Archimede 34, n. 4, 1982 G. Prodi – V. Villani

ANCHE IL CALCOLO LETTERALE PUÒ ESSERE INTELLIGENTE

Le riflessioni che presentiamo sono state originate da un corso di aggiornamento per insegnanti delle scuole secondarie superiori e possono essere viste come un commento al Syllabus di Matematica là dove esso richiede di "saper trasformare un'espressione algebrica in un senso desiderato" [1]

Nell'attuale prassi dell'insegnamento, a livello delle scuole secondarie superiori, molto spesso il calcolo letterale si traduce in una lunga attività esecutiva e ripetitiva, priva di motivazioni e di applicazioni. Lo si potrebbe paragonare all'*istruzione formale* che gli eserciti tradizionali riservavano alle reclute: un complesso di movimenti da eseguire meccanicamente e prontamente, con allusioni solo vaghe e indirette alla possibilità di una guerra e alla presenza di un nemico. Veramente, l'*istruzione formale* all'inizio della vita militare aveva anche lo scopo di indurre nei soldati un atteggiamento automatico di obbedienza pronta ed acritica,... ma non si vede a che possano giovare questi atteggiamenti mentali nell'apprendimento della matematica.

Non si può negare che anche nel calcolo occorre, con un opportuno allenamento, creare riflessi condizionati, in modo che la mente, nel seguire un ragionamento matematico, sia solo in piccola parte assorbita dal funzionamento del meccanismo algebrico. Ma, nell'insegnamento corrente, troppo spesso si passa il segno, anche perché il calcolo letterale viene somministrato quasi tutto all'inizio della scuola secondaria superiore, anziché essere proposto man mano, in relazione all'ampliarsi delle prospettive teoriche e dei problemi affrontati. Così l'algebra appare come un meccanismo noioso e inutile, tale da respingere i ragazzi più intelligenti e vivaci.

La nostra tesi è che, pur senza poter eliminare completamente dallo studio l'esercizio ripetitivo, il calcolo letterale può essere presentato in modo intelligente, vario e ben graduato. Saremo lieti se le idee che esporremo susciteranno approfondimenti, discussioni, e magari anche documentate contestazioni.

1. LE DUE DIREZIONI DEL CALCOLO LETTERALE.

Calcolare significa sostanzialmente trasformare un'espressione in un'altra equivalente[2].

Nel caso di un'espressione numerica si tratta semplicemente di eseguire le operazioni indicate, in modo da ottenere alla fine un numero: dunque la via è pressoché obbligata. Ben diversa è la situazione nel calcolo letterale: non esiste, in generale, una forma finale standard a cui si vuole pervenire. Questa dipenderà dallo scopo che ci si prefigge nel calcolo. Ciò pone una prima grossa difficoltà agli allievi, i

---

[1] Il *Syllabus di Matematica* è stato pubblicato nel 1980 dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica dell'UMI con l'intento di mettere in evidenza le principali conoscenze o capacità che gli studenti delle scuole secondarie superiori dovrebbero aver acquisito al termine dei loro studi. (Vedi *Archimede*, anno XXXII, n. 1-2, gennaio- giugno 1980. pp. 6-14). Il punto citato è tratto dal § 2 L'Algebra.

[2] Il modo più elementare di definire l'equivalenza fra due espressioni è quello di richiedere che esse assumano lo stesso valore per una qualunque sostituzione delle variabili con numeri. Ciò può peraltro avvalorare l'idea che "il calcolo con le lettere è analogo al calcolo con i numeri"; in realtà il calcolo letterale è ben più complesso del calcolo delle espressioni aritmetiche.

quali non si rendono conto del motivo per cui in certi casi si chiede loro di seguire un procedimento, in altri casi un procedimento opposto.

Le principali direzioni del calcolo (limitandoci alle espressioni intere, o polinomi) sono le due seguenti:

sviluppare (cioè trasformare un'espressione in somme di prodotti),

fattorizzare (cioè trasformare, ove possibile, un'espressione in un prodotto di somme, o, perlomeno, nel prodotto di due altre espressioni).

La prima direzione operativa è quella più popolare, tanto che, se noi presentiamo ad un ragazzo un'espressione e gli chiediamo di *calcolarla*, egli si mette senz'altro a svilupparla. La proprietà che sta alla base dello sviluppo in modo peculiare è la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. Viene opportuna, a questo punto, una osservazione elementare, che però raramente è presentata in modo esplicito nei trattati di algebra. Domandiamoci: "*Perché i matematici hanno introdotto la ben nota convenzione secondo cui, in assenza di parentesi, si dà la precedenza alla moltiplicazione rispetto all'addizione (cioè si stabilisce che il segno di moltiplicazione 'leghi di più' del segno di addizione)? Sarebbe stato ugualmente legittimo adottare la convenzione opposta?*". Sul piano della sola correttezza formale, una qualunque delle due convenzioni sarebbe stata accettabile; tuttavia un valido motivo per preferire la convenzione usuale c'è: la proprietà distributiva — applicata, se è il caso, ripetutamente — consente di far precedere tutte le moltiplicazioni rispetto alle addizioni, e quindi di ottenere alla fine una espressione (parliamo sempre di espressioni intere) che si può scrivere senza parentesi. Effettivamente, la forma canonica dei polinomi, in una o più variabili, è priva di parentesi. La linea espositiva tradizionale, che presenta dapprima i monomi, e poi definisce i polinomi come somme di monomi, toglie un po' di interesse e di *suspense* a tutta questa vicenda.

Ben diverso è il caso dell'algebra di Boole; se consideriamo, per fissare le idee, l'algebra dei sottoinsiemi di un certo insieme con le operazioni di $\cup$ (unione) e $\cap$ (intersezione)[3], abbiamo due proprietà distributive: quella dell'intersezione rispetto all'unione e quella dell'unione rispetto all'intersezione. Lo stabilire che dei due simboli $\cup$, $\cap$ uno "leghi di più" dell'altro è materia di pura convenzione, senza che ci possa essere *a priori* un motivo di preferenza. A questo punto, sembra dunque abbastanza interessante segnalare ai ragazzi che, in matematica, le convenzioni possono essere di due tipi assai diversi. A volte c'è una situazione perfettamente simmetrica, in cui si tratta di decidersi fra due alternative del tutto indifferenti (come nel caso della *precedenza a destra* per la circolazione stradale), mentre in altri casi una convenzione è sostenuta da ragioni di opportunità che la rendono pressoché obbligatoria[4].

2. LA FATTORIZZAZIONE.

Mancando nell'algebra ordinaria la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione, come già osservato sopra, non si potrà avere per la *fattorizzazione* un algoritmo così generale e immediato come per lo sviluppo; anzi, all'insegnante spetta di mettere in evidenza il carattere eccezionale della fattorizzazione, almeno per i polinomi in più variabili. Raramente ciò è fatto: spesso viene fatta violenza alla genericità delle situazioni. Come nei brani di traduzione in francese gli autori infilano volentieri parole che fanno eccezione, così nei testi di matematica la gran parte degli esercizi non riguarda situazioni generiche, ma casi in cui si possa applicare un artificio più o meno peregrino, che diventa fine a se stesso. Per tornare al tema che ci interessa, l'accento che i libri di testo pongono sugli esercizi di fattorizzazione potrebbe far pensare che, in generale, ogni espressione in due o più variabili fosse

---

[3] Si introduce anche l'operazione di passaggio al complementare che però, in questo contesto, non ci interessa

[4] Tali sono appunto le convenzioni sull'uso delle parentesi nel calcolo algebrico, le relazioni $a^\circ = 1$, $0! = 1$, e tante altre.

fattorizzabile, mentre così non è. Si ricordi ad esempio che l'equazione di una conica si spezza nel prodotto di due equazioni lineari solo se il determinante è nullo, il che è appunto un caso eccezionale; del resto, alla stessa conclusione si può giungere con un computo di parametri: le coniche dipendono da 5 parametri effettivi; le coppie di rette da 4 soli parametri effettivi; lo stesso vale per gradi più elevati e per maggior numero di variabili[5].

È importante che l'allievo, pur nei limiti delle sue conoscenze, possa toccare con mano che, in generale, la fattorizzazione è impossibile; è opportuno prendere in esame un caso significativo, ma abbastanza semplice da essere trattabile. Poniamo, ad esempio, il problema di vedere in quali casi il polinomio di secondo grado in x, y :

$$xy + ax + by + c$$

si può scomporre nel prodotto di due polinomi di primo grado. Scriveremo:

$$xy + ax + by + c = (hx + ky + m)\cdot(px + py + r)$$

Mancando nel polinomio assegnato i termini in x^2, y^2 deve essere $hp = 0$, $kq = 0$; possiamo supporre $p = 0$, allora deve essere $k = 0$ (se fosse $q = 0$ il secondo fattore avrebbe grado nullo e la fattorizzazione sarebbe banale). Poiché deve essere $hq = 1$, possiamo supporre (eventualmente dividendo il primo fattore per h e moltiplicando il secondo sempre per h) che sia $hq = 1$. Dunque, a conclusione di questa prima esplorazione, possiamo affermare che, se una fattorizzazione è possibile, essa è certamente della forma

$$xy + ax + by + c = (x + s)\ (y + t).$$

Ma questa è possibile solo se è $t = a$, $s = b$, $st = c$, cioè se nel polinomio assegnato si ha $rc = ab$.

Un modo espressivo di presentare la cosa ai ragazzi di affermare che, se in un polinomio del tipo $xy + c + by + c$ si prendono i coefficienti a, b, c a caso, la *probabilità* che esso sia fattorizzabile è nulla. Questo enunciato è indubbiamente suggestivo, ma contrasta violentemente con l'intuizione. (Com'è possibile che un evento che negli usuali esercizi di routine si verifica spesso, abbia probabilità nulla? Non è forse vero che *evento con probabilità nulla* equivale a dire *evento impossibile* ?)

Volendo approfondire questo tipo di considerazioni, è pertanto necessario precisare il senso dell'affermazione fatta, distinguendo tra probabilità nel finito e probabilità nel continuo. Per evitare le difficoltà connesse con la misura degli insiemi non limitati, conviene poi supporre che i valori di a, b, c (tra loro indipendenti) siano tutti racchiusi nell'intervallo $[–M, M]$, con $M > 0$ fissato, e che su tale intervallo la densità di probabilità sia costante. La probabilità di un qualsiasi evento è allora proporzionale al volume che il suo insieme rappresentativo ha nel cubo

$$[–M, M] \times [–M, M] \times [–M, M].$$

L'evento che ci interessa (fattorizzabilità) è rappresentato dalla superficie $c = ab$, e questa ha appunto volume nullo (pur non essendo vuota).

Volendo evitare le difficoltà connesse con la nozione di probabilità nel continuo, ci si può limitare a presentare le considerazioni precedenti nel finito. Ad esempio si può fare la convenzione di scegliere i coefficienti a, b, c, sempre a caso, ma unicamente nell'ambito dei numeri *interi* compresi fra -10 e $+10$ (come del resto avviene comunemente negli esercizi scolastici) e calcolare di conseguenza il numero complessivo dei casi possibili, il numero dei casi in cui il polinomio si fattorizza e il rapporto fra questi due numeri. In questa ulteriore schematizzazione, la probabilità che il polinomio sia fattorizzabile – pur non essendo nulla – è abbastanza piccola, e

[5] Le considerazioni sul computo dei parametri sono intuitivamente evidenti, anche se una loro giustificazione rigorosa presuppone una base teorica non banale sul terreno della teoria della dimensione (algebrica o topologica).

diminuisce ancora se si amplia l'intervallo entro cui si conviene che possano variare i numeri interi a, b, c.

Naturalmente la fattorizzabilità, quando sussiste, è una proprietà significativa, che merita di essere interpretata. Così vale la pena di osservare che, annullando il polinomio di cui ci siamo occupati, si ottengono tutte le iperboli con gli asintoti paralleli agli assi; il caso in cui il polinomio è fattorizzabile è quello in cui le iperboli si spezzano in una coppia di rette parallele agli assi.

3. ALTRE POSSIBILI DIREZIONI DEL CALCOLO.

Lo sviluppo e la fattorizzazione sono le principali direzioni del calcolo, quando si vedano le cose dall'interno dell'algebra. Ma vi sono scopi particolari, che possono condurre in altre direzioni, come appunto il *Syllabus* suggerisce nel passo citato. Faremo alcuni esempi:

a) Per *minimizzare il numero delle moltiplicazioni* occorrenti per il calcolo di un polinomio in una variabile, si può procedere con il ben noto schema:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n =$$
$$= a_0 + x\,(a_1 + x\,(a_2 + \ldots + x\,(a_{n-1} + a_n x) \ldots)).$$

b) L'esigenza di *minimizzare la durata di un calcolo* (o *il numero delle istruzioni che compongono un programma*) può condurre ad apparenti complicazioni, per cui, come nel caso qui sotto indicato, può convenire usare l'operazione di *reciproco* per il calcolo di un polinomio:

$$1 + x + x^2 + \ldots x^9 = \frac{x^{10} - 1}{x - 1} \qquad (x \neq 1)$$

c) Nell'analisi matematica capita spesso di dover eseguire calcoli che non sono né di sviluppo né di fattorizzazione e in cui, apparentemente, l'espressione si complica anziché semplificarsi. Così è quando si applica l'artificio di *aggiungere e togliere*, come nella dimostrazione della continuità o della differenziabilità della funzione prodotto:

$$xy - x_0 y_0 = xy - x_0 y + x_0 y - x_0 y_0 = (x - x_0)y + x_0(y - y_0).$$

Qui lo scopo è di mettere in evidenza le quantità $x - x_0$ ed $y - y_0$; un'altra via equivalente sarebbe di porre $x - x_0 = h$, $y - y_0 = k$ ed eseguire nella formula originaria la sostituzione $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$. In questo caso, lo sviluppo metterebbe automaticamente l'espressione nella forma voluta.

Altre situazioni assimilabili alla precedente sono quelle in cui, per dimostrare la positività di un'espressione, la si presenta sotto forma di *somma di quadrati*, come quando si opera su un trinomio di secondo grado con discriminante negativo:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

d) È anche molto interessante riscrivere un'espressione usando solo *espressioni prefissate*; ad es.

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{1 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

In questo modo si vede che l'espressione dipende solo dal rapporto $\dfrac{y}{x}$.

4. IL CALCOLO TRIGONOMETRICO.

Un'altra grossa occasione di buono o cattivo calcolo letterale si presenta con la trigonometria. Di solito viene dedicato molto tempo alle identità trigonometriche, ma spesso manca una precisa consapevolezza dello scopo, e perciò anche dei limiti, di questo lavoro. Un allievo intelligente può chiedersi se si tratta di un calcolo totalmente nuovo, oppure del solito calcolo letterale leggermente ritoccato. Cerchiamo di rispondere a questa domanda, esplicita od implicita che sia.

Supponiamo di riferirci ad espressioni intere in $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ (il discorso potrà essere esteso facilmente alle espressioni fratte). Osserviamo che, posto $X = \cos\alpha$, $Y = \sin\alpha$, la relazione

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0$$

risulta identicamente soddisfatta (per ogni valore di α). Quindi il calcolo trigonometrico con le espressioni polinomiali di $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ può essere visto come un calcolo letterale nell'anello A dei polinomi in due variabili X, Y *non indipendenti*, bensì legate tra loro dalla relazione

$$X^2 + Y^2 - 1 = 0.$$

In altre parole, ogni multiplo polinomiale di $X^2 + Y^2 - 1$ si comporta come lo zero dell'anello A.

Nell'esposizione in classe sarebbe fuori luogo aggiungere ulteriori precisazioni; tuttavia per completezza osserviamo che la relazione $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ è anche *l'unica relazione* esistente tra $X = \cos\alpha$ e $Y = \sin\alpha$, nel senso che, se un altro polinomio $P(X, Y)$ si annulla identicamente (per ogni valore di α) quando si ponga $X = \cos\alpha$, $Y = \sin\alpha$, allora $P(X, Y)$ è un multiplo polinomiale di $X^2 + Y^2 - 1 = 0$. Tralasciamo la dimostrazione, non molto difficile[6].

A questo punto possiamo chiarire anche le ragioni per cui le difficoltà del calcolo trigonometrico sono maggiori di quelle dell'usuale calcolo letterale. Ciò dipende essenzialmente da due fatti:

I) Nell'anello A manca il *teorema di identità,* cioè due espressioni polinomiali in $X = \cos\alpha$, $Y = \sin\alpha$, scritte in modo diverso, possono assumere sempre gli stessi valori (qualunque sia il valore attribuito ad α). L'esempio più semplice è X (ossia $(\cos\alpha)$) che si può scrivere anche nella forma $1 - Y^2$ (ossia $1 - (\sin\alpha)^2$).

II) Nell'anello A manca la *fattorizzazione unica*, cioè una stessa espressione può essere fattorizzata in più modi distinti.
L'esempio più semplice è ancora X^2 che si fattorizza sia come $X \cdot X$, sia come $(1 + Y)(1- Y)$ (ricordare che $X^2 = 1 - Y^2$). Di conseguenza, trovandosi ad es. di fronte al problema di semplificare un'espressione trigonometrica fratta, non basta seguire un procedimento automatico, come nel caso delle espressioni razionali dell'usuale calcolo letterale, ma il successo o meno della semplificazione voluta dipende in modo essenziale dal tipo di fattorizzazione scelto per le espressioni ai numeratore e al denominatore dell'espressione trigonometrica in questione.

È interessante far notare poi che le espressioni trigonometriche intere (ossia, con le nostre notazioni, le funzioni polinomiali in $X = \cos\alpha$, $Y = \sin\alpha$) possono essere rappresentate anche sotto forma di *polinomi trigonometrici*:

---

[6] Con l'abituale linguaggio dell'algebra, si può dire che l'anello A delle espressioni polinomiali in $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ è *isomorfo* all'anello quoziente dell'anello $\mathbf{R}[x, y]$ dei polinomi in due variabili *indipendenti* x, y, modulo *l'ideale* generato dal polinomio $x^2 + y^2 - 1$. In simboli

$$A = \mathbf{R}[x, y] / (x^2 + y^2 - 1)$$

$$a_0 + (a_1 \cos\alpha + b_1 \sin\alpha) + (a_2 \cos 2\alpha + b_2 \sin 2\alpha) + ... + (a_n \cos n\alpha + b_n \sin n\alpha)$$

dove l'intero *n* non supera il grado del polinomio in *X*, *Y*, di cui si parlava prima. Il passaggio in un senso e nell'altro si fa facilmente per mezzo delle formule di Eulero sulla funzione esponenziale complessa, ma almeno fino al terzo grado i calcoli sono abbastanza semplici anche con gli strumenti elementari. Ad esempio, si può osservare che

$$(\cos\alpha)^3 = (\cos\alpha)^2 \cdot \cos\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha \cdot \cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{4}(\cos 3\alpha + \cos\alpha) = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha$$

e che analogamente

$$(\sin\alpha)^3 = ... = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

Uno dei pregi della rappresentazione delle espressioni trigonometriche intere sotto forma di polinomi trigonometrici è dovuta al fatto che per questo tipo di rappresentazione sussiste il *teorema di identità*: in altre parole, i coefficienti a_0, a_1, b_1, ..., a_n, b_n di un polinomio trigonometrico sono univocamente determinati dai valori che il polinomio stesso assume; in forma equivalente ciò significa che, se un polinomio trigonometrico assume valore nullo in corrispondenza a qualunque valore di *a*, tutti i suoi coefficienti devono essere nulli. La dimostrazione segue dalla nota espressione integrale dei coefficienti dei polinomi trigonometrici; si tratta di un risultato importante, che sta alla base della teoria degli sviluppi di Fourier. È possibile darne anche una dimostrazione diretta (non troppo complicata se il grado del polinomio trigonometrico è abbastanza basso) facendo vedere che un polinomio trigonometrico è un multiplo polinomiale di $X^2 + Y^2 - 1$ solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli. Non ci sembra comunque il caso di proporre una dimostrazione siffatta agli allievi. Ma già una corretta comprensione dell'enunciato del *teorema di identità* per i polinomi trigonometrici può essere utile per mettere ancor meglio a fuoco analogie e diversità tra il calcolo letterale usuale e il calcolo trigonometrico.

5. CONCLUSIONI

Da quanto abbiamo detto scaturiscono alcune conseguenze abbastanza ovvie a livello didattico.

a) È scarsamente formativo fare eseguire "in serie" grandi quantità di esercizi basati su schemi di calcolo prefissati e catalogati (sviluppare, fattorizzare,...). Infatti l'interesse e la difficoltà stanno ben più nella *scelta della direzione da imprimere al calcolo* che non nella sua esecuzione. Conviene dunque proporre esercizi non troppo complicati, ma in un contesto da cui emergano le finalità delle manipolazioni che gli allievi devono eseguire.

Anche per questi motivi non conviene proporsi di sviluppare tutto il calcolo letterale all'inizio della scuola secondaria superiore, quando sono ancora scarse le motivazioni e le applicazioni. È opportuno sviluppare man mano l'abilità nel calcolo e continuare ad inframmezzare esercizi di vario tipo, in modo che sia sempre preminente la strategia rispetto alla manualità e al piccolo artificio.

b) Si può illustrare l'utilità del calcolo algebrico facendo *calcolare il valore di una formula per assegnati valori numerici delle variabili*, e successivamente far *calcolare gli stessi valori per una formula opportunamente semplificata*. Ad esempio, al momento dell'introduzione delle prime nozioni di calcolo letterale in classe, si chieda agli allievi di scrivere la formula che esprime la differenza d tra l'area di un rettangolo di lati p, q e l'area di un rettangolo di lati $p - 1$, $q - 1$. Senza eccessive difficoltà, essi scriveranno

$d = pq - (p - 1)\cdot(q - 1)$.

Si chieda quindi di calcolare i valori numerici di d, quando a p e a q si attribuiscono tutti i possibili valori interi compresi fra 1 e 10. I calcoli sono indubbiamente un po' fastidiosi se effettuati a partire dalla formula sopra scritta, e fanno quindi apprezzare concretamente il vantaggio che consegue dalla possibilità di riscrivere la formula nella sua forma semplificata.

$d = p + q - 1$.

Anche nel *calcolo numerico* la conoscenza di qualche semplice fatto del calcolo algebrico può essere utile. Ad esempio, se si deve calcolare il quadrato del numero 12.756.964 disponendo solo di un calcolatore che opera con 8 cifre, conviene sfruttare lo sviluppo del quadrato di un binomio, scrivendo:

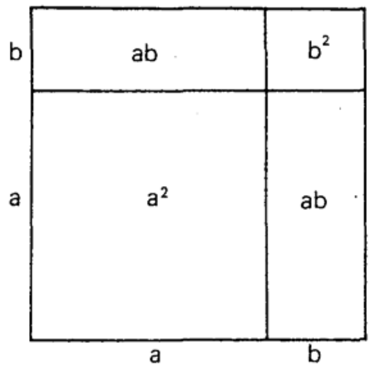
$12.756.964 = 1275\cdot10^4 + 6964$

e calcolando separatamente col calcolatore i due quadrati 12752, 69642 e il doppio prodotto 2 . 1275 6964.

Perfino nel calcolo mentale il calcolo letterale può servire (ad es. $19^2 = (20–1)^2$ =….).

c) Un *piccolo calcolatore* può essere molto utile nell'introduzione del calcolo algebrico. Anzitutto esso può servire ad illustrare le *regole formali* su cui si basa il calcolo. Queste *regole formali* non sono poi altro che le proprietà della struttura di corpo commutativo dei numeri reali.

In secondo luogo, se il calcolatore è programmabile, il concetto di *espressione algebrica* può essere tradotto in quello, assai più tangibile, di *programma di calcolo*. L'allievo è condotto spontaneamente a distinguere il ruolo dei coefficienti numerici da quello delle variabili.



d) Un altro tipo di attività può essere quello di *interpretare* delle formule, sia in termini geometrici (ricordiamo la classica rappresentazione geometrica del quadrato di un binomio; analoga rappresentazione si ne, un'attività molto utile è quella di far *costruire* formule agli allievi. Esempi:

1) Individuare le variabili significative e quindi esprimere l'area di una figura in funzione delle variabili scelte. (L'esercizio è non banale soprattutto quando ammette varie alternative per la soluzione; ad es.: un quadrilatero generico, o un quadrilatero che presenta qualche simmetria, ...).

2) Scrivere la formula che esprime la portata di un pallone aerostatico sferico in funzione del raggio, conoscendo il peso per unità di superficie del materiale dell'involucro e la differenza dei pesi specifici dell'aria e del gas usato per gonfiarlo. (È interessante far notare che il peso dell'involucro cresce secondo una legge quadratica, mentre la spinta cresce secondo una legge cubica).

GIOVANNI PRODI – VINICIO VILLANI

Dipartimento di Matematica,

Università di Pisa