta e non si preoccupano di recuperare la posizione corretta, ma prestano attenzione a muoversi in modo tale che il grafico, pur distinto da quello generato dalla calcolatrice, sia il più possibile simile (per quel che riguarda crescenza e concavità) a quello generato dalla calcolatrice[3].

Spunti per un approfondimento disciplinare

Effettuare e comunicare chiaramente come si comporta una successione al crescere di *n* (per esempio considerando via via i successivi termini, le loro differenze prime e seconde, i loro rapporti) è un'attività che coinvolge molte competenze importanti per una formazione matematica significativa degli studenti. Richiede e consente di consolidare, infatti, **abilità relative all'uso del linguaggio**, all'**osservazione di regolarità**, alla **produzione e validazione di congetture**, **all'uso di differenti forme di rappresentazione di grandezze che variano**.

Per quel che riguarda l'esempio in cui sono stati utilizzati i sensori di movimento, un possibile approfondimento potrebbe essere costituito dalla seguente attività (una sorta di fase 7, successiva alla fase 6 con cui si concludeva l'esempio).

[3] Anche i prezzi dal 2000 al 2005 sono stati trasformati in lire, per omogeneità rispetto ai precedenti; l'insegnante potrebbe richiedere agli studenti di trasformare tutto in euro, evidenziando la legge di proporzionalità diretta che lega le due unità di prezzo coinvolte in questa trasformazione, magari cogliendo anche l'occasione di introdurre all'uso delle formule in un foglio elettronico quegli studenti che non le avessero mai utilizzate.

Fase 7
L'insegnante chiede a uno studente di muoversi rispetto al sensore e poi chiede agli studenti di pensare a un possibile grafico che descriva non la variazione della posizione rispetto al tempo, ma della **velocità** rispetto al **tempo**. L'insegnante osserva le reazioni degli studenti, ma non dà risposte (eventualmente propone il grafico dato dalla calcolatrice, ma precisa che si tratta di un argomento che andrà necessariamente ripreso con calma e che è prematuro tentare di sistematizzare)

Un'altra possibile attività di approfondimento, molto più strutturata, è quella che viene presentata successivamente con il titolo "confrontare diversi tipi di crescita". Essa propone un'attività simile a una proposta nel nucleo geometria. Il problema è dello stesso tipo, ma i dati e l'attenzione agli aspetti funzionali cambiano leggermente.

Tale attività può anche essere un'occasione per introdurre la differenza tra **crescite polinomiali** (una crescita è polinomiale di grado *n* se e solo se la successione delle sue differenze finite di grado *n* è costante) ed **esponenziali** (una crescita è esponenziale se e solo se la successione dei rapporti fra le coppie di suoi termini consecutivi è costante).

Altre attività del nucleo concettuale, "Relazioni e funzioni", in particolare "Concentrazione di un medicinale", consentiranno di riprendere e approfondire in modo più sistematico quanto eventualmente introdotto con questa attività.

Confrontare diversi tipi di crescita (approfondimento)

Il contesto in cui si situa questo esempio è quello più tradizionale delle **figure geometriche**. L'utilizzazione di uno strumento di rappresentazione grafica e di calcolo automatico, unito a un uso iniziale delle sole carta e matita, può essere particolarmente utile a rendere più significative le esperienze matematiche degli studenti.

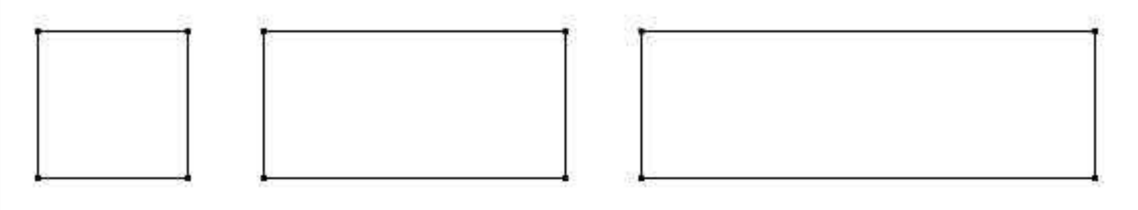
Il problema proposto consente sviluppi interessanti, anche se forse troppo avanzati per un'introduzione al concetto di funzione. Se, però, ci si limita a richiedere una compilazione di tabelle, una rappresentazione grafica dei dati riportati in tabella ed, eventualmente, un primo approccio di tipo algebrico - simbolico, la richiesta può essere adeguata all'età e alla preparazione degli studenti.

In questa attività si utilizza spesso il termine di "**successione**" in luogo di quello di "funzione", perché il dominio della grandezza studiata varia nell'insieme dei numeri naturali. L'insegnante sarà ovviamente libero di introdurre anche questo termine precisando che una successione è una **funzione definita sull'insieme dei numeri naturali**, oppure potrà limitarsi a fare riferimento al termine funzione, rinviando in seguito precisazioni di questo tipo.

Prima fase

L'insegnante propone il problema:

Considerate le seguenti tre successioni a), b) e c) di rettangoli:
a)*l'altezza è fissata e uguale a 1 cm; la base del primo rettangolo misura 1cm, mentre i successivi rettangoli si ottengono aumentando sempre di 1cm la base, come suggeriscono le seguenti figure*:



b)*Il primo rettangolo ha altezza 1 cm e base 0,1 cm; i successivi rettangoli si ottengono aumentando di 0,1 cm sia la base, sia l'altezza, come suggeriscono le seguenti figure*:

c) *il primo rettangolo è un quadrato di base e altezza 0,01 cm; i successivi rettangoli hanno sempre altezza di 0,01 cm, mentre le basi si ottengono raddoppiando la base del precedente rettangolo considerato, come suggeriscono le seguenti figure*:

Che cosa potete dire, in generale, relativamente al tipo di crescita delle aree dei rettangoli di ciascuna successione?
Giustificate le risposte.

L'insegnante invita gli studenti a riflettere individualmente sul problema proposto ricorrendo, per l'approccio risolutivo, solo all'**uso della carta** e della **matita**.

Seconda fase

L'insegnante invita gli studenti a riunirsi in piccoli gruppi per condividere e discutere gli eventuali approcci risolutivi pensati o adottati nella fase di riflessione individuale.

Durante il lavoro nei piccoli gruppi l'insegnante può suggerire a eventuali gruppi di studenti che non hanno idea di come procedere di costruire tre tabelle che rappresentino la **variazione delle aree** delle tre famiglie di rettangoli.

Inizialmente le tabelle potrebbero essere costruite utilizzando solo la carta e la matita; in seguito potrebbe esser utile l'uso di uno strumento di calcolo come un foglio elettronico. Sotto vengono riportati alcuni valori delle tre tabelle utilizzando un foglio elettronico.

Prima famiglia

Altezza	**Base**	**Area**
1	1	1
1	2	2
1	3	3

1	4	4
1	5	5
1	6	6
1	7	7
1	8	8
1	9	9
1	10	10

Seconda famiglia

Altezza	**Base**	**Area**
1	0,1	0,1
1,1	0,2	0,22
1,2	0,3	0,36
1,3	0,4	0,52
1,4	0,5	0,7
1,5	0,6	0,9
1,6	0,7	1,12
1,7	0,8	1,36
1,8	0,9	1,62

Terza famiglia

Altezza	**Base**	**Area**
0,01	0,01	0,0001
0,01	0,02	0,0002
0,01	0,04	0,0004
0,01	0,08	0,0008
0,01	0,16	0,0016
0,01	0,32	0,0032
0,01	0,64	0,0064
0,01	1,28	0,0128
0,01	2,56	0,0256

Come si può immaginare osservando le tre tabelle sopra riportate, se gli studenti si limitano a un calcolo manuale con carta e matita, sono portati a ritenere che le aree dei rettangoli della famiglia 1 saranno sempre maggiori delle aree dei rettangoli delle famiglie 2 e 3.

L'uso di un foglio di calcolo elettronico (se gli studenti non fossero ancora capaci di maneggiare le formule in un foglio elettronico, potrebbe essere questa una buona occasione per iniziare) rivela subito che l'eventuale congettura non regge.

Per visualizzare le tre tabelle e per calcolare su un numero maggiore di valori per le tre successioni, clicca qui.
Osserva anche i fogli elettronici proposti:
Foglio 1
Foglio 2
Foglio 3

Ora è chiaro che la probabile congettura iniziale degli studenti (le aree dei rettangoli della famiglia 1 sono sempre maggiori delle aree dei rettangoli delle famiglie 2 e 3) non regge alla verifica numerica. L'insegnante può cogliere l'occasione per porre una domanda che è di fondamentale importanza e con la quale dovrebbe sistematicamente e ostinatamente "lavorare ai fianchi" gli studenti: **perché**?
La ricerca di risposte alle domande del tipo "*Perché è così*?" consente di precisarne sempre più il senso, che poi, in fondo, è quello di avviare gli studenti alla comprensione del significato e del ruolo del pensiero teorico.

Gli studenti hanno uno strumento per iniziare a dare una riposta a questo *perché*: la **tabella delle differenze**.
La successione delle differenze prime delle aree della prima famiglia di rettangoli è costante, quindi queste aree crescono "costantemente" (gli studenti potrebbero già essere stati messi in grado di utilizzare il termine "**linearmente**").

Per le aree dei rettangoli della seconda famiglia le differenze prime e le differenze seconde sono positive, quindi la successione cresce sempre più. Ciò accade anche per la successione delle aree dei rettangoli della terza famiglia. Quindi anche in questo caso la successione cresce sempre più. L'insegnante, però, potrebbe far notare che, mentre per le aree dei rettangoli della seconda famiglia le differenze seconde sono **costanti** (e quindi le differenze terze e quelle successive sono tutte uguali a 0), per le aree dei rettangoli della terza famiglia le differenze prime (e quindi le seconde e tutte le altre) sono **uguali** ai valori delle aree.

Potrebbe essere l'occasione per caratterizzare la differenza fra le crescite polinomiali e quelle esponenziali (si potrebbe anche fare notare che ciò che rimane costante nel caso delle aree dei rettangoli della terza successione sono i rapporti fra termini consecutivi)

Per conoscere le tabelle delle differenze clicca qui.

L'insegnante se vuole potrebbe utilizzare queste interessanti osservazioni per proporre un primo tentativo di formalizzazione ossia di **scrittura simbolica** dei tre tipi di crescita. Questo compito è molto semplice per il primo tipo di crescita che è descritta dalla scrittura simbolica $y = x$, dove y rappresenta la variabile dipendente "area" e x la variabile indipendente "numero d'ordine del rettangolo".

Un po' più complicata la scrittura simbolica della variazione delle aree della terza famiglia di rettangoli: $y = 2^x$ dove y rappresenta la variabile dipendente "area" e x la variabile indipendente "numero d'ordine del rettangolo".

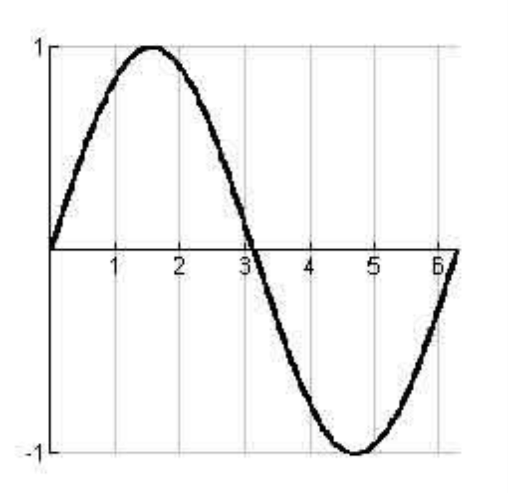
Sicuramente più complicata e forse fuori della portata attuale degli studenti la scrittura della formula che descrive simbolicamente la variazione delle aree dei rettangoli della seconda famiglia: $y = 0{,}01\ x^2 + 0{,}09\ x$, dove y rappresenta la variabile dipendente "area" e x la variabile indipendente "numero d'ordine del rettangolo".

L'insegnante potrebbe anche far notare la differenza con le formule (e con i rispettivi grafici) che si otterrebbero se si scegliesse di considerare come variabile indipendente non il "numero d'ordine del rettangolo", ma, per esempio, scegliendo di esprimere l'area come "base per altezza" e cercando, in particolare per le aree della seconda famiglia di rettangoli, un'unica variabile per rappresentare i valori delle basi e delle altezze.
Considerazioni e osservazioni di questo tipo (che riguardano la scelta più opportuna della variabile indipendente) potrebbero essere premature a questo punto. Sarà, quindi, cura dell'insegnante valutare limiti e potenzialità di questo tipo di considerazioni.

Elementi per prove di verifica

Dal grafico al racconto: leggiamo un grafico

Scrivi un testo che descriva la variazione di una grandezza e che sia coerente con il grafico sotto disegnato.



Dal racconto al grafico: la notte di Martin Fierro

Leggi il seguente testo:

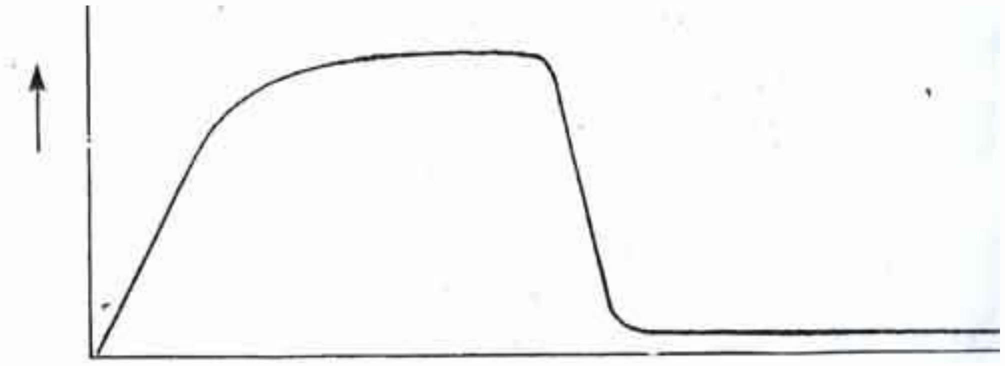
"*Martin Fierro ebbe la spiacevole sensazione di essere seguito. Non gli garbava per niente: era buio pesto e, a parte quella presenza inquietante, sembrava non esserci anima viva nella notte della città. Pensò che non fosse dignitoso mettersi subito a correre, quindi si limitò ad affrettare il passo. Ma quell'altro sembrava fare altrettanto. Così incominciò a correre, sempre più forte, fino a che non arrivò alla massima velocità che poteva mantenere. Era sempre stato un buon atleta e così tenne quell'andatura per circa un minuto. Poi iniziò gradualmente a diminuire la sua velocità* *e, in tre minuti era di nuovo quasi al passo. Dietro di lui solo la notte buia. Che si fosse trattato solo di una semplice, stupida impressione?*".

Disegna un grafico che descriva la variazione della posizione rispetto al tempo di Martin Fierro nell'intervallo di tempo considerato dal testo.

L'hobby di Martin Fierro

Martin Fierro ha un hobby. Il seguente grafico riporta la variazione della velocità nel tempo di Martin mentre svolge un'attività relativa a tale hobby. Di quale hobby potrebbe trattarsi?

(Attenzione: sull'asse delle *y* è riportata la velocità e sull'asse delle *x* il tempo).



L'orario ferroviario
Alternativa A

Si propone agli studenti la seguente scheda di lavoro che richiede prioritariamente una ricerca di dati.

Dall'orario ferroviario scegliere un treno a lunga percorrenza e con molte fermate intermedie.
1.Annotare località di partenza e di destinazione e relativi orari.
2.Annotare località e orari delle fermate intermedie (per semplificare annotare solo l'orario di arrivo).
3.Annotare le distanze tra la stazione di partenza e tutte le stazioni prese in considerazione.
4.Rappresentare la prima e la seconda situazione (tramite tabelle e grafici).
5.Rispondere alle seguenti domande:

- a che ora avverrà il passaggio del treno per una stazione intermedia tra due località di cui si conosce l'orario di arrivo?
- in quale tratto il treno va più veloce?

Alternativa B

In alternativa alla scelta libera del percorso si può proporre agli allievi la seguente situazione già descritta in linguaggio naturale con relative domande.

Il treno Napoli-Milano delle ore 8:00 arriva a Milano alle ore 14:57. Passa per Roma alle ore 9:58 per Chiusi alle ore 11:00; per Firenze alle ore 12:00; per Bologna alle ore 13:05 (orari di arrivo in stazione).
Napoli dista: da Roma Km 214; da Chiusi Km 379; da Firenze Km 525; da Bologna Km 625; da Milano Km 846.

1.Rappresentare la situazione tramite una tabella.
2. Rappresentare graficamente la situazione relativamente alle sole località di arrivo e di partenza.
3.Rappresentare graficamente la situazione relativamente a tutte le stazioni intermedie in tabella.
4.Rispondere alle seguenti domande:

- a che ora avverrà il passaggio del treno per Formia (a 90 km da Napoli)?
- in quale tratto il treno va più veloce?

Per conoscere i cenni di una possibile soluzione e alcune osservazioni per l'insegnante, cliccare qui.

Si propone agli studenti la seguente scheda di lavoro.

Da una relazione della Banca d'Italia del 2004, integrata da rilevazioni dell'ISTAT per il 2005 e 2006, risulta che il tasso di disoccupazione in Italia dal 94 si è così modificato:

	94	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**00**	**01**	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**
Tasso di disoccupazione	10,6	11,2	11,2	11,3	11,3	10,9	10,1	9,1	8,6	8,4	8,0	7,7	7,0

Il tasso di disoccupazione

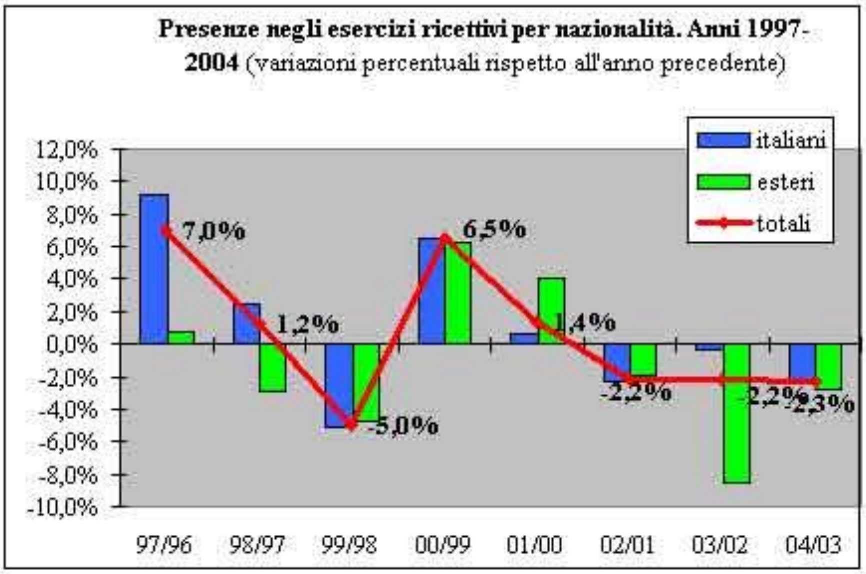
- Rappresenta graficamente i dati della tabella.
- Descrivi attraverso il grafico come varia il tasso anno per anno.
- Aggiungi in tabella una riga che rappresenti le differenze di tasso da un anno all'altro.
- Aggiungi in tabella una riga che rappresenti le variazioni percentuali da un anno all'altro.
- In quale anno c'è la variazione percentuale maggiore (in valore assoluto)?
- Sapresti rappresentare graficamente tale variazione percentuale?
- Quali osservazioni si potrebbero fare analizzando il grafico precedente?

Per conoscere i cenni di una possibile soluzione e alcune osservazioni per l'insegnante, cliccare qui.

Movimento turistico

Si propone agli studenti la seguente scheda di lavoro.

Nelle 2.682 strutture ricettive il bilancio del movimento turistico nella provincia di Rimini dal 96 al 2004 è rappresentato dal grafico che segue:



1.In quale anno c'è stato il maggior incremento percentuale di presenze di turisti italiani?
2.In quale anno c'è stato il maggior decremento percentuale di turisti stranieri?
3.Come interpreti l'ultimo tratto della linea rossa (totali)?
4.Prova a scrivere un breve articolo di giornale che descriva il fenomeno.

Per conoscere i cenni di una possibile soluzione e alcune osservazioni per l'insegnante, cliccare qui.

Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato.doc o in formato.pdf.

Documentazione e materiali
MATERIALI DI SUPPORTO ALL'ATTIVITÀ
Tabelle
Foglio elettronico 1
Foglio elettronico 2
Foglio elettronico 3

MATERIALI PER LE PROVE DI VERIFICA

Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc o in formato .pdf. Possibili soluzioni:file 1, file 2 e file 3.

Bibliografia e sitografia

SITOGRAFIA

www.matematicaerealta.it
Sito curato da Primo Brandi, Angelo Guerraggio e Anna Salvadori, e che propone attività di **innovazione didattica**

che con lo scopo di stimolare l'apprendimento delle applicazioni fondamentali della matematica nel mondo reale, con particolare attenzione alla modellistica matematica e quindi all'uso delle funzioni, utilizzando un linguaggio chiaro, senza perdere in rigore scientifico.

www.matematica.it/paola/Corso di matematica.htm
Sito in cui è possibile trovare materiale sistematico e organizzato, costruito e già sperimentato in classe da Domingo Paola su un approccio allo studio delle grandezze che variano in un biennio di scuola secondaria di secondo grado.

Protocollo di sperimentazione
Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:

individuare i principali **nodi didattici** cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.
Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.

Sperimentare l'unità proposta:

- fare una **ricognizione del contesto scolastico** specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli **adattamenti necessari**;
- formulare il **progetto didattico relativo**;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un **diario di bordo** (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà.
Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.

Scarica la versione cartacea in formato .pdf.