Temi e problemi della ricerca didattica in algebra

Autori:
F. Arzarello Univ. di Torino
L. Bazzini Univ. di Pavia
G. Chiappini CNR di Genova

Articolo contenuto in *L'algebra come strumento di pensiero*, Progetto strategico del C.N.R. 1996

*"...
Ebbene, fra il ragionamento grossolano, che anche a chi è ignaro del calcolo pur fa prevedere in molti casi l'andamento di certi fenomeni ed il meccanismo delle forze che li governano, ed il ragionamento sottile del geometra che, da un insieme artificioso di simboli algebrici, in una maniera che spesso desta meraviglia anche nei più esercitati e rotti alle disquisizioni analitiche, giunge al risultato che precisa l'andamento degli stessi fenomeni naturali, non corre quel divario che a tutta prima parrebbe. Anzi, se esaminiamo le cose con accuratezza, si vedrà che quest'ultimo sottile procedimento non è altro che il primo rozzo ragionamento più perfezionato e affinato. Ed oltre a ciò si può dire che nella mente del geometra quel primo rozzo ragionamento ha preceduto il calcolo e lo ha guidato, indicandogli su per giù dove doveva arrivare e quanto gli era permesso tentare. In certo modo esso rappresenta la greggia armatura su cui l'intero edificio analitico è costruito. Ma quando noi vediamo il lavoro compiuto, ci troviamo di fronte ad un monumento magnifico che è già stato spogliato di tutti i ponti e i sostegni. I puntelli che hanno servito a reggere la cupola in costruzione sono spariti, ed essa appare agli occhi meravigliati di chi la guarda come un miracolo di costruzione."*

Vito Volterra, 1920

1.0 Introduzione.

Alla domanda che molti insegnanti si pongono su cosa e come insegnare di algebra, recenti ricerche in didattica della matematica stanno cercando di dare risposta attraverso un'analisi dei contenuti dell'algebra, delle caratteristiche del pensiero algebrico, dei processi cognitivi indotti e degli ostacoli epistemologici, cognitivi e didattici. Da queste analisi, condotte su diversi fronti con pluralità di stili e metodi, emerge abbastanza chiaramente l'idea generale che l'algebra non è e non deve essere presentata come una collezione di trucchi, ma come uno strumento e un oggetto di pensiero.
L'insegnamento dell'algebra, come del resto l'insegnamento della matematica in generale, deve essere orientato a promuovere la comprensione di concetti e l'organizzazione del pensiero. Per tradizione l'algebra ha un posto di rilievo nel curriculum di matematica: per molti studenti l'introduzione del simbolismo algebrico, con i suoi aspetti ideografici e trasformativi, rappresenta da una parte lo stacco dai problemi studiati per anni nell'ambito dell'aritmetica e dall'altra l'inizio di studi matematici più avanzati.
Pochi studenti contestano l'importanza dell'algebra, anche se molti non ne coltivano che un'idea superficiale e riduttiva, a volte persino deviante.
Il pensiero algebrico è considerato astratto (l'algebra è stata definita da B. Russell come il sorriso del gatto del Cheshire in "Alice nel Paese delle Meraviglie", sorriso che rimane dopo che il gatto è scomparso); inoltre il pensiero algebrico è inscindibile dal linguaggio formalizzato con cui si esprime e dalle sue manipolazioni. Tuttavia è limitativo pensare che esso viva solo a questo livello, altrimenti tutto si ridurrebbe ad una serie di meccanismi manipolativi, i quali, chissà perché, il più delle volte non funzionano in mano agli allievi.
Il formalismo algebrico è fondamentale nell'apprendimento della matematica. Per *formalismo algebrico* intendiamo il sistema di segni e regole sintattiche che governano la costituzione e la trasformazione delle espressioni simboliche in algebra. Come osserva Boero [92], esso si organizza a partire dai segni relativi alle quattro operazioni aritmetiche e al segno "=", con le relative regole d'uso. La sua padronanza richiede la capacità di governare le sue principali funzioni (stenografica, di sintesi, di generalizzazione, di individuazione, di trasformazione), costruendo e interpretando le relative espressioni simboliche in accordo al carattere ideografico del linguaggio algebrico.
Si può osservare che, nonostante il maggior rilievo dato alle funzioni stenografica e di generalizzazione, sono principalmente le funzioni di individuazione e di trasformazione che permettono alla matematica di essere non solo un linguaggio adatto a descrivere la realtà ma anche un potente strumento di ragionamento e previsione attraverso la *messa in formula* di conoscenze (o ipotesi) sui fenomeni e la derivazione (mediante trasformazioni consentite dal formalismo algebrico) di nuove conoscenze sui fenomeni stessi.
E' importante sottolineare che, per effetto della funzione di sintesi si può stravolgere quella corrispondenza uno a uno tra pensiero e formula, tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico (Laborde [82]), tipica della funzione stenografica. Questa viene superata: la struttura del linguaggio diventa ideografica.
Già a livello di problemi di aritmetica, la traduzione del pensiero nel nuovo linguaggio, quello dei numeri e delle operazioni, può perdere il carattere puramente stenografico (cfr. 3.1).
La funzione ideografica del formalismo algebrico mette chiaramente in luce i diversi modi di operare del linguaggio naturale e del linguaggio formale. La consonanza dei due linguaggi, presente nella funzione stenografica, può scomparire nella traduzione ideografica, fino a diventare dissonanza.
Ciò può essere causa di tensione tra i due linguaggi e fonte di ostacoli e difficoltà, come vedremo più avanti.

1.1 Aspetti storico-epistemologici.

Un'analisi retrospettiva dello sviluppo storico dell'algebra, questa tarda venuta (Chevallard [89]), induce a domandarsi perché essa sia rimasta indietro rispetto alla geometria per così molti secoli, con un decollo difficoltoso del suo simbolismo: eppure avrebbe dovuto raccogliere l'eredità accumulata dall'aritmetica, e mettere le ali allo spirito, come Peano osservava in termini metaforici.
Inoltre è interessante interrogarsi se e in quale misura esistano legami tra gli ostacoli

incontrati dallo sviluppo storico della disciplina e le difficoltà con cui gli studenti ogni giorno si confrontano. Studi sperimentali al riguardo (Harper [87]; Sfard [92]) sembrano confermare la tesi piagetiana di convergenza tra lo sviluppo storico e quello individuale (Garcia e Piaget [89]).
Le difficoltà incontrate dal soggetto che apprende possono essere molto vicine a quelle sperimentate da generazioni di matematici.
Di particolare interesse a questo proposito è l'analisi storico-psicologica presentata da A. Sfard al congresso ICME 7 (Quebec, 1992). Tale analisi si basa sulla considerazione che in tutte le branche della matematica sono chiaramente evidenziabili due tipi di componenti: quella relativa ai processi computazionali e quella relativa agli oggetti astratti (Skemp [71]; Sfard [91]). Le due componenti, essenzialmente diverse ma complementari, sono come le facce opposte di una stessa medaglia. Ad esempio, un numero, così come ogni altro concetto matematico, può essere concepito in due modi: operativamente, cioè come processo, e strutturalmente, cioè come oggetto (2 + 3 posso intenderlo come processo di calcolo o come numero).
In un certo senso, gli oggetti astratti non sono altro che un modo alternativo di riferirsi ai processi computazionali; i numeri naturali e i razionali rimandano ai procedimenti di conteggio e di misura, come del resto i negativi e i complessi rimandano, rispettivamente, alle operazioni di sottrazione da un numero più piccolo e di estrazione di radice quadrata da un numero negativo. Così, si potrebbe dire che i numeri razionali, irrazionali, negativi e complessi non sono altro che incarnazioni mature di certi processi computazionali. La storia dell'algebra moderna, con la nascita della teoria degli ideali e la contrapposizione tra i metodi computazionali di Kronecker e quelli astratti di Dedekind evidenzia come questa dialettica sia tipica dello sviluppo di questa disciplina anche nei suoi aspetti più astratti.
Considerare quindi un'entità matematica come un oggetto significa potere riferirsi ad esso come a qualcosa di reale, a una struttura statica, esistente da qualche parte nello spazio e nel tempo. Per contrasto, interpretare una nozione come processo implica il considerarla come entità potenziale piuttosto che attuale: essa viene ad esistere su richiesta, in una successione di azioni. Così, mentre la concezione strutturale è statica (o, meglio, *senza tempo*), istantanea e integratrice, la concezione operativa è dinamica, sequenziale e dettagliata (Sfard [91]). Osservando lo sviluppo storico, si vede invariabilmente che nuovi numeri entrano in scena non appena certi processi computazionali non standard cominciano ad ottenere riconoscimento. Lo sviluppo del concetto di numero si può vedere come lo svolgimento di una catena di passaggi dalle concezioni operative a quelle strutturali. D'altra parte, anche prima che i processi generatori di nuovi numeri fossero considerati come oggetti, i matematici li usavano e li combinavano in operazioni più complesse.

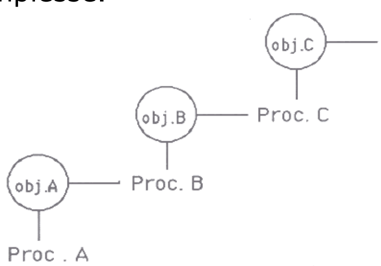

Fig. 1

Analogamente a quanto avvenuto nella storia, anche il processo di apprendimento cognitivo avviene in un delicato 'interplay' tra concezioni operative e strutturali della stessa nozione. Sfard sottolinea in particolare il momento della *interiorizzazione* del processo (che quindi diventa facilmente rappresentabile), il momento di *condensazione* (quando ci si può riferire al processo come a qualcosa che avviene in una scatola nera) e il momento della *reificazione* in cui si trasformano le operazioni computazionali in entità permanenti (oggetti). Per esempio, il numero complesso nasce nel momento in cui l'allievo diventa capace di vedere il processo di estrazione di radice quadrata di un numero negativo come un'entità *reale*, come una cosa.
Si può identificare una gerarchia: nel tempo le operazioni effettuate su certi oggetti astratti generano nuovi oggetti che servono come input alle operazioni nel livello successivo (v. Fig. 1).
Relativamente ad una data nozione, possiamo distinguere tra processo primario, che porta alla concezione strutturale della nozione stessa, e processo secondario, quello che opera sulla nozione intesa come oggetto.

Ovviamente questo modello, come ogni altro modello teorico, mette in luce alcuni aspetti e ne adombra altri.
Osserviamo inoltre che la teoria della reificazione presenta somiglianze con altri modelli di sviluppo cognitivo, che adottano altre terminologie; per esempio si parla di *reflective abstraction* in Beth e Piaget [66], di *entità concettuali* in Greeno [83].
Anche Freudenthal ([73], [78]) era stato fautore di una visione della matematica come gerarchia di prospettive alternanti e ne aveva visto il processo di apprendimento come composto di livelli in cui la matematica agita ad un livello diventa matematica osservata nel livello successivo. Secondo Freudenthal sono proprio i momenti di discontinuità, cioè quelli in cui avviene un salto, a richiedere la maggiore attenzione. Osserviamo che il termine *condensazione* era già stato usato da Arzarello ([90], [91b]) con una connotazione diversa da quella usata da Sfard (si veda § 2.4.1).
Vediamo dunque come nell'evoluzione del pensiero algebrico ci sia stato un costante sforzo di transizione da procedure computazionali a oggetti matematici: un faticoso cammino di reificazione che si riflette nelle difficoltà riscontrate dal singolo nel cammino verso l'astrazione.
Molti autori concordano nell'affermare che le prime origini del pensiero algebrico sono individuabili nel momento in cui appare lo sforzo di trattare un processo computazionale in modo più generale. Nonostante questa visione concorde dell'algebra come scienza dei processi generalizzati, alcuni autori individuano nell'uso delle notazioni simboliche le caratteristiche fondamentali del pensiero algebrico, mentre altri ritengono che il simbolismo algebrico non sia l'unico mezzo per realizzare processi di generalizzazione. Secondo questa visione, il pensiero algebrico comincia prima del simbolismo.
D'altra parte, poiché è almeno vero che il pensiero algebrico è favorito dall'uso di un simbolismo opportuno, nella storia dell'algebra ha importanza non solo la storia dei concetti, ma anche quella del sistema dei simboli usati per esprimere i medesimi.
Per quanto riguarda quest'ultimo, come è ben noto, si possono individuare con G. H. Nesselmann [1843] tre stadi distinti:
I) *fase retorica* (anteriore a Diofanto di Alessandria, 250 d. C.), tutta a parole, senza simboli;
II) *fase sincopata* (da Diofanto che l'iniziò, alla fine del secolo XVI), che vede l'introduzione di abbreviazioni per le incognite, ma i calcoli sono eseguiti tutti in lingua naturale. Diofanto introduce i simboli per l'incognita e le sue prime potenze nell'introduzione alla sua opera "Aritmetica", ma poi di fatto usa un'algebra completamente retorica;
III) *fase simbolica* (introdotta da Viète, 1540-1603) in cui si usano lettere per tutte le quantità, incognite o meno, e si usa l'algebra non solo per andare a caccia del valore dell'incognita, come nella fase II, ma per provare regole che legano le varie quantità ed esprimere così le soluzioni generali.
Non si deve però pensare che l'avvento dell'algebra sincopata abbia soppiantato di colpo quella retorica così come l'algebra simbolica non ha sostituito di colpo quella sincopata.
L'algebra retorica, detta anche verbale, fu praticata dagli inizi fino al XVI secolo, prefigurando una veste algebrica a contesti geometrici, usando per esempio i segmenti come variabili. E' un far matematica in modo operativo e verbale: il mezzo verbale perpetua il pensiero operativo e agevola il controllo semantico.
Non c'è dubbio che il pensare in termini operativi può causare un aggravio della memoria ed essere quindi meno efficiente dell'economia di pensiero indotto dalle notazioni simboliche. Sarebbe quindi ragionevole aspettarsi che, nel momento in cui lo studente accede al simbolismo algebrico, egli vi faccia ricorso in ogni possibile contesto.
Studi sperimentali (Clement, Lochhead e Soloway, [79]; Soloway, Clement e Lochhead, [82]; Laborde [82]) hanno rilevato che persino studenti con alle spalle parecchi anni di algebra simbolica preferiscono usare i metodi verbali piuttosto che quelli simbolici.
Come osservato dalla Laborde, lo sviluppo di un linguaggio simbolico specializzato può spogliare di significato il linguaggio in cui l'attività algebrica si era precedentemente espressa. L'algebra retorica e quella sincopata erano abbastanza facili da seguire e da capire. Ma il salto ad un sistema simbolico può nascondere i significati dei termini e delle operazioni che agiscono su di essi. Il linguaggio simbolico ha il potere di rimuovere molte delle distinzioni che il linguaggio naturale preserva, espandendo in questo modo la sua applicabilità. Ne risulta una certa debolezza semantica: allo studente può sembrare che questo linguaggio, che si adatta a tutti i contesti, non appartenga in realtà a nessuno.
Lo scollamento tra linguaggio simbolico e significato del contesto risulta evidente da alcuni

lavori di Clement e altri (Clement [82]; Clement, Lochhead e Monk [81]; Clement, Lochhead e Soloway [79]), che riferiscono di uno studio svolto su un campione di 150 studenti .del primo anno di Ingegneria.
Sono state analizzate le risposte ai seguenti problemi:

- *Usando le variabili S e P scrivi un'equazione che rappresenti la seguente affermazione: "In questa Università gli studenti sono sei volte i professori." Usa S per indicare il numero degli studenti e P per indicare il numero dei professori.*
- *Usando le variabili C e S scrivi un'equazione che rappresenti la seguente affermazione: "Al ristorante Mindy, per ogni quattro persone che ordinano cheesecake ce ne sono cinque che ordinano strudel." Indica con C il numero dei cheesecake e con S il numero degli strudel.*

Si è riscontrata una percentuale del 63% di risposte corrette al primo problema, e una percentuale del 27% nel secondo. In entrambi i casi la grande maggioranza delle risposte scorrette era del tipo 6S=P e 4C=5S rispettivamente.
Questi risultati sono stati confermati da studi di Lochhead [80]; inoltre la percentuale di risposte scorrette è aumentata nel momento in cui si richiedeva di interpretare un'equazione data (M=7S, con M=n° montatori, S=n° saldatori in una fabbrica), invece di generarla (Mestre e Lochhead [83]).
Trova dunque conferma l'ipotesi dell'esistenza di rigidità nell'uso stenografico del codice algebrico, che conferma il suo scollamento dalla semantica; solo quando ricorrono all'algebra retorica o sincopata gli studenti sembrano essere in grado di mantenere un certo controllo dei significati. Il
metodo *retorico* sembra essere usato spontaneamente, indipendentemente dall'istruzione, con precedenza del pensiero operativo su quello strutturale.
Uno studio di Harper [87] ha evidenziato un possibile parallelismo tra l'evoluzione storica dell'algebra attraverso le tre fasi sopra descritte, e lo sviluppo cognitivo del soggetto.
Storicamente un progresso fondamentale si è avuto con l'opera di Viète, caratterizzata dall'introduzione sistematica delle lettere nei problemi algebrici, sia per le quantità conosciute che per quelle incognite: cosa che rappresenta il principale vantaggio di trattare il caso generale e non i casi particolari, di interessarsi alla struttura dei problemi piuttosto che alla loro espressione.
Solo con l'introduzione dei parametri, intere famiglie di problemi possono essere trattate per mezzo di procedure concise: un salto di qualità notevole, di cui Viète stesso fu consapevole. Egli descrisse infatti l'aritmetica come scienza dei numeri concreti (in latino, *logistica numerosa*) e la sua algebra come scienza delle specie (*logistica speciosa*), cioè scienza dei tipi di cose piuttosto che delle cose medesime.
L'avvento dell'algebra simbolica offrì ai matematici i mezzi per trattare grandezze variabili e non solo quantità costanti, il che determinò un grosso impatto anche sulla geometria: basti ricordare l'introduzione della geometria analitica, soprattutto ad opera di Cartesio e Fermat.
Oggi l'idea di variabile come numero qualunque ci sembra così ovvia e semplice che stentiamo a capire perché tardò così tanto ad affermarsi. Ma se riflettiamo un momento sul processo di pensiero che viene attivato, scopriamo che si tratta di un pensiero in termini funzionali e richiede perciò l'abilità di pensare simultaneamente su intere famiglie di numeri piuttosto che su una qualsiasi quantità specifica, nonché sulle reciproche relazioni tra famiglie di numeri.

1.2 Aspetti epistemologico-didattici.

Per quanto riguarda la tensione dialettica tra l'aritmetica dei significati e l'algebra dei segni, il che ha costituito in passato e costituisce tuttora oggetto di dibattito, ci sembra interessante l'analisi epistemologico-didattica compiuta da Chevallard [89]. Chevallard osserva che l'algebra, fin dalla sua nascita, era considerata un elemento culturale inaccessibile ai più proprio perché veniva dopo l'aritmetica. L'opposizione aritmetica-algebra, che riprende nel registro didattico lo sviluppo storico dei due campi del sapere, realizza concretamente ciò che si può definire la dialettica del vecchio e del nuovo. In questa prospettiva, l'aritmetica si presenta come un prerequisito che permette l'introduzione dello strumento algebrico e gli dà senso e portata. La parte comune, messa in evidenza da una certa tradizione didattica, è costituita da un certo corpo di problemi, per la risoluzione dei quali l'aritmetica e l'algebra propongono approcci diversi.
In genere si parte da un problema tradizionale di aritmetica; un esempio può essere il

seguente:
"*Trovare tre numeri la cui somma sia 164, tali che il secondo superi il primo di 14 e che il terzo sia la somma dei primi due.*"

La soluzione aritmetica può essere:
La somma 164 dei tre numeri si compone di:
1) Primo numero
2) Primo numero aumentato di 14
3) Due volte il primo numero più 14.
Si ha cioè quattro volte il primo numero aumentato di 28. Se dunque si toglie 28 da 164, il resto (136) varrà il quadruplo del primo numero e di conseguenza 136 : 4, cioè 34. Il primo numero è 34, il secondo 48 e il terzo 82.

La soluzione algebrica è:

$$x + x + 14 + x + x + 14 = 164$$
$$4x + 28 = 164$$
$$x = 34$$

Osserviamo che la soluzione aritmetica è basata sul linguaggio ordinario arricchito di un linguaggio numerico. Inoltre la soluzione aritmetica si presenta come un discorso: il *saper fare* aritmetico è essenzialmente un *saper fare* orale.
Chevallard osserva che l'aritmetica si oppone all'algebra come l'orale allo scritto. Certo, il discorso aritmetico si può scrivere (e per necessità si scrive) e il "discorso" o piuttosto la scrittura algebrica si può leggere (e per necessità si legge). Ma ciascuno occupa un registro, orale o scritto, che gli è proprio.
Nell'esempio considerato si vede come l'iniziazione all'algebra si appoggia sulla tradizione e sulle conoscenze fornite dall'aritmetica: il nuovo si modella sull'antico.
L'aritmetica produce un discorso in cui sono incastonati dei *ragionamenti*, l'algebra elabora scritture che sono i *veicoli* del calcolo. In questa ottica, l'algebra riduce il ragionamento al calcolo: il gioco dei segni, se puramente meccanico, mette in fuga il pensiero, il controllo della ragione sul pensiero si fa controllo meccanico, regolato da un gioco di segni, il raziocinio interviene solo nella scelta dell'incognita, nella messa in equazione e nella risoluzione dell'equazione. Ma quest'attività ha ben poco di nobile e non si è lontani da quest'altra conclusione: sotto le "grazioserie" dell'aritmetica c'è solo la meccanica nuda e cruda che l'algebra rileva e che lo "chatoiment" (gatteggiamento) delle parole dissimula. Così, mentre si cerca di avvicinare aritmetica e algebra al fine di smussarne il passaggio, di fatto si va contro l'aritmetica e anche contro l'algebra, per l'incapacità di mostrare dove la seconda supera la prima.
Osserva ancora Chevallard: "Il ragionamento, se resta, si rifugia allora nella concatenazione dei discorsi aritmetici o, algebricamente, nella successione delle trasformazioni pertinenti. Il bottino è magro. Il re è nudo." (p.23). E ancora, attraverso un'immagine poetica, lo stesso autore osserva che "intellettualmente, per generazioni, l'aritmetica è stata il paradiso verde degli amori infantili, il latte e il miele dello spirito che si apre, per suo tramite, all'incanto di un'attività intellettuale riflessa, padroneggiata e felice. ... Così l'aritmetica, troppo bene appresa, veniva a fare da ostacolo, intellettuale, affettivo e ideologico, al suo superamento."(p.6).
In conclusione, secondo Chevallard, è solo a partire dall'introduzione dei parametri che l'algebra può rivaleggiare con l'aritmetica e superarla.
In questo senso Newton potrà considerare l'algebra come aritmetica universale:
"Il calcolo si fonda o sui numeri, come nell'Aritmetica volgare, o sulle lettere come nell'Analisi. Questi due procedimenti si fondano sugli stessi principi e conducono allo stesso risultato; l'Aritmetica in modo definito e particolare, l'Algebra in modo indefinito e universale. Ma, in quest'ultimo metodo, quasi tutti gli enunciati e soprattutto le conclusioni sono teoremi veri.
L'Aritmetica va dal conosciuto allo sconosciuto; l'Algebra, al contrario, va spesso dallo sconosciuto al conosciuto, in modo che in qualunque maniera arrivi a una conclusione o equazione, si possa sempre arrivare alla conoscenza della quantità sconosciuta. Con questo metodo si risolvono problemi molto difficili, di cui si cercherebbe invano la soluzione coi soli mezzi dell'Aritmetica. Nello stesso tempo l'Aritmetica è talmente indispensabile in tutte le

operazioni dell'Algebra, che solo la loro unione forma la scienza completa del calcolo." (sottolineatura nostra, un po' maliziosa).
La concezione qui esposta da Newton nella sua *Arithmetica Universalis* risale d'altra parte a Viète stesso, che aveva concepito la sua opera come tesa a rivalutare l'apporto degli antichi (ad es. Pappo ed altri), supposto in parte perduto, e nel quale egli percepiva una dialettica fondamentale tra analisi e sintesi.
Molto più tardi, Poinsot (1777-1859) scriverà che l'Algebra elementare non è altro che un'Aritmetica generalizzata. Numeri particolari tendono a numeri qualunque e le operazioni attuali che si possono eseguire tendono a operazioni che si indicano solo con segni. In questo modo, si pensa meno a stabilire il risultato delle operazioni ma si è più interessati a scoprire delle formule per la soluzione di tutti i problemi dello stesso tipo.
A sostegno di questa tesi, Chevallard cita il seguente esempio, preso da un trattato di Elementi di Algebra di un anonimo della fine del secolo XVIII:
"*Dividere un numero dato in due parti tali che la prima parte superi la seconda di un numero dato*".
L'autore mostra dapprima come l'aritmetica, cioè il ragionamento orale, permette di formulare la soluzione:
"La parte più piccola è uguale alla metà del numero da dividere, meno la metà dell'eccesso dato".
Poi considera un esempio numerico: il numero da dividere sia 9, l'eccesso dato sia 5. Allora la parte più piccola è 2, la più grande è 7. Quindi indica con le lettere le quantità conosciute: sia a il numero da dividere e b l'eccesso. Allora si può stabilire che, indicando con x la parte più piccola, è

$$x = a/2 - b/2.$$

Questa uguaglianza indica chiaramente quali sono le operazioni da effettuare su non importa quali valori numerici particolari di a e di b per determinare il valore dell'incognita x.
Secondo Chevallard, è solo a questo prezzo che l'algebra prende i suoi pieni poteri e si pone come rivale dell'aritmetica, giustificando così la pretesa di sorpassarla fornendo i mezzi di un'aritmetica generalizzata. Rinunciare ai parametri sarebbe, per l'algebra elementare, rinunciare alla sua essenza.
Questo salto di natura epistemologica non sempre viene evidenziato dalla didattica dell'algebra. Da una parte può succedere che il forte distacco qualitativo tra l'aritmetica e l'algebra sia narcotizzato, dall'altra può capitare di perdere l'occasione di vedere nell'aritmetica quelle caratteristiche che costituiscono una buona propedeuticità all'apprendimento dell'algebra.
E' invece importante preparare bene il terreno affinché l'algebra sia vista e appresa non come una macchina che gira a vuoto su segni lontani dai referenti semantici dell'aritmetica, ma piuttosto come generalizzazione e superamento dell'aritmetica, con tutte le potenzialità che questo comporta.
Questo significa non ignorare la continuità con l'aritmetica. Lo studio dell'algebra deve tener conto delle sue profonde, storiche radici nell'aritmetica, terreno naturale su cui costruire i successivi sviluppi. Già ai primi livelli di scolarità, all'inizio dell'uso del simbolismo, il bambino deve cominciare a capire che può tradurre il suo pensiero in un linguaggio diverso da quello naturale. Anche se ancora non pensa in questa nuova lingua, ma traduce soltanto, il bambino deve capire che la nuova lingua ha regole sue proprie, che vanno rispettate. Come abbiamo già osservato, la traduzione può avere il carattere di una stenografia o di una ideografia e può esserci consonanza o dissonanza tra linguaggio naturale e scrittura simbolica. Certi problemi aritmetici possono risultare in dissonanza (sia per motivi sintattici che semantici) con i modelli concettuali standard degli allievi, fortemente integrati in un linguaggio sincopato di tipo aritmetico. Per risolvere questi problemi gli allievi devono ristrutturare di continuo i loro modelli, spesso trovando, proprio in questi ultimi, forti ostacoli al processo di ristrutturazione. Quando la ristrutturazione avviene, l'aritmetica contiene già il germe dei problemi algebrici.

1.3 Difficoltà e misconcezioni nell'apprendimento dell'algebra.

Molti errori riscontrabili nei protocolli degli allievi affondano le loro radici nel rapporto dialettico, mai superato, tra aspetti procedurali e aspetti strutturali, riscontrabili rispettivamente ma non esclusivamente nell'aritmetica e nell'algebra.

Nella letteratura (Booth [84], [88]) sono riportati comportamenti tipici di allievi che si sono trovati in difficoltà di fronte a problemi che non ammettevano, come risposta, un numero.
I problemi proposti erano del tipo:
1. *Una navicella spaziale viaggia per "stadi" che sono tutti della stessa lunghezza:*

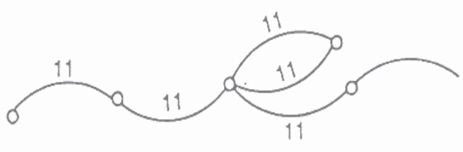

Fig. 2

Se ogni stadio è lungo 11 anni luce, come potresti descrivere la distanza percorsa dalla navicella in y stadi?
2. *Come potresti rappresentare il perimetro di questa figura, sapendo che una parte non è disegnata e che ci sono n lati, ciascuno di lunghezza 5?*

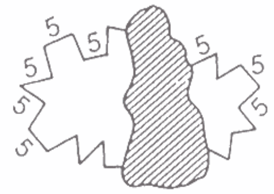

Fig 3

In questi problemi è stata riscontrata una forte riluttanza, in allievi di 14 anni, a rinunciare alla ricerca di un numero come risposta e accettare invece, come risposta, un'espressione contenente un'incognita.
Uno studio recente di Bednarz e collaboratori [92] ha focalizzato l'attenzione sull'analisi delle strategie spontanee osservate in studenti di 14-15 anni, che avevano seguito un anno di corso di Algebra. L'analisi rileva che le differenze tra le basi concettuali che sottostanno alle soluzioni di tipo aritmetico o algebrico si riflettono in differenti rappresentazioni del problema stesso. Nelle soluzioni di tipo aritmetico, le operazioni fatte su quantità conosciute richiedono un costante controllo semantico delle quantità in rapporto alla situazione. Nelle soluzioni di tipo algebrico, le relazioni espresse nel problema sono integrate fin dall'inizio in un'espressione statica del problema stesso, il che richiede nondimeno una sua specifica rappresentazione.
Uno studio di Boero e Shapiro [92], rivolto ad analizzare l'influenza di alcuni fattori sulle strategie di soluzione di problemi aritmetici con più di un'operazione, mette in luce la prevalenza di strategie anticipatorie, che gli autori chiamano *pre-algebriche*, in allievi che avevano ricevuto un'istruzione "non tradizionale", che li aveva cioè incoraggiati verso una varietà di strategie senza rigide richieste di formalizzazione e schematizzazione. Si avanza l'ipotesi che una vasta esperienza di *pensiero anticipatorio* possa favorire la scelta di strategie pre-algebriche: gli allievi, al fine di economizzare gli sforzi, pianificano operazioni che riducono la complessità del lavoro mentale.
La letteratura lascia comunque irrisolto quali specifiche connotazioni assuma nel contesto algebrico il pensiero anticipatorio, che è presente in tutto il pensiero matematico.
Nel rapporto tra aritmetica e algebra occorre tener conto del fatto che molti simboli e segni sono comuni. Nonostante l'apparente continuità, l'interpretazione data a questi simboli può essere diversa.
Per esempio nella scuola elementare il segno "=" tradizionalmente è usato per esprimere il risultato di un'operazione.
In problemi del tipo:
"*Daniele è andato dalla nonna e ha ricevuto in regalo 1000 lire. Poi ha comprato un libro del costo di 2300 lire. Ora ha 1500 lire. Quanti soldi aveva prima di andare dalla nonna?*"
è frequente riscontrare soluzioni del tipo:
1500+2300=3800-1000=2800
La simmetria e la transitività dell'uguaglianza sono palesemente violate. Il segno "=" è inteso come *da*, cioè come un segno direzionale da sinistra a destra (Kieran [81]). L'allievo cerca di rappresentare con il segno "=" la successione temporale delle sue operazioni mentali, finendo per distorcere, in funzione delle sue necessità, un segno che gli era stato presentato con ben altro significato.

Sempre dalla radice aritmetica sembrano derivare altri ostacoli cognitivi descritti in letteratura. Uno di questi sembra essere dovuto alla *mancanza del referente numerico* per la lettera (Davis [75], Wagner [81]): se l'allievo non vede le lettere come rappresentative di numeri, allora l'operare su di esse perde totalmente di significato.
Un'altra difficoltà sembra derivare dal diverso significato che la giustapposizione di due numeri ha in aritmetica e in algebra (Matz [79]). Se in aritmetica l'accostamento di due cifre denota un'addizione (43 = 40+3), in algebra l'accostamento denota moltiplicazione ($4a = 4 \cdot a$).
L'aspetto procedurale può fungere da ostacolo a produrre una soluzione che non sia un numero: difficoltà che Collis [74] aveva chiamato *difficoltà nell'accettare la mancanza di chiusura*.
Nei lavori di Davis [75] si parla del *dilemma nome-processo*, intendendo con questo il fenomeno secondo cui l'allievo non distingue precisamente il nome della cosa e la cosa stessa, il processo che genera il prodotto.
Per ovviare a questi tipi di errori sono interessanti alcuni esperimenti costruiti da Chalouh e Herscovics [88], basati su un'introduzione delle espressioni algebriche come risposte a problemi di facile visualizzazione. L'uso delle lettere avviene gradualmente, dapprima introducendo le lettere come quantità nascoste, poi come quantità sconosciute.
I due ultimi tipi di difficoltà saranno discussi con una certa ampiezza nella terza parte.
Si evidenzia ancora prevalenza dell'aspetto procedurale operativo nella tendenza, documentata da Kieran [88] e da Filloy e Rojano [89] a risolvere equazioni del tipo $ax+b=c$. In particolare Filloy e Rojano parlano di "taglio didattico" quando gli allievi sono posti di fronte a equazioni del tipo $ax+b=cx+d$. Qui soluzioni di tipo aritmetico, valide per le equazioni del tipo $ax+b=c$ diventano macchinose e impraticabili. Occorre infatti operare su ciò che è espresso nell'equazione mediante un approccio strutturale.
Altri errori ancora sono riscontrabili nell'uso del formalismo algebrico; per un'analisi dettagliata rimandiamo all'articolo di Boero [92], già citato, e a Chiappini e Lemut [91].
Si riscontrano facilmente errori nel portare termini da un membro all'altro di un'uguaglianza, errori nell'estendere indebitamente proprietà (es.: la proprietà distributiva della divisione rispetto alla somma), errori nei processi di trasformazione e nell'uso scorretto di una stessa lettera per designare più variabili e infine la mancanza di collegamento tra significati da rappresentare e forma algebrica di rappresentazione e la mancanza di consapevolezza delle regole sintattiche di trasformazione.
L'analisi di questi e di altri errori è, ovviamente, di rilevanza fondamentale per capire i processi cognitivi implicati nel pensare algebricamente e nel tradurre il pensiero in adeguato formalismo. Altrettanto fondamentale è la ricaduta di questi studi in termini di progettazione didattica.
Dopo l'opera di Viète, il cammino dell'algebra simbolica è caratterizzato da un'espansione continua, non immune da polemiche e opposizioni.
Nella prima metà del secolo XIX si sviluppa, all'interno della comunità dei matematici britannici, una vivace polemica sul significato dell'algebra e del suo simbolismo. Fino ad allora, l'algebra era stata considerata come *aritmetica universale*, cioè una disciplina specializzata ad esprimere in modo generale le regole che governavano le operazioni aritmetiche: concezione questa che limitava fortemente le sue finalità e potenzialità. Nasceva il bisogno di liberare l'algebra da ogni limitazione. Sfard [92] parla di *vocazione mistica* per affermare che le leggi dell'algebra dovevano essere trattate in modo del tutto generale. In quel tempo il matematico inglese G. Peacock affermava un *principio di permanenza* secondo il quale ogni forma, che fosse algebricamente equivalente ad un'altra espressa in simboli generali, doveva continuare ad esserle equivalente, qualunque cosa denotassero i simboli. Il termine *forma* indicava probabilmente un'espressione algebrica e *algebricamente equivalente* significa equivalente per trasformazioni algebriche.
In questa nuova visione, anche la variabile non poteva continuare ad essere un numero generalizzato, ma era una cosa in sé, svuotata di ogni significato esterno. L'algebra veniva ad essere completamente sganciata dall'aritmetica.
Secondo la teoria della reificazione, questo sarebbe un tipico esempio di "alienazione di un'idea matematica dalle sue origini operative per realizzare una piena reificazione " (Sfard, 1992).
Una volta liberata da ogni semantica esterna, l'algebra ha proseguito il suo cammino verso la creazione di oggetti matematici sempre più astratti, nel filone della cosiddetta matematica pura, che nasce a metà del secolo scorso.

Sicuramente si è molto lontani dalla visione della matematica come ancella delle scienze naturali: ora appare solo regina delle proprie costruzioni.
A margine di queste considerazioni storiche, sono utili alcune riflessioni didattiche.
In uno studio sperimentale compiuto su studenti dai 15 ai 17 anni di differenti abilità, sono state indagate le credenze implicite sul significato delle formule simboliche e delle loro trasformazioni (Linchevski e Sfard [91]; Sfard e Linchevski [92]). E' emerso un chiaro orientamento a vedere la formula come stringa di simboli arbitrari, governati da regole altrettanto arbitrarie. Anche nei casi di risposte corrette, tali risposte erano dettate il più delle volte dall'abitudine, piuttosto che da una comprensione profonda dell'aspetto relazionale.
In effetti, questi studenti avevano trattato le formule algebriche con estrema rigidità, non come strumenti di pensiero su cui fare le trasformazioni sintattiche secondo gli scopi impliciti nel problema. Per loro le formule sono pure etichette, che significano solo se stesse, e su di esse operano con regole sintattiche che non incorporano alcuna base di conoscenza (Linchevski e Sfard chiamano *pseudostrutturali* questi studenti).
Questi risultati richiedono un commento. Nessuno osa negare che le idee espresse dalla scuola facente capo a Peacock fossero generate dalla necessità di liberare l'algebra dal peso dei referenti semantici esterni, inizialmente utili ma a lungo andare restrittivi. Tuttavia questi concetti, svuotati di ogni semantica, erano il punto finale di un processo di astrazione da parte di chi era passato prima attraverso i contesti semantici e vi poteva ritornare facilmente, in ogni momento. Si confronti a tale riguardo la distinzione tra atteggiamenti formali *sofisticati* ed atteggiamenti formali *ignari* in Prodi [77] pag. 145.
In accordo con Sfard [92], riteniamo che questo ritorno non sia altrettanto agevole per coloro ai cui occhi si è mostrato solo il punto finale: per essi il linguaggio algebrico è vuoto, privo di significato.
Sembra che una delle cause principali di difficoltà riscontrate anche all'inizio dell'università stia proprio nell'incapacità di dar senso ai simboli algebrici come simboli di un linguaggio, che non sia una pura sintassi (Burton, [88]).
Da queste riflessioni emerge abbastanza evidente un certo eclettismo nelle concezioni dell'algebra come disciplina e, parallelamente, una pluralità di concezioni della nozione di variabile.
A questo proposito è interessante la tesi sostenuta da Usiskin [88], secondo cui le finalità dell'insegnamento dell'algebra sono intrinsecamente correlate alle concezioni della disciplina e all'uso della variabile.
Se l'algebra è vista come aritmetica generalizzata, allora è naturale pensare alla variabile come generalizzatore. Per esempio 3+5=5+3 viene generalizzato con $a+b=b+a$.
Se l'algebra è vista come studio di procedure per risolvere certi tipi di problemi (per esempio per trovare il numero che moltiplicato per 5 e sommato a 3 dà 40), allora la variabile assume il significato di incognita.
Quando invece l'algebra è vista come studio di relazioni tra quantità, allora la variabile è considerata come *qualcosa che varia*. Quando scriviamo $A=b\cdot h$ per l'area del rettangolo, stiamo descrivendo una relazione tra tre quantità e non compare nessuna incognita. Il senso di una formula del tipo $A=b\cdot h$ è profondamente diverso dal senso di una formula generalizzatrice del tipo $2n$.
Se si intende l'algebra come studio di strutture, questo implica concepire la variabile come segno del tutto arbitrario.
Infine, non dimentichiamo il grosso problema della variabile in informatica. Osserva Usiskin che in informatica l'algebra usa un cast diverso da quello usato in matematica. Dal punto di vista informatico, il nome di una variabile può essere pensato come indirizzo di un certo specifico registro di memoria, e il valore della variabile come il contenuto del registro di memoria (si veda Chiappini [90]).
Non vogliamo qui entrare in dettaglio nel legame tra algebra e informatica, tema che meriterebbe un seminario a parte. Ci sembra tuttavia di non poter fare a meno di segnalare alcuni temi degni di interesse e riflessione.
E' stato osservato che l'avvento della tecnologia computerizzata ha segnato un cambiamento di paradigma nel senso di Kuhn [70].
Allora sorgono spontanee domande del tipo: quale il ruolo dell'algebra nel nuovo paradigma tecnologico? quale l'uso del formalismo algebrico? quale costruzione di conoscenze formalizzate a livelli diversi di astrazione?

Tutte queste considerazioni impongono un esame attento dei problemi connessi all'apprendimento dell'algebra come linguaggio; problemi che affondano le radici nei primi livelli di scolarità, nel rapporto dialettico tra linguaggio naturale e linguaggio simbolico, tra semantica e sintassi, tra procedure e relazioni.
"Un'armonia di dualità opposte" potrebbe sintetizzare il tentativo, a livello di didattica, di far riconoscere agli allievi i valori profondi e le potenzialità del linguaggio algebrico.
Non più sintassi vuota, dunque, e neanche linguaggio occultatore di arcani misteri, come ebbe a scrivere Bertrand Russell, ricordando il momento in cui gli capitò di accostarsi all'algebra:
"Quando si arriva all'algebra e si deve operare con x e y, c'è il desiderio naturale di saper cosa sono realmente x e y. Questo, almeno, era il mio sentimento: io ho sempre pensato che l'insegnante sapesse che cosa erano x e y, ma che lei non me l'avrebbe mai detto".