I vari ambienti numerici

I numeri naturali

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

Sono i numeri più semplici, che servono per contare quanti oggetti ha un insieme.

Non si trascuri il numero 0, che anzi, per le sue anomalie, è opportuno sia oggetto di particolare attenzione didattica.

L'insieme dei numeri naturali è indicato con il simbolo **N**.

Sulla retta, i numeri naturali corrispondono ai punti indicati in figura 1 (usualmente, si parla a scuola di *linea dei numeri*). I punti corrispondenti ai numeri naturali stanno tutti su una semiretta.

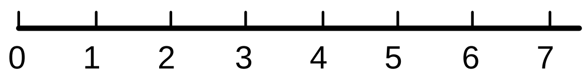

figura 1

I numeri naturali sono ordinati dalla relazione "*è minore di*".

In questo ordinamento, ogni numero naturale ha un successivo; ad esempio, il successivo di 5 è 6. Ogni numero diverso da 0 ha un precedente; ad esempio, il precedente di 4 è 3. Fra un numero e il suo successivo (ovvero fra un numero e il suo precedente) non è compreso alcun altro numero naturale.

Fra i numeri naturali si introducono in primo luogo le operazioni di addizione e moltiplicazione. La sottrazione $a - b$ ammette risultato se e solo se b è minore o uguale di a. La divisione $a : b$ ammette risultato esatto (cioè con resto 0) se e solo se a è un multiplo di b; una divisione con divisore 0 non si può mai eseguire: ad esempio, non si può eseguire 3 : 0 (mentre si può eseguire la divisione 0 : 3, che ha per risultato 0).

Da un punto di vista linguistico, le parole *zero, uno, due, tre,* ... sono dette *numerali cardinali;* mentre *primo, secondo, terzo,* ... sono i *numerali ordinali,* che servono per indicare il posto occupato da un oggetto in una sequenza. La distinzione fra ordinali e cardinali non è sempre netta nell'uso corrente: ad esempio, diciamo la pagina 17 di un libro e il binario 4 per indicare, rispettivamente, la diciassettesima pagina e il quarto binario; d'altra parte, gli ordinali sono usati con significato diverso nella lettura delle frazioni (*due terzi*, ecc.). Non è certo il caso di soffermarsi a scuola su queste ambiguità del linguaggio, ma non si sottovalutino le difficoltà che possono derivarne.

I numeri interi relativi

..., –3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, ...

Sono i numeri naturali preceduti dal segno + o dal segno –. I numeri interi relativi servono per esprimere la misura di una grandezza orientata (come nel caso della temperatura, o dell'altezza di una località sul livello del mare).

L'insieme dei numeri interi relativi è indicato con il simbolo **Z**.

Sulla retta, i numeri interi relativi corrispondono ai punti indicati in figura.

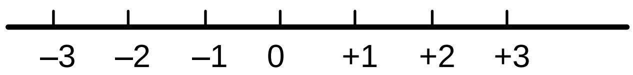

figura 2

Il concetto di *minore* fra numeri relativi presenta qualche difficoltà. La cosa più semplice consiste nel rifarsi alla figura 2: un numero a è minore di un numero b se il punto che indica a precede il punto che indica b nel verso da sinistra a destra (ad esempio –3 è minore di –1). Un numero maggiore di 0 si dice *positivo* ed ha il segno +, un numero minore di 0 si dice *negativo* ed ha il segno –; allo 0 non si attribuisce alcun segno.

Ogni numero intero relativo ha un successivo (ad esempio, il successivo di –5 è –4) ed ha un precedente (ad esempio, il precedente di 0 è –1, mentre il precedente di –2 è –3). Fra un numero e il suo successivo (ovvero fra un numero e il suo precedente) non è compreso alcun altro numero intero.

Anche fra i numeri interi relativi si introducono le operazioni di addizione e moltiplicazione. La sottrazione $a-b$ ammette *sempre* risultato. Invece, per la divisione, la situazione è analoga a quella vista per i numeri naturali.

Con l'introduzione dei numeri relativi, ciascuno dei simboli "+" e "–" acquista due significati ben distinti:

+ indica l'operazione di addizione e il segno positivo,

– indica l'operazione di sottrazione e il segno negativo,

Nel caso di un'operazione, ciascuno dei due simboli collega due numeri (3 + 5; 7 – 4), mentre il segno positivo o negativo si riferisce ad un singolo numero (+8; –2). L'uso di simboli con due significati è giustificato dalle successive proprietà, ma, in un primo tempo, può essere motivo di incomprensioni e di confusioni.

Aggiungiamo che, nella pratica, si parla spesso di numeri *interi* per indicare i numeri *naturali*; a rigore, invece, la dizione numeri *interi* va intesa come sinonimo di *interi relativi*.

Le frazioni (assolute)

Ogni frazione rappresenta il risultato di una divisione fra due numeri naturali, di cui il secondo diverso da 0. I due numeri naturali si chiamano, rispettivamente, *numeratore* e *denominatore*. L'aggettivo *assolute* indica che le frazioni sono prive di segno.

Fra due frazioni distinte è sempre compresa un'altra frazione: basta considerare la *media aritmetica* delle due frazioni date, cioè la metà della loro somma. Ad esempio, per trovare una frazione maggiore di 1/2 ma minore di 2/3, basta calcolare (1/2 + 2/3) : 2 = 7/12. Naturalmente, ripetendo il procedimento si trova che, fra due frazioni distinte, sono comprese infinite frazioni.

La proprietà precedente si esprime dicendo che l'insieme delle frazioni è *denso*. In un insieme denso non ha senso parlare né di successivo né di precedente di un elemento.

I numeri razionali

Ogni frazione individua un numero, ma ci sono frazioni, come 5/3 e 10/6, che indicano lo stesso numero. I numeri individuati dalle frazioni si dicono *numeri razionali*. Ogni numero razionale può essere rappresentato da scritture diverse (ad esempio, 0,5 = 1/2 = 3/6 = ...). A rigore, *frazione* e *numero razionale* non sono sinonimi, perché, appunto, ad un unico numero razionale corrispondono molte frazioni distinte, anche se a due a due equivalenti.

Come nel caso delle frazioni, si aggiunge l'aggettivo *assoluti* per indicare che i numeri sono privi di segno; se invece si considerano numeri preceduti dal segno “+” o dal segno “–”, si parla di *numeri razionali relativi*.

L'insieme dei numeri razionali relativi è indicato con il simbolo **Q**.

Fra i numeri razionali sono definite le operazioni di addizione, moltiplicazione e sottrazione. Anche la divisione *a* : *b* ammette sempre un risultato quando *b* è diverso da 0.

I numeri razionali sono un insieme *ordinato* e, come le frazioni, sono un insieme *denso*: fra due numeri razionali è sempre compreso un altro numero (anche in questo caso basta considerare la media aritmetica dei due numeri: rappresentando i numeri con punti *A*, *B* su una retta, la media aritmetica corrisponde al punto medio *M*).

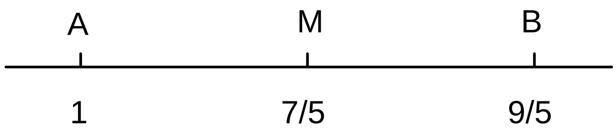

figura 3

I numeri naturali sono particolari numeri razionali perché corrispondono alle frazioni con denominatore 1 (o, più in generale, alle frazioni in cui il numeratore è un multiplo del denominatore).

Numeri decimali limitati e illimitati

Data una frazione *a/b* (con *a*, *b* interi e *b* > 0), se applichiamo il procedimento usuale per calcolare il quoziente della divisione *a*:*b*, si presentano diversi casi. Ad esempio, consideriamo le frazioni 6/2, 7/20, 8/3, 25/22.

6 : 2 = 3

7 : 20 = 0,35

8 : 3 = 2,666...

25 : 22 = 1,13636...

Nel primo caso il quoziente è intero (il resto è nullo): la frazione rappresenta un numero naturale. Nel secondo caso, il quoziente non è intero ma, proseguendo nel calcolo delle cifre decimali, si trova un resto uguale a 0. Negli ultimi due casi, non si trova mai resto 0, per cui il procedimento della divisione continua senza fine.

I numeri come 0,35, con un numero finito di cifre dopo la virgola, vengono detti *numeri decimali limitati*. Nell'uso corrente si parla spesso di numeri decimali *finiti*, ma è preferibile il termine *decimali limitati* (tutti i numeri sono "finiti").

I numeri come 2,666... e 1,13636..., con infinite cifre dopo la virgola, vengono detti *numeri decimali illimitati*, o, più precisamente, *numeri decimali illimitati periodici*. Si usa l'aggettivo *periodico* per indicare che le cifre si ripetono indefinitamente: nel caso di 2,666... ci sono infinite cifre dopo la virgola, tutte uguali a 6, mentre in 1,13636... dopo la virgola compare un 1 e poi, alternativamente, le cifre 3 e 6.

In matematica si studiano anche numeri *decimali illimitati non periodici*, come $\sqrt{2}$ = 1,414213... e = 3,14159... Si dimostra che questi numeri non hanno origine da una frazione; pertanto vengono detti *irrazionali*.

Qui sottolineiamo che, applicando l'usuale algoritmo ad una divisione *a/b*, si può ottenere un numero decimale limitato o un numero decimale illimitato periodico, e mai un numero decimale illimitato non periodico. Infatti, i successivi resti sono numeri naturali minori di *b*: prima o poi, o si ottiene come resto 0 e quindi il quoziente è un numero decimale limitato, oppure si ritrova un resto che era già comparso, ed in tal caso le successive cifre del quoziente si ripetono indefinitamente: il numero *a/b* è allora periodico.

Chiamiamo **D** l'insieme dei numeri decimali limitati (avvertiamo che l'uso della lettera **D** con questo significato non è di uso corrente nei testi matematici; riprenderemo il discorso nel paragrafo II.a). Naturalmente, comprendiamo in **D** i numeri naturali; d'altra parte, ogni elemento di **D** è un numero razionale.

Limitandosi a considerare i numeri decimali limitati invece dei numeri razionali, si ottengono alcuni vantaggi: in particolare, le regole di calcolo sono più semplici, perché vengono ricondotte a quelle di **N**. Inoltre, l'insieme **D** da un punto di vista matematico è denso (al pari di **Q**), ed è senz'altro adeguato per gli scopi pratici, perché ogni numero può essere approssimato con un numero decimale limitato, qualunque sia il grado di approssimazione desiderato.

Per quanto riguarda l'ordine, come abbiamo già accennato i numeri decimali limitati sono densi, perché, ancora una volta, la media aritmetica di due numeri decimali è un numero decimale compreso fra i due numeri dati. Il discorso presenta però difficoltà a livello didattico, perché in alcuni casi aumenta il numero delle cifre decimali. Ad esempio:

fra 2,4 e 3 è compreso 2,7

fra 0 e 0,1 è compreso 0,05.

Tuttavia, in alcuni contesti viene fissato il numero delle cifre decimali: ad esempio, parlando dell'Euro si considerano prezzi con non più di 2 cifre decimali. In queste circostanze, non abbiamo più a che fare con un insieme denso (non c'è alcun prezzo compreso fra 3,4 e 3,41).

Volendo, ha senso introdurre il concetto di successivo che avevamo visto parlando dei numeri interi, purché si stabilisca con chiarezza il numero delle cifre decimali: ad esempio, con due cifre decimali, il successivo di 1,78 è 1,79, il successivo di 4,99 è 5, il successivo di 5 è 5,01.

Per le operazioni fra numeri decimali, rimandiamo al paragrafo II.d. Qui ci limitiamo ad una osservazione sulla divisione. Nell'ambito dei numeri naturali, la divisione 10 : 3 ha quoziente 3 e resto 1, mentre nell'ambito dei numeri razionali, il quoziente della stessa divisione è 10/3 (con resto 0). Ma se operiamo con i numeri decimali, è lecito dire che:

la divisione 10 : 3 ha quoziente 3,3 e resto 0,1;

la divisione 10 : 3 ha quoziente 3,33 e resto 0,01; ecc.

Da un punto di vista teorico, le scritture precedenti sono tutte corrette (fermo restando che, in ogni caso, il resto deve essere un numero minore del divisore). Da un punto di vista pratico, le condizioni poste dal problema faranno preferire una risposta all'altra. Ad esempio, se dobbiamo dividere 10 Euro fra 3 persone in parti uguali, daremo a ciascuno 3,33 Euro con il resto di 1 centesimo.

Le frazioni decimali

Vediamo altri esempi di frazioni che danno luogo a numeri decimali limitati.

$3/4 = (3\times25)/(4\times25) = 0{,}75$

$1/20 = \ldots = 0{,}05$

$9/25 = \ldots = 0{,}36$

$21/25 = 7/5 = (7\times2)/(5\times2) = 1{,}4$

Se la frazione *a/b* è ridotta ai minimi termini (cioè se *a* e *b* sono primi fra loro), *a/b* corrisponde a un numero decimale limitato se e solo se *b* non contiene fattori primi diversi da 2 e 5. Si noti che i numeri 2 e 5 sono i fattori primi di 10, base del nostro sistema di numerazione.

Le frazioni come quelle prima considerate, che corrispondono a numeri decimali limitati, si chiamano *frazioni decimali*. Come è chiarito negli esempi precedenti, si tratta delle frazioni che si possono scrivere in modo che al denominatore compaia una potenza di 10 (come 10, 100, 1000).

A partire da un numero decimale, è facile ottenere la frazione decimale corrispondente:

$$3{,}8 = \frac{3{,}8\text{x}10}{1\text{x}10} = 38/10 = 19/5$$

$$0{,}25 = (0{,}25\times100)/(1\times100) = 1/4$$

$$12{,}004 = \ldots = 3001/250$$

Per eseguire una operazione tra frazioni decimali, disponiamo di due metodi, che ovviamente portano allo stesso risultato sia pure scritto in forma diversa. Il discorso è chiarito dal seguente esempio.

$1/4 + 6/5 = 0{,}25 + 1{,}2 = 1{,}45$

$1/4 + 6/5 = \ldots = 29/20$

Sulla scrittura in base 10

Il fatto che un numero naturale sia pari non dipende dal modo in cui scriviamo il numero: ad esempio, sia che scriviamo 6, oppure VI, o *sei*, o anche 110 in base due, abbiamo sempre un numero pari, cioè multiplo di 2. Analogamente, il fatto che, di due numeri, il primo sia multiplo del secondo non dipende dalla base scelta per la scrittura posizionale. Si tratta di proprietà che sono pertinenti ai numeri in sé e non alla forma nella quale i numeri vengono scritti, non al codice rappresentativo scelto.

Tuttavia, *il nostro modo di scrivere numeri non è imparziale*: l'abitudine alla base dieci ci porta a confondere proprietà legate all'usuale scrittura del numero con proprietà del numero.

“La somma delle cifre di un numero è pari” non è proprietà del numero, ma dipende anche dallo specifico sistema di scrittura scelto; ad esempio, 13 in base dieci diventa 1101 in base due: in un caso la somma delle cifre è pari, nell'altro è dispari, e pure il numero è lo stesso.

“Il numero 32 è un numero pari perché termina con la cifra 2” è una frase che coniuga una proprietà del numero (essere pari) con una proprietà di una sua rappresentazione (avere la scrittura che termina con la cifra 2). In effetti, gli usuali criteri di divisibilità riguardano i numeri scritti in base dieci: “in base dieci, un numero è pari se e solo se termina con una cifra pari, ovvero con 0, 2, 4, 6, 8.”

“Essere un numero decimale limitato” ed “essere un numero decimale con infinite cifre che si ripetono”, sono proprietà che coinvolgono la scrittura posizionale del numero in base dieci. In altre parole, il fatto che una frazione corrisponda ad un numero con virgola limitato o illimitato periodico dipende dalla base scelta. Ad esempio, se adottiamo il sistema di numerazione posizionale in base 3, il numero che noi scriviamo 1/3 diventa 0,1 (la scrittura 0,1 indica un decimo in base 10, un mezzo in base 2, un terzo in base 3, ecc.); invece, si può dimostrare che nel sistema di numerazione posizionale in base 3 il nostro 1/2 si scrive 0,111... Di conseguenza, avere infinite cifre dopo la virgola non è proprietà pertinente al numero, ma alla sua specifica rappresentazione.

Più precisamente, come vedremo attraverso esempi nel paragrafo I.d, se si scrivono i numeri nel sistema posizionale in base *B*, la frazione *a/b* (ridotta ai minimi termini) corrisponde a un numero con infinite cifre dopo la virgola se e solo se *b* contiene fattori primi diversi dai fattori primi della base *B*. Pertanto, il fatto che, scrivendo una frazione come numero con virgola, il risultato abbia un numero finito o infinito di cifre dopo la virgola, dipende dalla base del sistema di numerazione usato. In altre parole, l'insieme **D** dei numeri decimali limitati cambia se si modifica la base di numerazione.

Tuttavia, se parliamo in generale di numeri decimali illimitati, la distinzione fra numeri periodici e non periodici, ovvero fra razionali e irrazionali, non dipende dalla base scelta. Si tratta di proprietà pertinenti al numero e non alla forma con la quale viene scritto. Quindi l'insieme **D** è comunque un sottoinsieme di **Q**: saranno vani i tentativi di trovare una base che permetta di avere una rappresentazione con virgola periodica di un numero (come $\sqrt{2}$ o) che ha una rappresentazione decimale non periodica in base dieci.

“Un numero naturale è divisibile per 9 se e solo se è divisibile per 9 la somma delle sue cifre in base dieci.” Questo criterio di divisibilità permette di stabilire in modo rapido se un numero è o no multiplo di 9. Ad esempio, 3897 è un multiplo di 9, perché 3 + 8 + 9 + 7 = 27 = 3x9, mentre 4071 non è un multiplo di 9, perché 4 + 0 + 7 + 1 = 12. Naturalmente, se il numero di partenza è grande, è lecito iterare il procedimento.

Lo stesso criterio si estende ai numeri decimali limitati. Ad esempio, dividendo 6,03 per 9 si trova un decimale limitato (con resto zero) perché 6 + 0 + 3 = 9.

Abbiamo detto che i criteri di divisibilità dipendono dalla base di numerazione scelta; aggiungiamo che è possibile formulare criteri anche nelle altre basi. Ad esempio, se scriviamo i numeri in base cinque, abbiamo:

"un numero naturale è divisibile per 4 se e solo se è divisibile per 4 la somma delle sue cifre in base cinque"

(si noti l'analogia 4 = 5 – 1, così come 9 = 10 – 1). Così, il numero che in base cinque si scrive 3401 è un multiplo di 4, perché 3 + 4 + 0 + 1 è divisibile per 4 (non ha importanza il sistema in cui eseguiamo l'ultima somma). Per verificare che 3401 in base cinque è un multiplo di 4, conviene passare alla base dieci: $3x5^3 + 4x5^2 + 0x5^1 + 1x5^0 = 375 + 100 + 1 = 476$ che è divisibile per 4.

Numeri decimali limitati relativi

Come si passa dai numeri naturali ai numeri interi relativi, così, a partire dai numeri decimali limitati assoluti, si introducono i numeri decimali limitati relativi. L'argomento non presenta particolari difficoltà, né teoriche né pratiche, per chi abbia familiarità con i concetti di numero intero relativo da un lato e di numero decimale dall'altro. Tuttavia, qualche fatto merita una certa attenzione. Citiamo ad esempio la proprietà: sottraendo da un numero decimale un numero intero, si trova un numero decimale che, dopo la virgola, ha le stesse cifre del numero di partenza. Questa proprietà vale per i numeri decimali assoluti, ma non è più vera nell'ambito dei numeri decimali relativi:

$$5{,}82 - 4 = 1{,}82 \qquad \text{ma} \quad 1{,}8 - 3 = -1{,}2.$$

La rappresentazione dei numeri su una retta (la linea dei numeri) viene ancora in aiuto per interpretare, spiegare, memorizzare i nuovi numeri e le relazioni fra loro.

Aggiungiamo una considerazione generale. Nell'apprendimento della matematica, a tutti i livelli scolastici, la capacità di generalizzare, cioè di estendere proprietà da casi particolari a situazioni diverse, è molto spesso di aiuto (e, anzi, è un valido strumento nella ricerca matematica). Tuttavia, alcune proprietà non si possono generalizzare, e quindi sono necessarie cautela e consapevolezza. In sostanza, l'alunno che si preoccupa solo di applicare regole in modo meccanico si troverà spesso in difficoltà; mentre la capacità di distinguere fra caso particolare e proprietà generale, la chiarezza nel delimitare l'ambito di validità delle regole, l'abitudine a controllare con esempi, sono la base per un apprendimento proficuo e duraturo.

Le principali proprietà delle operazioni

Proprietà commutativa dell'addizione e della moltiplicazione:
qualunque siano i numeri a e b, si ha

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

Ad esempio, $2 + 9 = 9 + 2$; $1{,}5 \times 4 = 4 \times 1{,}5$

Proprietà associativa dell'addizione e della moltiplicazione:
qualunque siano i numeri a, b, c, si ha

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad (a \mathrm{x} b)\mathrm{x} c = a\mathrm{x}(b\mathrm{x}c)$$

Ad esempio, $(7 + 2) + 8 = 7 + (2 + 8)$; $(9\mathrm{x}25)\mathrm{x}2 = 9\mathrm{x}(25\mathrm{x}2)$

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:
qualunque siano i numeri a, b, c, si ha

$$a\mathrm{x}(b + c) = a\mathrm{x}b + a\mathrm{x}c$$

Ad esempio, $6\mathrm{x}(30 + 7) = 6\mathrm{x}30 + 6\mathrm{x}7$

0 è *elemento neutro* per l'addizione:
qualunque sia il numero a, si ha

$$0 + a = a$$

Ad esempio, $0 + (-5) = -5$

1 è *elemento neutro* per la moltiplicazione:
qualunque sia il numero a, si ha

$$1\mathrm{x}a = a$$

Ad esempio, $1\mathrm{x}3{,}7 = 3{,}7$

Proprietà invariantiva della sottrazione e della divisione:
qualunque siano i numeri a, b, c, si ha

$$a - b = (a + c) - (b + c) = (a - c) - (b - c)$$

$$a/b = (a \times c)/(b \times c) = \frac{a : c}{b : c}$$

(con *b* e *c* diversi da 0).

Ad esempio, $115 - 107 = (115 - 100) - (107 - 100)$

$2{,}1/2{,}8 = 21/28$

Osservazioni

- Nell'uso, la proprietà commutativa viene talvolta enunciata dicendo che "Cambiando comunque l'ordine degli addendi [dei fattori] la somma [il prodotto] non varia". Si tratta di una formulazione non del tutto corretta, perché, da un punto di vista matematico, occorre dire "Cambiando l'ordine dei due addendi di un'addizione [dei due fattori di una moltiplicazione], la somma [il prodotto] non varia", facendo riferimento solo a due termini. La proprietà prima enunciata con tre o più termini è corretta, ma è una conseguenza delle proprietà commutativa e associativa.
- Molto utile è la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione, che, in particolare, è alla base dell'usuale metodo per il calcolo del prodotto di due numeri. In effetti, invece di calcolare ad esempio 26x35, calcoliamo 26x(30 + 5) = 26x30 + 26x5 = (20 + 6)x30 + (20 + 6)x5 = 20x30 + 6x30 + 20x5 + 6x5.

  Si noti il senso che acquista, per questo procedimento, la conoscenza delle *tabelline*: basta conoscere pochi prodotti, oltre a saper eseguire le somme, per calcolare rapidamente un qualsiasi prodotto. Naturalmente, il procedimento è reso possibile dal sistema di numerazione posizionale: se adottassimo, invece, un sistema di numerazione del tipo di quello Romano, non disporremmo di un metodo così agile per l'esecuzione delle moltiplicazioni.
- Le proprietà citate valgono per i numeri naturali, per i numeri interi relativi, per i numeri decimali e, più in generale, per i numeri razionali.

Uno sguardo in generale agli insiemi numerici

Siamo partiti da **N** e poi abbiamo introdotto **Z**, **D** e **Q**. Per quali motivi conviene ampliare l'insieme dei numeri? In effetti, limitarsi ai numeri naturali (o ai numeri interi) risulta insoddisfacente per motivi pratici e teorici:

- in varie circostanze per la misura delle grandezze non bastano i numeri interi;

- introducendo ambienti più grandi riusciamo ad eseguire operazioni in precedenza impossibili (ad esempio, 3 – 5 non ammette risultato in **N**, ma lo ammette in **Z**);
- è spontaneo rappresentare i numeri su una retta: come fra due punti distinti di una retta ne è sempre compreso un altro, così si cerca un insieme di numeri che risulti denso.

Un'altra osservazione. Abbiamo detto che un numero naturale è un particolare numero intero relativo, e un particolare numero razionale: ad esempio, 4 = +4 = 12/3. A rigore, si può obiettare che 4 non è la stessa cosa di +4, perché 4 è un numero privo di segno, mentre +4 è un numero con il segno positivo. È più appropriato dire che il numero naturale 4 si può *identificare* con il numero intero relativo +4; e, in generale, che **N** si può identificare con un sottoinsieme di **Z**, così come **Z** si può identificare con un sottoinsieme di **Q**. Per non appesantire il discorso, nel seguito trascureremo questa precisazione.

Richiamiamo comunque l'attenzione sul fatto che addizione, moltiplicazione, ... vengono definite in modi diversi nei vari insiemi numerici (la somma di frazioni viene introdotta mediante un algoritmo diverso e più complesso di quello che si usa per sommare due numeri interi).

a cura di Claudio Bernardi