2007-2013
P.O.N. - "Competenze per lo Sviluppo" (FSE)
D.G. Occupazione, Affari Sociali e pari Opportunità
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale
AS agenziascuola

Numeri sulla retta

A cura di Nicoletta Nolli, Silvano Rossetto, Sergio Zoccante

Introduzione

Questa attività è proponibile ad una classe prima, nell'ambito di una sistemazione dei concetti relativi all'ordine e alla densità degli insiemi numerici, e alla compatibilità delle operazioni, in particolare della moltiplicazione, rispetto all'ordine. È nota la difficoltà degli alunni a confrontare correttamente frazioni e numeri decimali, in particolare se questi ultimi sono espressi con un numero diverso di cifre decimali (ad es. 3,2 e 3,12).
Un'altra difficoltà diffusa è inerente alla moltiplicazione tra numeri, che porta a ritenere che in ogni caso il prodotto sia maggiore dei fattori.
L'attività propone una riflessione specifica su questi aspetti, favorendo così la riduzione di misconcetti ed errori.

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 57 del 15/07/2010, Direttiva n. 65 del 09/07/2010) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

<u>Indicazioni Nazionali per i Licei</u>

Linee generali e competenze
Concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:
Costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo.

Obiettivi specifici di apprendimento

Aritmetica e algebra
Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale.
Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta.
Lo studio dei numeri irrazionali fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per affrontare il tema dell'approssimazione.
La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali sia mediante programmi informatici di geometria.

<u>Istituti Tecnici e professionali</u>

Aritmetica e algebra

Conoscenze

- I numeri: naturali, interi, razionali, sotto forma frazionaria e decimale, irrazionali e, in forma intuitiva, reali; ordinamento e loro rappresentazione su una retta. Le operazioni con i numeri interi e razionali e loro proprietà.
- Potenze e radici.
- Approssimazioni.

Abilità

- Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, a macchina) per calcolare espressioni aritmetiche e risolvere problemi.
- Operare con i numeri interi e razionali e valutare l'ordine di grandezza dei risultati.
- Calcolare semplici espressioni con potenze e radicali.
- Utilizzare correttamente il concetto di approssimazione.

Geometria

Conoscenze

Teorema di Talete e sue conseguenze.

Abilità

Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici.

Prove INVALSI

a.s. 2013/2014 - Domanda D24

Scuola secondaria di II grado – Classe II

D24. Se a è un numero reale compreso tra 0 e 1 ($0 < a < 1$), allora

A. ☐ $a < \sqrt{a} < \frac{1}{a} < a^2$

B. ☐ $\frac{1}{a} < \sqrt{a} < a < a^2$

C. ☐ $a^2 < a < \sqrt{a} < \frac{1}{a}$

D. ☐ $\sqrt{a} < a < a^2 < \frac{1}{a}$

Soluzione INVALSI: C

Commento

Spesso gli allievi ricordano il fatto che il prodotto tra due numeri naturali diversi da 0

è maggiore di ciascun fattore e lo estendono impropriamente anche agli altri insiemi numerici. Si stupiscono quindi, ad esempio, che per $0<a<1$, sia a 2 < a, e viceversa $\sqrt{a}>a$, . A volte dimenticano anche il fatto che, se $0<a<1$, allora $1/a>1$.
Tenendo conto di questi fatti, allora il quesito si risolve facilmente per esclusione:
A. , B. e D. vanno esclusi perché per tutti a 2 non è maggiore di a; la risposta è D.

a.s. 2010/2011 - Domanda 15
Scuola secondaria di II grado – Classe II

D15. Dividere un numero per 0,2 è lo stesso che moltiplicarlo per

☐ A. $\frac{1}{5}$

☐ B. $\frac{1}{2}$

☐ C. 2

☐ D. 5

Soluzione INVALSI: D

Commento
Dal quaderno "Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 - Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica – Classe seconda – Scuola secondaria di II grado"

Per rispondere è utile essere in grado di convertire la rappresentazione decimale di un numero razionale in frazione e ricordare che dividere un numero razionale a per un numero razionale non nullo b equivale a moltiplicare a per l'inverso di b.
La scelta dell'opzione A può suggerire una lettura superficiale e affrettata del testo del quesito, ma se si considera che circa 2 studenti su 3 hanno scelto le opzioni A e B, allora la spiegazione più plausibile è che molti studenti siano ancora aggrappati al significato della divisione nell'insieme dei numeri naturali come ripartizione in un numero intero di parti uguali di una quantità. Il risultato di tale operazione, ovviamente, non può restituire un numero maggiore del dividendo; ciò potrebbe aver portato molti studenti a escludere le opzioni C e D.
In ogni caso, il fatto che circa 3 studenti su 4 diano una risposta scorretta suggerisce che molti studenti incontrino ancora seri ostacoli, anche dopo dieci anni di studi, nelle moltiplicazioni e divisioni con numeri razionali.

a.s. 2010/2011 - Domanda D29
Scuola secondaria di II grado – Classe II

D29. **L'espressione $\frac{9}{10}+\frac{8}{10^2}+\frac{7}{10^4}+\frac{2}{10^5}$ si può rappresentare mediante il numero decimale**

- ☐ A. 98,72
- ☐ B. 9,8072
- ☐ C. 0,9872
- ☐ D. 0,98072

Soluzione INVALSI: D

Commento
Dal quaderno "Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 - Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica – Classe seconda – Scuola secondaria di II grado"
L'espressione può essere scritta come
0,9 + 0,08 + 0,0007 + 0,00002 ossia 0,98072.
Per rispondere è bene che lo studente abbia ben chiara la rappresentazione polinomiale (in base 10) di un numero razionale.
La scelta del distrattore C, che ha ottenuto la più alta percentuale di risposte fra quelle scorrette, può dipendere anche da una lettura affrettata della somma di frazioni. Chi ha scelto le opzioni A e B rivela invece poca capacità di controllo semantico.
Si può notare che la possibilità di utilizzare la calcolatrice numerica può aiutare considerevolmente nella risposta.

a.s. 2012/2013 - Domanda D6
Scuola secondaria di II grado – Classe II

D6. **Un atomo di idrogeno contiene un protone la cui massa m_p è all'incirca $2 \cdot 10^{-27}$ kg, e un elettrone la cui massa m_e è all'incirca $9 \cdot 10^{-31}$ kg.**
Quale tra i seguenti valori approssima meglio la massa totale dell'atomo di idrogeno (cioè m_p+m_e)?

- A. ☐ $2 \cdot 10^{-27}$ kg
- B. ☐ $11 \cdot 10^{-31}$ kg
- C. ☐ $11 \cdot 10^{-58}$ kg
- D. ☐ $18 \cdot 10^{-58}$ kg

Soluzione INVALSI: A

Commento

La risposta a questo quesito richiede che lo studente abbia chiaro il significato della notazione scientifica (o esponenziale) dei numeri. In particolare deve ricordare che nella somma gioca un ruolo essenziale l'ordine di grandezza secondo la regola del 'mettere in colonna' appresa nel primo ciclo di studi.
Poiché i due numeri coinvolti nel quesito hanno ordine di grandezza *abbastanza* diverso, il minore dei due (9·10 -31) è *trascurabile* rispetto all'altro. La risposta è quindi A.
Il distrattore B. viene scelto dall'allievo che non tiene conto del segno dell'ordine di grandezza.
I distrattori C. e D. sono legati alla somma degli ordini di grandezza che è però richiesta dal prodotto.

a.s. 2012/2013 - Domanda D9
Scuola secondaria di II grado – Classe II

D9. **Su una risma di carta di fogli di formato A4 è scritto:**
80 g/m^2 (cioè 80 grammi al metro quadrato);
A4 210 × 297 mm (cioè le dimensioni di un foglio A4 sono 0,210 metri per 0,297 metri).

Un foglio A4 è all'incirca

A. ☐ 0,5 grammi

B. ☐ 1,5 grammi

C. ☐ 5 grammi

D. ☐ 10 grammi

Soluzione INVALSI: C

Commento
L'allievo deve saper operare in modo approssimato tenendo conto principalmente dell'ordine di grandezza dei numeri coinvolti.
Se approssimiamo le dimensioni del foglio A4 e le esprimiamo in notazione scientifica, si ottiene che la superfice del foglio è 2·10 -1 x 3·10 -1 = 6·10 -2 . La risposta è quindi 80 x $6\cdot10^{-2}$ ~ 5 (C.).

Descrizione dell'attività

Attività 1
Posizione di un numero razionale sulla retta numerica

NOTA: l'insegnante può utilizzare il seguente file (clicca qui per visualizzare la versione GeoGebra), in modalità Ricostruzione passo a passo, per visualizzare il

metodo di costruzione del punto di ascissa 3/4.
La costruzione geometrica proposta è utilizzata nel disegno geometrico ed è solitamente già nota agli alunni dalla Scuola media. Dal punto di vista teorico, la costruzione si basa sulla proporzionalità, data dal teorema di Talete, tra i segmenti situati su due rette. (cfr. Proprietà dei numeri razionali, in piattaforma, per la Scuola secondaria di primo grado).

Visualizzazione della costruzione passo-passo, con commento scritto dinamico (clicca qui per visualizzare la versione GeoGebra).

NOTA: l'esempio proposto riguarda la posizione di 3/4, ossia di un numero minore di 1 (e maggiore di 0); è consigliabile mostrare agli alunni la procedura analoga per numeri quali 5/3, ossia maggiori di 1.
Gli alunni dovranno poi, autonomamente, disporre sulla retta altri numeri razionali maggiori o minori di 1.

Attività 2

Posizione di un numero irrazionale del tipo $\sqrt{n}$ sulla retta numerica

NOTA: l'insegnante può utilizzare il file Numeri_6 sk2.ggb (file GeoGebra), in modalità Ricostruzione passo a passo, per visualizzare il metodo di costruzione del punto di ascissa $\sqrt{n}$ con n = 2, 3, 4.

La costruzione geometrica si basa sull'applicazione ripetuta del teorema di Pitagora, noto agli alunni dalla Scuola media.

Visualizzazione della costruzione passo-passo, con commento scritto. Vedi file Numeri_6 sk2.ggb (file GeoGebra)

NOTA: l'esempio proposto riguarda la costruzione geometrica di radici a partire da 1. Il procedimento può diventare abbastanza noioso, se si tratta ad esempio di determinare la posizione di $\sqrt{11}$.
Un modo più semplice quando ci si trova di fronte a radici di numeri "grandi" consiste nel partire dal quadrato più prossimo, per difetto o per eccesso, al numero cercato
Es.: per calcolare $\sqrt{11}$ si parte da $\sqrt{9}$ che è uguale a 3; per calcolare $\sqrt{35}$ si parte da $\sqrt{36}$ che è uguale a 6.
Queste varianti possono essere motivo di interessanti discussioni in classe.
Un ulteriore metodo, concettualmente un po' più complesso perché basato sul secondo teorema di Euclide, è proposto nel seguito, negli Spunti per altre attività.

Attività 3
Ordinamento e densità

L'insegnante con la classe riesamina le diverse forme con le quali si può rappresentare un numero:

- frazioni
- scritture decimali, sia limitate sia illimitate, periodiche e non periodiche
- scritture che indicano percentuali (spesso, ma non sempre, si tratta di numeri compresi fra 0 ed 1)

scritture algebriche e simboliche, quali $\sqrt{5}$ e π.

Si richiede che gli alunni sappiano confrontare numeri espressi in queste varie forme.

1 **-** Dapprima si eseguiranno confronti tra forme frazionarie e decimali (si vedano gli esercizi della fase 1 nella scheda di lavoro).
In questo contesto, gli alunni devono esaminare con particolare attenzione, e discutere in classe, casi quali "tra 3,2 e 3,12, quale è il maggiore?". Le verifiche nazionali ed internazionali mostrano infatti percentuali molto alte di errori su quesiti di questo genere.

2 - Un secondo tema di lavoro (esercizi della fase 2 nella scheda di lavoro) riguarda le approssimazioni intere, per difetto e per eccesso, determinate con il solo calcolo mentale. Ecco alcuni esempi.

- $\sqrt{57}$ è compreso tra 7 e 8, perché $7^2 < 57 < 8^2$.
- 36/7 è compreso tra 5 e 6, perché la parte intera del quoziente della divisione 36:7 è 5, e il resto non è 0.

Una discussione a parte riguarda numeri periodici quali 3,(9): in questo caso, infatti, si è portati a dire che è compreso tra 3 e 4. Va chiarito che 4 *non* è un valore per eccesso, ma il valore esatto.
Per convincersene, è utile osservare che la differenza tra 4 e 3,(9) è minore di ogni numero positivo, per quanto piccolo, e quindi che i due numeri devono coincidere:

- 4 - 3,(9) < 0,1, perché 4 - 3,99=0,01 e 3,999. > 3,99
- 4 - 3,(9) < 0,01, perché 4 - 3,999=0,001 e 3,999. > 3,999
- 4 - 3,(9) < 0,001, perché 4 - 3,9999=0,0001 e 3,999. > 3,9999

e quindi, in conclusione, 4 = 3,999.

Si tenga presente, in ogni caso, che le scritture decimali illimitate coinvolgono il concetto di infinito, anche se in modo implicito, e che quindi sono inevitabilmente fonte di difficoltà.
3 **-** Un terzo tema di lavoro (esercizi della fase 3 nella scheda di lavoro) riguarda l'uso, per le frazioni, della scrittura mista *parte intera + parte frazionaria*. Questa scrittura è poco diffusa presso le nostre scuole, ma la sua importanza è notevole. Non a caso, in ogni linguaggio di programmazione ed in ogni foglio di calcolo si trova la funzione che consente di calcolare la parte intera. In matematica la parte intera del numero x è usualmente indicata con $[x]$.
Data la frazione *a/b*, la scomposizione richiesta deriva dalla divisione euclidea di *a* per *b*. Infatti, se indichiamo con *q* il quoziente e con *r* il resto, abbiamo

$a = b.q + r$,
da cui, dividendo membro a membro per b:
$a/b = q + r/b$.
q è la parte intera, mentre, per costruzione, r/b è una frazione propria, essendo $r < b$.

4 **-** L'ultimo tema proposto (esercizi della fase 4 nella scheda di lavoro) porta ad una riflessione sulla densità dei numeri razionali e reali.
Il fatto che tra due razionali cada sempre un altro razionale è capito facilmente dagli alunni, e tuttavia un radicato misconcetto (si veda il primo punto delle Indicazioni metodologiche) porta spesso ad affermare che tra 5,4 e 5,9, ad esempio, cadono solo altri quattro numeri. È quindi necessario riprendere e approfondire questo aspetto. Un obiettivo più ambizioso, e che pertanto va gestito con attenzione, riguarda il fatto che l'insieme dei razionali è denso nei reali, così come lo è l'insieme degli irrazionali. In particolare, è importante che gli alunni comprendano bene che tra due irrazionali cade sempre almeno un razionale (e viceversa).

Attività 4
Ordinamento e operazioni

In quest'ultima attività, l'insegnante presenta una serie di esercizi che gli alunni possono eseguire in piccoli gruppi (confrontandosi poi con i compagni e con l'insegnante), oppure discutere tutti insieme in una lezione dialogata.

L'insegnante con la classe riesamina ed approfondisce le *proprietà di compatibilità* dell'ordinamento con le operazioni.
Ricordiamo che la relazione di ordine è compatibile con la struttura di corpo commutativo introdotta su ***Q*** e ***R*** mediante le operazioni di addizione e moltiplicazione. Ciò significa che valgono le seguenti due proprietà:

- *Compatibilità dell'ordine con l'addizione.*
  Se x, y, z sono tre reali e si ha $x < y$, si ha anche $x+z < y+z$. Pertanto, in una disuguaglianza si può addizionare ad ambo i membri uno stesso numero, o una stessa espressione, mantenendo la validità della disuguaglianza.

- *Compatibilità dell'ordine con la moltiplicazione*. Se x ed y sono due reali e z è un reale positivo ($z>0$), allora da $x < y$ si ha anche $xz < yz$. Pertanto, in una disuguaglianza si possono moltiplicare ambo i membri per uno stesso numero, o una stessa espressione, maggiore di zero, mantenendo la validità della disuguaglianza. Se invece $z < 0$ allora da $x < y$ segue $xz > yz$. Ossia, se in una disuguaglianza si moltiplicano ambo i membri per uno stesso numero, o una stessa espressione, *minore di zero*, allora bisogna invertire il verso della disuguaglianza.

Queste due proprietà delle disuguaglianze sono alla base delle manipolazioni algebriche che si usano per risolvere le disequazioni.

NOTA: le stesse proprietà, unite al fatto che gli insiemi ***Q*** e ***R*** sono corpi, permettono, la prima, di *sottrarre* uno stesso numero ad ambo i membri di una disuguaglianza, la seconda di *dividere* per uno stesso numero positivo (o negativo, nel qual caso bisogna sempre invertire il verso della disuguaglianza).

Ecco ora una serie di risultati su cui far riflettere gli alunni.

1 **-** *Non sempre* il prodotto di due numeri positivi è *maggiore* dei fattori stessi.
Siano infatti $0 < a < 1$, e $0 < b < 1$. Se moltiplichiamo i tre termini della prima disuguaglianza per b, avremo $0 < ab < b$.
Analogamente, se moltiplichiamo i tre termini della seconda per a, avremo 0 < ab < a.
In tal caso, quindi, il prodotto di due numeri positivi minori di 1 è minore di ciascuno dei due fattori (e quindi anche di 1).
In sostanza, mentre moltiplicare 3x2 significa sommare due volte 3 (la moltiplicazione tra numeri naturali è un'addizione ripetuta: 3+3), e quindi dà per risultato un numero maggiore di 3, moltiplicare 3x0,4 significa calcolare i 4/10 di 3 e quindi il risultato è minore di 3.

2 **-** In modo analogo si prova che le successive potenze di un numero positivo *minore* di 1 sono in ordine *decrescente*.
Se infatti $0 < x < 1$ e moltiplichiamo i tre termini per x stesso, avremo: $0 < x^2 < x < 1$.
Questo permette di riflettere sul fatto che *il quadrato di un numero positivo non sempre è maggiore del numero stesso*.
Moltiplicando più volte per x le disuguaglianze trovate, otteniamo:
$0 < . x^4 < x^3 < x^2 < x < 1$.
In altre parole, mentre le potenze di un numero maggiore di 1 danno luogo a numeri sempre più grandi, le potenze di un numero compreso tra 0 e 1 danno luogo a numeri sempre più piccoli.

NOTA: quanto abbiamo detto può essere verificato con facilità mediante una semplice calcolatrice, partendo da un numero come 0,9. In genere, per ottenere la sequenza delle potenze di un numero, basta digitare il numero stesso, il tasto di moltiplicazione e poi, ripetutamente, il tasto "=".

3 **-** In modo analogo si può osservare che, se $a > 1$, allora $1/a < 1$ e viceversa: se $a < 1$ (ma positivo!) allora $1/a > 1$.

Si richiede che gli alunni sappiano confrontare numeri espressi in queste varie forme.

Indicazioni metodologiche

Alcune osservazioni circa le difficoltà su questo tema.

- Alcuni studi sembrano indicare che la fonte dell'errore per cui, ad esempio, 3,2 < 3,12, consista nella misconcezione (spesso rinforzata dal linguaggio) che vede un decimale come coppia di interi. In questa interpretazione, il confronto si effettua a livello di elementi delle singole coppie. Nell'esempio: 3,2 come coppia (3; 2); 3,12 come (3; 12). Perciò risulta 3,2 < 3,12 essendo 2 < 12.

- Altri studi sembrano mostrare come, in alcune situazioni, il concetto di ordine di grandezza prevalga sui valori effettivi. Ad esempio, può succedere che un alunno affermi che 0,2 > 0,35 in quanto i decimi sono "più grandi" dei centesimi indipendentemente dal loro numero: in questo caso, "2 decimi è maggiore di 35 centesimi, perché i decimi sono *più grandi* dei centesimi".

Per maggiori approfondimenti, si vedano gli Spunti per un approfondimento disciplinare.

L'altro errore, ossia il ritenere che in ogni caso il prodotto sia maggiore dei fattori, dipende dalla generalizzazione impropria di una proprietà che effettivamente vale per il prodotto tra naturali (con l'ovvia eccezione di 0 e 1). Questa proprietà dei naturali, consolidata da un'abitudine molto lunga nel tempo, assume il ruolo di "legge" o assioma, indipendente dall'insieme numerico in cui si opera. Solo una riflessione accurata quando si affrontano insiemi numerici più ampi ne mostra la validità relativa.

Attività 1

- La costruzione è usata nel disegno geometrico ed è solitamente già nota agli alunni dalla Scuola media; non si ritiene necessario, a questo livello, esporre agli alunni la giustificazione geometrica. Se un alunno pone esplicitamente il problema, sta all'insegnante decidere se cogliere l'occasione per accennare a questo teorema importante magari solo in modo qualitativo, o rinviare la questione al momento in cui si affronterà il teorema in geometria.

Attività 2

- Poiché la costruzione si basa sul Teorema di Pitagora, noto agli alunni dalla Scuola media, si ritiene opportuno proporre agli alunni la giustificazione geometrica.

Attività 3

- Porre in ordine numeri in modo corretto è una capacità essenziale per una corretta interpretazione della realtà. La comparazione va fatta giocando sulle varie forme con le quali può essere espresso un numero: frazioni, scritture decimali, scritture algebriche e simboliche. Se bene condotta, questa attività è una buona occasione per verificare se gli alunni eseguono calcoli in modo meccanico o attribuiscono un significato ai numeri su cui operano.

Attività 4

- Scopo di questa attività è di "correggere" eventuali misconcetti sul prodotto tra numeri. La correzione avviene confrontando *ripetutamente* situazioni in cui il prodotto è maggiore dei fattori, con situazioni in cui ciò non si verifica. Si tenga presente, tuttavia, che errori generati da questo misconcetto potranno persistere a lungo, se da parte dell'alunno non si verifica una vera *ricostruzione* del concetto stesso.
- L'ambiente dei numeri naturali, fortemente radicato nell'esperienza, è spesso di ostacolo al passaggio ai numeri razionali, come già osservato. Per questo è importante discutere sul risultato di esercizi come il primo e il secondo per riflettere sul fatto che il quadrato di un numero non è sempre maggiore del numero di partenza.

Nell'esercizio 3 si chiede anche di riflettere sulle proprietà dei numeri indicati per ciò che riguarda ordine e risultati delle operazioni: ad esempio $\sqrt{e}$ sarà maggiore o minore di *e*, nella collocazione data, cioè per 0 < *e* < 1 ? È possibile calcolare $\sqrt{b}$, con - 1< *b* <0 ?

Spunti per un approfondimento disciplinare

Chi volesse approfondire il discorso può fare riferimento a:

- *Cominciamo da zero*, di V. Villani, Pitagora editrice, in particolare da pag. 63 a pag. 67, e da pag. 86 a pag. 94.
- *L'articolo allegato*, tratto da "Facciamo i conti con l'euro", Ministero Pubblica Istruzione, 2001, di C. Bernardi, L. Cannizzaro, M. Ferrari, M. Reggiani

Elementi per prove di verifica

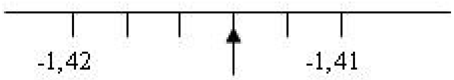
1. Fissa su una retta due punti che corrispondono a 0 e 1. Con un'opportuna costruzione geometrica, rappresenta su tale retta segmenti che abbiano per lunghezza i seguenti numeri:

$$\sqrt{5}\ ;\ \ 1+\sqrt{3}\ ;\ \ 2\sqrt{2}\ ;\ \ \sqrt{2}+\sqrt{3}$$

2. Quali dei seguenti numeri è il più grande?

$$1{,}48;\quad \frac{5}{3}\ ;\quad \frac{3}{2}\ ;\quad \frac{\sqrt{24}}{3}\ ;\quad 1{,}5$$

3. Quanto vale il numero indicato dalla freccia?



Di una frazione $\frac{x}{y}$ si sa che $2 < \frac{x}{y} < 3$ e che $x \cdot y = 21$ individua la frazione.

4. Stabilisci tra quali numeri interi consecutivi è compreso ciascuno dei seguenti numeri irrazionali:

$$\pi,\ \frac{3\pi}{2},\ -\pi \qquad 3\sqrt{2},\ \sqrt{\frac{21}{3}},\ \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sqrt{101}, \sqrt{1000}, \sqrt{10^5}$$

5. In ciascuno dei seguenti casi, trova un numero *x* che renda vera l'affermazione:

$$0 < x < 1\ ; \qquad -2 < x < -1\ ; \qquad \frac{1}{2} < x < 1\ ; \qquad 2 < x < \frac{5}{2}$$

   È possibile trovare un numero irrazionale compreso fra 0 ed 1? E negli altri casi, esiste un numero irrazionale *x* compreso fra i valori indicati?

6. A quali insiemi, tra ***N***, ***Z*** e ***Q***, devono appartenere i numeri indicati con *a, b, c* affinché le seguenti affermazioni abbiano significato?
   "*Il successivo di a è b*"
   "*Non esiste il successivo di c*"
   "*Tra a e b vi sono infiniti numeri*"

7. La lettera a rappresenta un qualunque numero intero. Scegli quale delle seguenti espressioni rappresenta sempre un numero positivo:

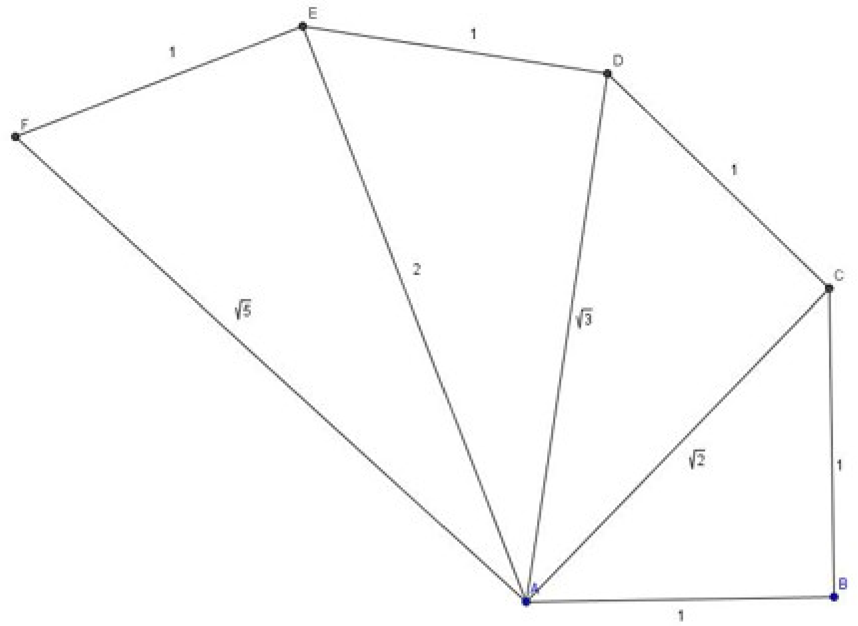
$$a^2 \ ; \ a+1; \ \ (a+1)^2; \ a^2+1$$

Vedi il documento con gli esercizi

Spunti per altre attività con gli studenti

- I numeri irrazionali del tipo $\sqrt{n}$ si possono costruire geometricamente anche in questo modo. Considerato un segmento unitario, si costruisce il triangolo rettangolo isoscele la cui ipotenusa misura $\sqrt{2}$; a partire dal segmento (cateto) di misura $\sqrt{2}$ si costruisce il triangolo rettangolo avente per cateto minore il segmento unitario: la corrispondente ipotenusa misura $\sqrt{3}$. Iterando il procedimento, si individuano segmenti che hanno per lunghezze le radici quadrate di numeri interi positivi.

  La costruzione si può eseguire con riga e compasso oppure con un software di geometria dinamica.



- Si ottiene un'altra costruzione delle radici applicando il secondo teorema di Euclide: in un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa. Per costruire un segmento di lunghezza $\sqrt{a}$, basta quindi considerare l'altezza di un triangolo rettangolo in cui le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono lunghe 1 ed *a*.

Bibliografia e sitografia

AAVV, Matematica 2001. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola primaria. Scuola secondaria di I grado*
(scarica il documento:
https://repository.indire.it/repository/working/export/4107/files/matematica2001.zip.

AAVV, Matematica 2003. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola secondaria di II grado*
(scarica il documento:
https://repository.indire.it/repository/working/export/4107/files/matematica2003.zip.

PISA 2003 Valutazione dei quindicenni a cura dell'OCSE, Roma, Armando Armando, 2004

Sitografia

Sito dell'Unione matematica Italiana (UMI) – Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM) https://umi.dm.unibo.it/ciim/

Invalsi https://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=ocsepisa06

Proposta di attività per il corsista

Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:
individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.
Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.

Sperimentare l'unità proposta:
- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di

significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà.
Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.