L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica

a cura di Nicoletta Nolli, Silvano Rossetto, Sergio Zoccante

Introduzione 2
Riferimenti curricolari 2
Indicazioni curricolari 2
Prove Invalsi 3
Descrizione dell'attività 9
Attività 1 9
Attività 2 11
Attività 3 13
Attività 4 14
Attività 5 15
Indicazioni metodologiche 18
Spunti per un approfondimento disciplinare 19
Elementi per prove di verifica 19
Spunti per altre attività con gli studenti 20
Documentazione e materiali 21
Bibliografia 21
Sitografia 21
Proposta di attività per il corsista 22

Attività aggiornata nel 2015 grazie ai fondi PON-FSE relativi al progetto PON MATEMATICA (B-10-FSE-2010-3)

Introduzione

I numeri, visti come campo di esperienza, offrono una base per la costruzione del significato dei simboli algebrici e delle operazioni che ne permettono la manipolazione.

Da un lato, soltanto una profonda comprensione delle scritture che usiamo per rappresentare i numeri, delle relazioni fra insiemi numerici diversi, delle operazioni e delle loro proprietà, permette il passaggio al codice simbolico; d'altra parte, il ritorno dalla formula al numero è, per chi apprende, un modo per dare significato ai simboli.

Le proprietà delle operazioni negli insiemi numerici devono essere interiorizzate e non date per scontate, per arrivare a riconoscere l'equivalenza fra formule apparentemente diverse; la "decantazione" del significato deve poggiare su basi ben solide per poter applicare, quando necessario, la "macchina del calcolo".

È stato sottolineato che l'obiettivo dell'insegnamento dell'algebra è far sì che "gli allievi imparino a diventare padroni del senso dei simboli che usano, evitando quell'addestramento per memorizzazione di regole e meccanismi formali, il quale favorisce invece l'idea che il senso di una formula e delle trasformazioni su di essa consista soltanto nella sua struttura segnica. D'altra parte non si tratta di fare cose diverse o in più rispetto a quelle che di solito si fanno; si tratta solo di farle con una prospettiva, una metodologia e in un contesto diverso".
Nel trasformare una formula si può produrre nuova informazione e rivelare aspetti inconsueti della situazione a cui la formula si riferisce.
La "sensazione" dei simboli guida nella manipolazione di espressioni del linguaggio algebrico, passando a espressioni equivalenti (ossia aventi lo stesso significato), ma più adeguate a scoprire proprietà. (da "ALGEBRA, fra tradizione e rinnovamento", MIUR, 2005).

Questa attività è proponibile ad una classe prima, nell'ambito della prima introduzione sistematica del calcolo simbolico o calcolo algebrico (espressioni da preferire a "calcolo letterale").
Si presuppone che gli alunni abbiano già analizzato le proprietà delle operazioni e abbiano già usato lettere per *simbolizzare* e *generalizzare,* ma ancora non abbiano esplicitato le regole di calcolo.
La terminologia (monomio, monomio simile, parte letterale, coefficiente, polinomio) può già essere stata introdotta, oppure la si può introdurre alla fine di questa attività, in una fase di sistemazione.

Scopo principale dell'attività, come si deduce dalle frasi precedenti, è di *giungere alle regole di calcolo comprendendone il significato*, e di usare le formule stesse per risolvere problemi.

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari
Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 57 del 15/07/2010, Direttiva n. 65 del 09/07/2010) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che

ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni Nazionali per i Licei

Linee generali e competenze
Concetti e i metodi che saranno obiettivo dello studio: Gli elementi del calcolo algebrico.

Obiettivi specifici di apprendimento

Aritmetica e algebra
- Il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico. Lo studente svilupperà le sue capacità nel calcolo (mentale, con carta e penna, mediante strumenti) con i numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. In questo contesto saranno studiate le proprietà delle operazioni.
- Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.

Relazione e funzioni
Lo studente apprenderà a descrivere un problema con un'equazione, una disequazione o un sistema di equazioni o disequazioni.

Istituti Tecnici e professionali

Aritmetica e algebra

Conoscenze
- I numeri; ordinamento e loro rappresentazione su una retta.
- Le espressioni letterali e i polinomi. Operazioni con i polinomi.

Abilità
- Utilizzare le procedure del calcolo aritmetico (a mente, per iscritto, a macchina) per calcolare espressioni aritmetiche e risolvere problemi.
- Padroneggiare l'uso della lettera come mero simbolo e come variabile.

Relazioni e funzioni

Abilità
Risolvere problemi. Collegamenti con altre discipline e situazioni di vita ordinaria.

Prove Invalsi

a.s. 2011/2012 - Domanda D7
Scuola secondaria di II grado – Classe I

D7. **Una compagnia telefonica propone quattro tariffe K, X, Y e Z, tra le quali i clienti possono scegliere. Le tariffe sono descritte nella seguente tabella:**

Tariffa	Costo alla risposta (in centesimi di euro)	Costo per minuto di conversazione (in centesimi di euro)	Costo per ogni SMS (in centesimi di euro)
K	0	18	5
X	4	12	5
Y	8	6	10
Z	8	12	0

a. **Giulia ha scelto la tariffa Y. Quanti centesimi di euro deve pagare per una telefonata della durata di 3 minuti?**

A. ☐ 14

B. ☐ 18

C. ☐ 24

D. ☐ 26

b. **Marta vuole scegliere la tariffa per lei più conveniente. Di solito ogni giorno invia 25 SMS e fa 20 telefonate, ciascuna delle quali dura in media 1 minuto. Sulla base delle precedenti informazioni, quale fra le quattro tariffe è la più vantaggiosa per Marta?**

A. ☐ La tariffa K

B. ☐ La tariffa X

C. ☐ La tariffa Y

D. ☐ La tariffa Z

Soluzione INVALSI
D7_a: D
D7_b: D

Commento
L'allievo deve saper esprimere la tariffa con una formulazione del tipo:
costo = costo_telef x num_telef + costo_minuto x minuti+cost_sms x num_sms
e saperla applicare alle diverse opzioni. La domanda a. avrà quindi risposta costo = 8 + 6 x 3 = 26 (D.), con un calcolo piuttosto semplice. La domanda b. richiede una maggiore elaborazione (e cura) del calcolo che produce i risultati, da cui la risposta D.

Tariffa	Costo alla risposta (in centesimi di euro)	Costo par minuto di conversazione (in centesimi di euro)	Costo per ogni SMS (in centesimi di euro)	Totale tariffa
K	0x20	18x20	5x25	485
X	4x20	12x20	5x25	445
Y	8x20	6x20	10x25	530
Z	8x20	12x20	0x25	400

a.s. 2011/2012 - Domanda D11
Scuola secondaria di II grado – Classe I

D11.

a. **Osserva e completa la seguente tabella.**

n	$(n-1)n(n+1)$
2	$1 \times 2 \times 3$
3	$2 \times 3 \times 4$
4	....
5	....

b. **Giulia afferma: "Per ogni numero naturale n maggiore di 1, $(n-1)n(n+1)$ è divisibile per 6". Spiega perché Giulia ha ragione.**

....

....

....

c. **Francesco afferma: "$n^3 - n$ è uguale a $(n-1)n(n+1)$". Dimostra che Francesco ha ragione.**

....

....

....

Soluzione INVALSI

<table>
<tr><td>D11a</td><td></td><td><table><tr><td>n</td><td>$(n-1)n(n+1)$</td></tr><tr><td>2</td><td>1 x 2 x 3</td></tr><tr><td>3</td><td>2 x 3 x 4</td></tr><tr><td>4</td><td>3 x 4 x 5</td></tr><tr><td>5</td><td>4 x 5 x 6</td></tr></table></td><td>1 se e solo se vengono completate in maniera corretta tutte le voci della tabella
0 negli altri casi</td><td>NU</td><td>1</td></tr>
</table>

D11b	La risposta è corretta se fa esplicito riferimento al fatto che il prodotto di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 6, perché tra tre numeri naturali consecutivi c'è (almeno) un multiplo di 2 (numero pari) e c'è un multiplo di 3. Le risposte sono ovviamente accettabili anche se gli studenti usano "divisibile" al posto di "multiplo".	**1 risposta corretta 0 risposta errata**	NU	6
D11c	$(n-1)n(n+1) = (n^2-n)(n+1) = n^3+n^2-n^2-n = n^3-n$ Oppure svolgono prima il prodotto notevole ottenendo $(n^2-1)n = n^3-n$ o altre espressioni equivalenti	**1 risposta corretta 0 risposta errata**	NU	6

Commento

Il quesito propone agli allievi tre diversi compiti:

- applicare una formula a qualche caso in sequenza;
- osservare una sequenza di valori (o espressioni) e riconoscerne una proprietà comune: in questo caso specifico riconoscere la presenza in ogni riga di un numero pari e di un multiplo di 3;
- applicare le note regole del calcolo letterale per ritrovare un risultato dato.

Ci si aspetta che gli allievi risolvano agevolmente il primo e il terzo compito, mentre incontrino maggiore difficoltà nel secondo che chiede di decodificare il dato 'divisibile per 6' in 'divisibile per 2 e per 3'.

a.s. 2011/2012 - Domanda D18
Scuola secondaria di II grado – Classe I

D18. **Armando, Bruno, Caterina e Daniela hanno opinioni diverse sul numero che si ottiene dividendo a^4 per 2.**

Armando dice: "si ottiene $\left(\frac{a}{2}\right)^4$"

Bruno sostiene: "si ottiene a^2"

Caterina dice: "si ottiene $\frac{1}{2}a^4$"

Daniela afferma: "si ottiene $\left(\frac{a}{2}\right)^2$"

Chi ha ragione?

A. ☐ Armando

B. ☐ Bruno

C. ☐ Caterina

D. ☐ Daniela

Soluzione INVALSI: C

Commento
Il quesito chiede di applicare una operazione espressa in modo verbale ad una espressione di calcolo letterale. Si può osservare il fatto che i distrattori rappresentino errori tipici degli allievi nell'eseguire il calcolo letterale.

a.s. 2010/2011 - Domanda D14
Scuola secondaria di II grado – Classe II

D14. **L'insegnante chiede: "Se n è un numero naturale qualsiasi, cosa si ottiene addizionando i tre numeri $2n+1$, $2n+3$ e $2n+5$?"**
Mario afferma: "Si ottiene sempre il triplo di uno dei tre numeri".
Luisa risponde: "Si ottiene sempre un numero dispari".
Giovanni dice: "Si ottiene sempre un multiplo di 3".
Chi ha ragione?

☐ A. Tutti e tre

☐ B. Solo Mario

☐ C. Solo Luisa

☐ D. Solo Giovanni

Soluzione INVALSI: A

Commento
Dal quaderno "*Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 - Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica – Classe seconda – Scuola secondaria di II grado*"

Per rispondere, gli studenti avrebbero potuto:

- utilizzare il calcolo letterale (un'addizione e una scomposizione mediante raccoglimento a fattor comune) riconoscendo nell'espressione $3(2n + 3)$ un numero dispari;
- individuare, nei tre numeri dati, tre numeri dispari consecutivi e, pensando alla struttura della semiretta dei numeri naturali, riconoscere che la somma di tre numeri dispari consecutivi è il triplo del secondo numero.

La percentuale di risposte corrette è di poco inferiore al 15%. L'opzione C è stata quella più scelta: non è strano, perché si vede immediatamente che è corretta. Infatti lavorando nel frame "pari-dispari" gli studenti possono concludere immediatamente che Luisa ha ragione, perché la somma di tre numeri dispari è dispari. A questo punto molti studenti potrebbero avere pensato "poiché ho individuato una risposta corretta, le altre sono errate". Una lettura più meditata avrebbe suggerito di verificare anche la correttezza dell'opzione A. Probabilmente questo equivoco si è andato ad aggiungere alla poca abitudine della prassi didattica italiana di usare l'algebra e il calcolo letterale come strumento di rappresentazione, di dimostrazione e, più in generale come strumento di pensiero; tutto ciò ha portato a una percentuale di risposte corrette molto bassa.
Come per D4, anche in questo caso si poteva esplorare il problema assegnando a n i valori successivi 0, 1, 2, ...

a.s. 2011/2012 - Domanda D28
Scuola secondaria di II grado – Classe II

D28. **In un torneo di calcio fra scuole una squadra guadagna 3 punti se vince, 1 punto se pareggia e nessun punto se perde. Una squadra ha vinto tante partite quante ne ha pareggiate. Quale dei seguenti punteggi non può aver totalizzato la squadra?**

☐ A. 24

☐ B. 28

☐ C. 30

☐ D. 32

Soluzione INVALSI: C

Commento
Dal quaderno "*Servizio Nazionale di Valutazione a.s. 2010/11 - Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica – Classe seconda – Scuola secondaria di II grado*"

Siano v le partite vinte e p le partite pareggiate. I punti fatti sono quindi 3v + p. Poiché p = v, allora i punti fatti sono 4p. Ciò vuol dire che il punteggio realizzato è un multiplo di 4. L'unico numero che non è multiplo di 4 è 30. Quindi 30 è l'unico punteggio che la squadra non può aver totalizzato.

Per rispondere lo studente può modellizzare il problema con un'equazione, oppure lavorare direttamente sul campo di esperienza dei multipli.
Il risultato delle risposte a questa domanda è piacevolmente e sorprendentemente positivo. Può anche darsi che molti studenti abbiano testato le risposte per tentativi: con 7 partite si hanno 21+7=28 punti, con 8 partite 24+8=32 punti e dunque non è possibile realizzare 30 punti; ma si deve valutare positivamente questo procedimento, perché esso ha un alto contenuto di esperienza scientifica e rappresenta il punto di partenza imprescindibile per obiettivi più elevati.

Descrizione dell'attività

Attività 1

Per evitare che gli allievi interpretino le formule algebriche come pure sequenza di segni, bisogna proporre situazioni problematiche in cui il linguaggio dell'algebra superi quello dell'aritmetica e diventi strumento per esprimere relazioni e generalizzare: un linguaggio utile sia per comprendere sia per dimostrare.

Pensa un numero

Nella seguente attività-stimolo l'insegnante, rivolgendosi all'intera classe, propone ad ogni studente di eseguire le istruzioni sul quaderno; l'insegnante non sa quale numero è stato scelto inizialmente da ogni studente.

- *Pensa un numero intero*
- *addiziona ad esso 12*
- *moltiplica il risultato per 5*
- *sottrai 4 volte il numero pensato*
- *addiziona al risultato 40*

L'insegnante chiede ad alcuni allievi il risultato finale; sottraendo 100 da tale risultato, "indovina" il numero di partenza.
L'insegnante giustifica quindi la sua "preveggenza" con il calcolo simbolico.
Invita alcuni alunni a riscrivere in ordine alla lavagna le operazioni date, senza eseguirle, come segue:

n.	**... + 12**	**...·5**	**... – 4·...**	**... + 40**	**cosa ottieni?**
7	7+12	(7+12)·5	(7+12)·5 – 4·7	[(7+12)·5 – 4·7] + 40	

L'insegnante chiede, quindi, di generalizzare l'espressione scritta in modo indipendente dal numero pensato:

n.	**... + 12**	**...·5**	**... – 4·...**	**... + 40**	**cosa ottieni?**
a	a+12	(a+12)·5	(a+12)·5 – 4·a	[(a+12)·5 – 4·a] + 40	

Invita infine a compilare una tabella come la seguente per riflettere su come sia possibile, con opportuni calcoli, rendere più semplici le espressioni.

Prima		**Dopo**
a+12	Questa espressione per ora non può essere scritta in modo diverso: è un'espressione semplice	**a+12**
(a+12)·5	Qui invece puoi applicare la ***proprietà distributiva*** del prodotto.	a·5 + 12·5
	E quindi:	**5·a + 60**
(a+12)·5 – 4·a	Usando il risultato appena trovato, riscriviamo:	5·a + 60 − 4·a
	Ora cambiamo l'ordine (*perché si può fare?*)	5·a − 4·a + 60
	E aggiungiamo una parentesi (*perché si può fare?*)	(5·a − 4·a) + 60
	Possiamo ora applicare la ***proprietà distributiva*** per l'espressione entro parentesi:	(5 − 4)·a + 60
	Eseguendo il calcolo si ha:	1·a + 60
	Ma 1 è *elemento neutro* per il prodotto, e allora:	**a + 60**
[(a+12)·5 – 4·a]+40	Usando il risultato appena trovato, riscriviamo:	a + 60 + 40
	E infine il risultato finale sarà:	**a + 100**

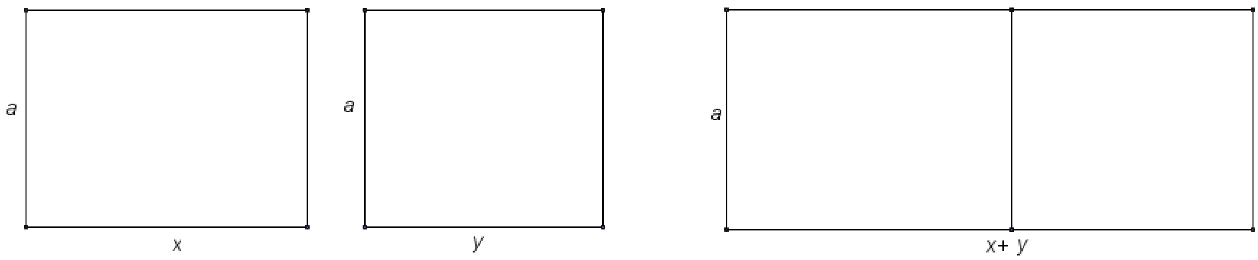
Ora si può svelare il "trucco" dell'insegnante!

L'insegnante fa poi osservare che le regole del calcolo non sono altro che l'applicazione delle regole dell'aritmetica; in particolare mette in evidenza il ruolo della **proprietà distributiva** che permette di "*distribuire*" un prodotto su una somma ma anche di "*raccogliere*" un fattore comune, a seconda di come si interpreti l'uguaglianza:

$$a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$$

Aspetto geometrico

L'insegnante illustra alla classe come questa *regola di calcolo* abbia una semplice interpretazione geometrica.
Se consideriamo due rettangoli, il primo di lati a e x, e il secondo di lati a e y, come in figura, questi possono essere disposti in modo da formare un unico rettangolo di lati a e $(x + y)$.



E la somma delle aree dei primi due rettangoli è uguale all'area del terzo:

$$a \cdot x + a \cdot y = a \cdot (x + y)$$

Segue ora una fase di generalizzazione e consolidamento. L'insegnante propone alla classe la semplificazione di espressioni simboliche in cui si "distribuisce" il prodotto rispetto alla somma (si vedano al riguardo le successive "indicazioni metodologiche"), senza trascurare l'operazione inversa di "raccogliere" il fattore comune.
È importante far rilevare da subito agli allievi che non c'è tra le due una scrittura "migliore" in assoluto, ma che il raccogliere o il distribuire è funzionale allo scopo che ci si prefigge.
Il materiale per questa fase può essere trovato in un qualsiasi manuale. Si raccomanda solo di non eccedere nell'esecuzione di esercizi eccessivamente complicati e fini a se stessi.

Attività 2

In questa attività e nella successiva si vogliono introdurre i prodotti notevoli, quadrato di un binomio e differenza di due quadrati, deducendoli prima dalle proprietà dei numeri e poi dando loro una interpretazione geometrica

Pensa un numero: una sfida

Nella seguente attività l'insegnante si rivolge all'intera classe, e la sfida a capire il funzionamento del seguente gioco.

- pensa un numero intero
- addiziona ad esso 5
- eleva il risultato al quadrato
- ora sottrai il quadrato del numero pensato
- sottrai ancora 10 volte il numero pensato.

L'insegnante chiede ad alcuni allievi il risultato finale: fa notare che è indipendente dal numero di partenza.
Come giustificare questo fatto?

Per indirizzare gli studenti alla spiegazione del gioco, l'insegnante li invita ad eseguire ognuno i calcoli sul quaderno, usando i numeri scelti da alcuni di loro, come nelle tabelle sottostanti.

(prima tabella)
– scrivi il numero pensato
– addizionalo a 5

– eleva il risultato al quadrato e scrivi il risultato

(seconda tabella)
– eleva al quadrato il numero di partenza
– addiziona al risultato il numero di partenza moltiplicato per 10
– e infine addiziona il nuovo risultato a 25

n.	**… + 5**	**$(…)^2$**	**cosa ottieni?**
7	7+5	$(7+5)^2$	…

$(…)^2$	**… + 10·…**	**… + 25**	**cosa ottieni?**
7^2	$7^2 + 10·7$	$7^2 + 10·7 + 25$	…

Come nella scheda 1, queste tabelle consentono di passare ad una formulazione generale e simbolica dei calcoli; tuttavia non portano alla giustificazione dell'uguaglianza.
A questo serviranno le fasi successive 2 e 3.

Giustificazione
L'insegnante pone esplicitamente il problema di giustificare l'uguaglianza

$(a + 5)^2 = a^2 + 10a +25$

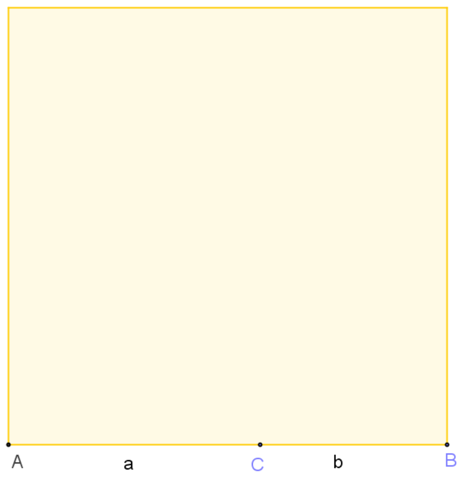
Usa la proprietà distributiva per sviluppare il calcolo, facendo rilevare la "*bidirezionalità* dell'uguaglianza" (cioè il fatto che l'uguaglianza si può leggere da sinistra verso destra, ma anche da destra verso sinistra):
$(a + 5)^2 = (a+5)\ (a+5) = (a+5)\ a + (a+5)\ 5 = a^2 + 5a + 5a + 25 = a^2 + 10a + 25$.

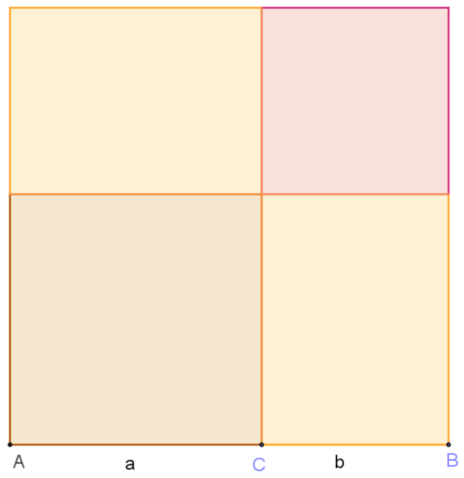
Generalizzazione
L'insegnante propone poi il quadrato $(a + b)^2$ e suggerisce di applicare anche ora la proprietà distributiva per sviluppare il calcolo.

Aspetto geometrico
Successivamente, si presenta alla classe la seguente proposta di lavoro.

Dal Libro II degli Elementi di Euclide, Proposizione 4:
"*Se si divide una linea retta* [*cioè un segmento*] *in due parti, il quadrato di tutta la retta* [*segmento*] *è uguale alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti stesse*".

Questa semplice attività ha lo scopo di fornire un significato geometrico alla formula del quadrato e di favorire anche una corretta memorizzazione della formula stessa.
Inoltre si presta all'estensione al quadrato del trinomio $(a + b + c)^2$.
Per la visualizzazione dei quadrati, l'insegnante può fare riferimento al file GeoGebra allegato (Numeri_7_sk2)





Infine, l’insegnante consolida quanto visto utilizzando esercizi del manuale. Si raccomanda anche in questo caso di proporre sia esercizi di “espansione” di quadrati, sia di “riconoscimento” di quadrati, facendo rilevare la bidirezionalità dell’uguaglianza.

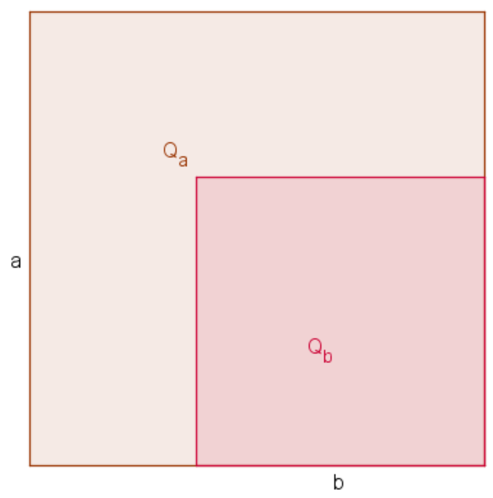
Attività 3

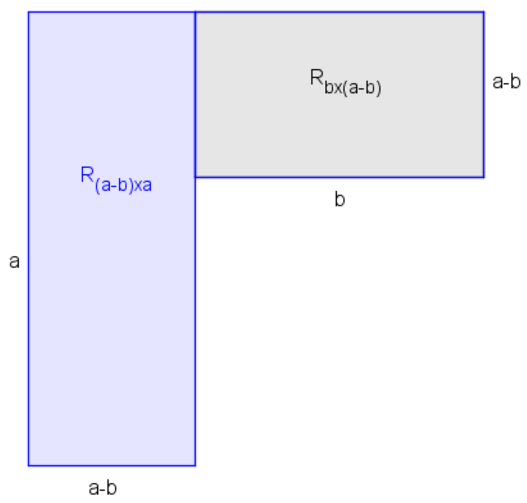
Differenza di due quadrati

In questa attività l’insegnante pone subito il problema di trovare una formula per il prodotto $(a + b)\cdot(a - b)$, partendo da un caso numerico, poi sostituendo un numero con una indeterminata, ed infine passando al caso generale.
Si tratta, anche in questo caso, dell’applicazione della proprietà distributiva.

Aspetto geometrico

Questa fase ha lo scopo di fornire un significato geometrico alla formula della differenza di due quadrati.
L’insegnante propone alla classe di rappresentare geometricamente il prodotto notevole. Ci sono più strategie possibili. In particolare, per la visualizzazione l’insegnante può fare riferimento al file GeoGebra allegato (Numeri_7_sk3).
La scomposizione suggerita nella figura è molto semplice, ma richiede un piccolo passaggio algebrico: le aree dei due rettangoli a destra sono a(a–b) e b(a–b) e, di conseguenza, l'area di tutta la regione indicata è (a+b)(a–b).





Attività 4

Scopo di questa quarta attività è mostrare agli alunni che le "astratte" regole del calcolo simbolico risultano utili nei calcoli: l'algebra, qualche volta, può venire in aiuto all'aritmetica.

Il Mago Girò
Viene presentata alla classe la seguente storia.
Il Mago Girò si vanta di saper "indovinare" il quadrato di un numero che finisce con 5.

Giacomo lo mette alla prova e a raffica spara:
il quadrato di 45.
Il Mago Girò risponde senza esitare: 2025.
Il quadrato di 85.   E il mago: 7225.
Sempre più difficile: il quadrato di 115.
Il mago ci pensa un po' di più, ma dopo poco risponde 13225
Giacomo pensa di mettere in difficoltà il Mago chiedendo il quadrato di 1005, ma Girò sembra essere addirittura più veloce di prima, rispondendo 1010025.

Il Mago Girò possiede davvero doti magiche che gli permettono di "indovinare" i quadrati, oppure calcola a mente il risultato, magari applicando qualche "trucco" algebrico?

Giacomo è davvero molto stupito, ma il mago gli spiega:
"*È facile*. *Moltiplico il numero formato dalle cifre che precedono* 5 *per il suo successivo; scrivo il prodotto così ottenuto e di seguito 25: così ottengo il quadrato richiesto! Prova tu ad applicare questo procedimento ai numeri che mi hai dato!"*

Cerca di giustificare il procedimento descritto dal Mago Girò.

L'insegnante può giustificare il procedimento in vari modi, in particolare ricordando il prodotto notevole
$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$, da cui $a^2 = (a + b)\ (a - b) + b^2$.
Ad esempio, vogliamo trovare il quadrato del numero a = 45; come valore di b prendiamo sempre 5.

Allora $\quad a + b = 45 + 5 = 50 \quad$ e $\quad a - b = 45 - 5 = 40$;
risulta $\quad 45^2 = (a + b)\ (a - b) + b^2 = 50 \cdot 40 + 25$
e quindi $\quad 45^2 = 50 \cdot 40 + 25 = 2000 + 25 = 2025$.

Le prime due cifre sono il prodotto di 4 per 5 (il successivo di 4); le ultime due cifre sono 25.

Calcolo mentale rapido: altri trucchi "magici"
Questa seconda fase costituisce un altro momento importante per convincere gli alunni dell'utilità del calcolo algebrico.
Si può pensare ad un'ora nella quale organizzare una gara di calcolo mentale, suddividendo la classe in squadre e proponendo esercizi del tipo descritto nel seguito.

1ª prova
Il trucco del mago funziona quando il numero di cui vuoi fare il quadrato è a metà tra due decine (quando termina con 5), ma non funziona negli altri casi.

Ecco ora come il calcolo simbolico, in particolare la formula del ***quadrato di un binomio***, ti permette di trovare il quadrato anche degli altri numeri. Questo metodo è conveniente se i numeri terminano con cifre “vicine” a 0.
Due esempi:

$21^2 = (20+1)^2 = 400 + 2\cdot 20 + 1 = 441$

$19^2 = (20-1)^2 = 400 - 2\cdot 20 + 1 = 361$

Prova tu, ora, a calcolare in modo rapido i quadrati di alcuni numeri.
In realtà, gli ultimi esempi sono discutibili, perché probabilmente per alcuni studenti è più rapido eseguire direttamente la moltiplicazione 21×21 che non far ricorso al quadrato del binomio. D'altra parte, è importante che gli studenti si impadroniscano di più strade per arrivare a un risultato, anche per attivare forme di controllo.

2ª prova
Ora osserva come sia possibile usare la formula della ***differenza di due quadrati*** per calcolare alcuni prodotti:

$19\cdot 21 = (20 - 1)\cdot(20 + 1) = 20^2 - 1 = 399$

$14\cdot 16 = (15 - 1)\cdot(15 + 1) = 15^2 - 1 = 225 - 1 = 224$

$48\cdot 52 = (50 - 2)\cdot(50 + 2) = 2500 - 4 = 2496$

$97\cdot 103 = \ldots$

Hai tempo tre minuti per scrivere altri prodotti analoghi a quelli degli esempi sopra presentati.

Attività 5

In questa ultima attività si vuole che gli alunni arrivino ad intuire il “potere” dei simboli che permettono di esprimere, comunicare, generalizzare e risolvere problemi.
Rafforzando l’idea, già esplicitata nell’attività precedente, che il calcolo simbolico non è un’attività esecutiva e ripetitiva priva di significato, si vuole sottolineare l’importanza di “*saper trasformare un’espressione algebrica in un senso desiderato*” (tratto dal § 2 L’Algebra, *Syllabus di Matematica*, pubblicato nel 1980 dalla Commissione Italiana per l’Insegnamento della Matematica dell’UMI).
Nel trasformare una formula si produce nuova informazione e si rivelano aspetti diversi della situazione a cui la formula si riferisce.

Il prezzo dell’abito
In questa prima fase si può presentare un problema che evidenzi la necessità di passare ai simboli per essere risolto (il buon senso è indubbiamente utile, ma, talvolta, porta risposte errate).
Si propone alla classe il seguente quesito:

Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
(tratto da: ESAMI DI STATO LICEO SCIENTIFICO 2007)

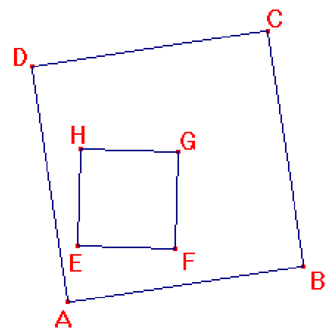
L'insegnante deve invitare gli alunni ad una attenta lettura del testo, prima di iniziare la discussione, favorendo le congetture da parte dei ragazzi.
Per prima cosa bisogna chiedersi se aumentare il prezzo del 6% e poi diminuirlo della stessa percentuale, sia la stessa cosa che diminuirlo del 6% e poi aumentarlo del 6%.
Alcuni ragazzi probabilmente tenderanno a concludere che i due procedimenti conducono allo stesso risultato e che le due operazioni in successione non modificano il prezzo dell'abito (probabilmente per una sorta di "compensazione").
Altri diranno che il prezzo finale è condizionato dall'ordine con cui si eseguono le due operazioni: in un caso il prezzo dell'abito aumenta e nell'altro diminuisce.
L'insegnante a questo punto, se non sorge spontanea, deve indurre l'esigenza di passare ai simboli per chiarire la situazione.

Aumento del 6% su p**:** p + 0,06p = 1,06p
e poi diminuzione del 6% su 1,06p**:**
1,06p – 0,06x1,06p = 1,06p(1–0,06) =(1,06)(0,94)p
diminuzione del 6% su p**:** 0,94p
e poi aumento del 6% su 0,94p**:** (0,94)(1,06)p
(i calcoli sono analoghi ai precedenti).

Le due situazioni conducono allo stesso risultato.
Il passaggio ai simboli ha evidenziato in modo chiaro e conciso che l'ordine in cui vengono eseguite le operazioni è ininfluente e che c'è sempre una diminuzione del prezzo dell'abito.

Lo stagno

L'attività prosegue evidenziando ora come un'opportuna manipolazione algebrica consenta di arrivare con più facilità alla soluzione di un problema.
Alla classe viene presentata la seguente situazione:



Un appezzamento di terreno è costituito da un quadrato (ABCD nella figura). All'interno di esso c'è uno stagno di forma quadrata (EFGH).
Si sono recintati con della rete metallica sia il perimetro esterno del terreno, sia il bordo dello stagno; in tutto sono stati necessari 360 m di rete; la recinzione di ABCD, inoltre ha richiesto 280 m di rete in più rispetto alla recinzione di EFGH.
Qual è l'area della parte calpestabile dell'appezzamento?

Dopo una discussione in classe, gestita dall'insegnante, si dovrebbe arrivare ad indicare, per esempio, con a e b le misure del lato del terreno e del lato dello stagno, e quindi scrivere le seguenti relazioni dedotte dai dati del problema:
$4a + 4b = 4(a + b) = 360$ e $4a - 4b = 4(a - b) = 280$.

Il passo fondamentale è, a questo punto, scrivere l'espressione dell'area calpestabile del terreno $a^2 - b^2$ e sfruttare il prodotto notevole $(a+b)(a-b)$ in modo da sostituire i valori di $(a+b)$ e $(a-b)$ ricavati dalle relazioni precedenti. Il risultato è 6300m^2.

Naturalmente, si possono anche ricavare i valori di *a*, *b* risolvendo un semplice sistema, ma il problema non lo richiede. Un'altra cosa interessante da notare è che in questo caso, l'irregolarità della figura sconsiglia la valutazione per scomposizione di aree: l'equiscomponibilità di poligoni non è efficace.

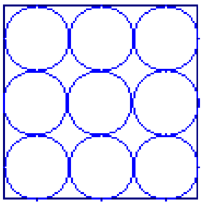
I barattoli di conserva

Nella terza fase si propone un problema in cui è necessario passare ai simboli per generalizzare e verificare una congettura.
La classe può lavorare in gruppo, oppure l'insegnante può guidare una discussione che stimoli le congetture da parte dei ragazzi.

Viene presentata la seguente situazione.

In un contenitore cubico di lato 1 m si vogliono sistemare dei barattoli cilindrici (tipo conserve alimentari) tutti uguali fra di loro, disposti in file parallele ed a piani sovrapposti (i barattoli devono essere tangenti tra di loro e ai lati della scatola come in figura).
Per meglio utilizzare lo spazio converrà usare barattoli grandi o piccoli?

(da "Mondo reale e modelli matematici", di B. Spotorno e V. Villani - La nuova Italia ed., 1976)



Il primo passo verso la soluzione del problema è una sua schematizzazione, che permette di comprendere fra l'altro che, al crescere della base dei barattoli, corrisponde una diminuzione del loro numero.
È quindi opportuno definire un'altezza convenzionale per i barattoli, ad esempio di 10 cm per barattolo, qualunque sia il numero dei barattoli disposti in ogni fila.

Ci si aspetta che i ragazzi formulino ipotesi; l'insegnante deve indurli a verificarle.
Si può proporre a ciascuno di essi di calcolare il volume occupato dai barattoli disposti sul fondo del contenitore in una situazione specifica; per esempio, con l'aiuto di un foglio elettronico si esamina la situazione di n = 1, 2, 3, 4, 5, … barattoli tangenti ad una parete del contenitore (numero complessivo dei barattoli disposti sul fondo 1, 4, 9, 16, 25, …).
Dal confronto fra i singoli casi numerici si noterà che i risultati che si ottengono per rispondere al quesito sono tutti uguali, indipendentemente dal numero di barattoli considerato: è lecito pensare che ciò accada sempre?
A questo punto, per confermare la congettura, è necessario scrivere la formula del volume occupato dai barattoli disposti sul fondo in funzione degli n barattoli tangenti ad una parete del contenitore: tenendo conto che il raggio di ciascun barattolo è

uguale a $\frac{1}{2n}$, l'area di base di ciascun barattolo è $\frac{\pi}{4n^2}$. Essendo i barattoli in tutto n^2, il volume occupato è sempre $\frac{\pi}{4}$.

Questo semplice calcolo algebrico generalizza tutte le prove numeriche e conferma che lo spazio occupato dai barattoli situati su uno stesso piano rimane costante. Naturalmente, di conseguenza, rimane costante anche lo spazio vuoto.
È bene far notare che l'altezza del barattolo si può omettere perché non incide sul risultato. Ci si può quindi limitare alle aree di base.

Indicazioni metodologiche

Come rilevato, questa attività si colloca nel momento centrale dell'introduzione al calcolo simbolico, quando si formalizza quell'insieme di regole di calcolo che costituisce il tratto caratterizzante dell'algebra.
È a questo punto che può verificarsi quella frattura tra simboli e significato che provoca poi la troppo diffusa percezione "l'algebra? Per me è arabo".

La proposta qui presentata colloca il calcolo simbolico nell'ambito di attività che consentono di *mantenere* il significato delle regole.

In quest'ottica, le prime due attività suggeriscono un itinerario per arrivare a regole di base del calcolo simbolico in stretta connessione con le proprietà del calcolo numerico, delle quali sono la generalizzazione. Nel passaggio dall'aritmetica all'algebra assume un ruolo fondamentale la riflessione sulla *proprietà distributiva* del prodotto rispetto alla somma, che consente di provare la correttezza formale dei prodotti notevoli (in generale, non soltanto di quelli qui presentati). Non va tuttavia tralasciato di osservare come siano presenti anche le altre proprietà delle operazioni: questo può essere fatto in una delle fasi di sistemazione dell'argomento.
Vi è anche un'attenzione all'interpretazione geometrica delle regole di calcolo. Ciò favorisce la memorizzazione delle regole stesse, e facilita la comprensione della loro giustificazione.

Se nelle prime attività, *l'aritmetica aiuta l'algebra,* in quelle successive *l'algebra aiuta l'aritmetica.*
Infatti le attività 4 e 5 hanno lo scopo di illustrare la *spendibilità* del calcolo simbolico, sia nei confronti del calcolo aritmetico, sia nella risoluzione di problemi.
Si pone un'attenzione particolare al *calcolo mentale rapido*, attività spesso dimenticata nelle nostre scuole, e invece di grande utilità, perché consente di mantenere "confidenza" con i numeri e di rilevarne proprietà inaspettate.

Con l'attività 4 (ed altre attività di approfondimento) si mostra come l'algebra permetta di sviluppare tecniche di calcolo semplici e potenti, ma insieme sofisticate.
Nell'attività 5 sono presentati problemi che evidenziano la necessità di passare ai simboli per essere risolti (fase 1) e problemi in cui una manipolazione algebrica opportuna consente di arrivare alla soluzione (fase 2 e 3). Il terzo problema in particolare si presta ad un'attività di analisi e di discussione in classe che può portare gli allievi a capire la valenza delle trasformazioni algebriche.

In “Spunti per altre attività con gli studenti” abbiamo proposto un folto gruppo di applicazioni. Alcune di queste possono essere affrontate in una fase posteriore, quando il calcolo simbolico sia già stato acquisito.

Spunti per un approfondimento disciplinare

Villani: *Cominciamo da zero*, Pitagora Editrice, Bologna (2003).
Prodi - Villani: *Anche il calcolo letterale può essere intelligente*, "Archimede", n. 4, 1982.
Arzarello e altri: *Temi e problemi della ricerca didattica in algebra*, in L'algebra come strumento di pensiero, Progetto strategico del C.N.R. 1996.

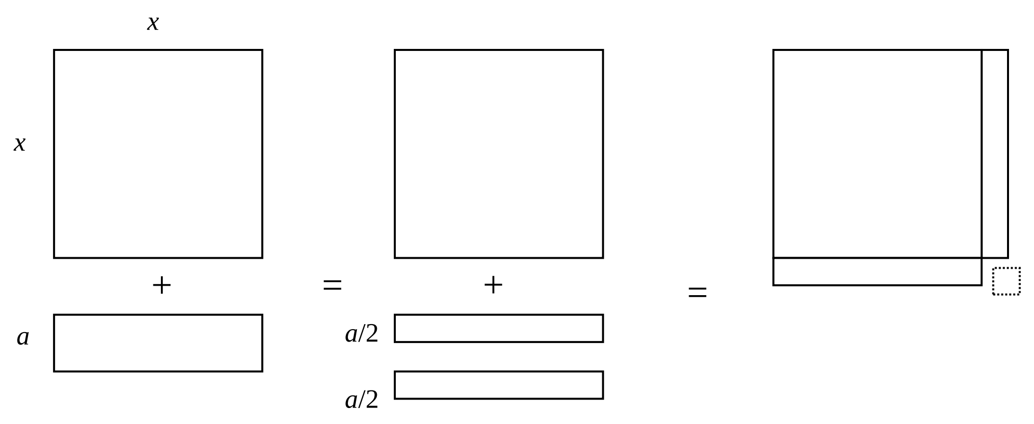
Elementi per prove di verifica

1) Sia x la misura, espressa in cm, del lato di un quadrato, con $x>2$. Si diminuisce il lato di 2 cm.

   Fra le tre espressioni algebriche seguenti, qual è quella che esprime la diminuzione dell’area del quadrato?
   a) $x^2 - 2^2$
   b) $x^2 - (x - 2)^2$
   c) $(x - 2)^2 - x^2$
   Mostrare che la diminuzione considerata può essere espressa da $4(x - 1)$.

2) Considera un qualunque numero intero, moltiplicalo per il numero che si ottiene aggiungendo ad esso 2; al prodotto così ottenuto aggiungi 1.
   Il risultato che ottieni è un quadrato perfetto. Dopo aver verificato questa proprietà in due casi particolari, dimostrala in generale.

3) Considera la seguente figura



Esprimile “a parole” le relazioni suggerite dalla figura. Esprimi quindi in simboli:
– la somma suggerita nella prima figura
– la somma suggerita nella seconda figura

– la differenza suggerita nella terza figura
Scrivi l'uguaglianza algebrica che esprime la relazione tra la prima e la terza figura.

Ritieni che l'uguaglianza sia verificata anche nel caso in cui ad a e x si sostituiscano valori negativi, che non possono essere interpretati come misure di segmenti? Motiva la risposta.
Quale identità algebrica riconosci in questa uguaglianza?

4) Interpreta geometricamente e prova la seguente uguaglianza:

$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

5) Considera un triangolo; come varia la sua area se la base diminuisce del 10% e l'altezza aumenta del 10%?
Se si indica con p la percentuale di variazione della base e dell'altezza, qual è in percentuale la variazione dell'area?

Scarica la versione testuale degli esercizi (allegato esercizi)

Spunti per altre attività con gli studenti

1) *La dilatazione dei materiali* (come passare dalla formula della dilatazione lineare alla formula della dilatazione superficiale e a quella di dilatazione cubica)
L'algebra spiega perché il coefficiente di dilatazione superficiale è il doppio di quello di dilatazione lineare e il coefficiente di dilatazione cubica è il triplo di quello di dilatazione lineare.
Riportiamo di seguito i coefficienti nei tre casi:

$$l = l_0(1 + \lambda T) \qquad S = S_0(1 + 2\lambda T) \qquad V = V_0(1 + 3\lambda T)$$

Suggerimento
La spiegazione è quasi immediata, quando si osservi che
$S = l^2$ e $V = l^3$,
e si tenga conto che, dato il valore di λ, risulta $\lambda^3 << \lambda^2 << \lambda$: quindi, nello sviluppo

del quadrato e del cubo, i termini in λ di grado superiore al primo sono trascurabili.

2) Il numero $2^{48}-1$ è divisibile per due numeri compresi tra 60 e 70. Quali?

Suggerimento
Il numero $(2^{48}-1)$ si può vedere come la differenza di due quadrati e quindi si può scomporre in $(2^{24}+1)\cdot(2^{24}-1)$; ma $(2^{24}-1)$ si può scomporre ulteriormente in $(2^{12}+1)\cdot(2^{12}-1)$ e a sua volta $(2^{12}-1)$ in $(2^6+1)\cdot(2^6-1)$ che sono i numeri 65 e 63.

3) Si deve calcolare il quadrato del numero 12756964 disponendo solo di una calcolatrice che opera con 8 cifre. Come fare?

Suggerimento

È possibile sfruttare lo sviluppo del quadrato di un binomio, scrivendo:
$12756964 = 1275 \cdot 10000 + 6964$
e calcolando separatamente con la calcolatrice i due quadrati 1275^2, 6964^2 e il doppio prodotto $2 \cdot 1275 \cdot 6964$.

4) Tra tutti i rettangoli di perimetro $2p$, qual è quello di area massima?

Suggerimento
Indicando con x un lato, l'altro lato sarà $(p-x)$.
Trasformiamo l'espressione dell'area $x \cdot (p-x)$ sommando ed sottraendo $(p/2)^2$; otteniamo:
$x \cdot p - x^2 = x \cdot p - x^2 - (p/2)^2 + (p/2)^2 = p^2/4 - (x^2 - x \cdot p + p^2/4) = p^2/4 - (x - p/2)^2$
La formula scritta in questo modo mostra che l'area è massima quando
$(x-p/2)^2 = 0$
e quindi $x = p/2$.
Il rettangolo di area massima ha i due lati uguali, perciò è un quadrato.

Segnaliamo un'altra possibilità di scelta dell'incognita: l'idea è che un lato è minore di $p/2$ di una certa quantità, mentre l'altro è maggiore di $p/2$ *della stessa quantità*.
Se indichiamo con x questa quantità, il primo lato risulta $(p/2-x)$ e il secondo $(p/2 + x)$. Con questa scelta, il calcolo risulta più semplice.

Documentazione e materiali

Prodi – Villani: Anche il calcolo letterale può essere intelligente, "Archimede", n. 4, 1982
Arzarello e altri: *Temi e problemi della ricerca didattica in algebra, in L'algebra come strumento di pensiero, Progetto strategico del C.N.R. 1996*

Bibliografia

AAVV, *Matematica 2001*. Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola primaria. Scuola secondaria di I grado (scarica il documento)

AAVV, *Matematica 2003*. Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola secondaria di II grado (scarica il documento).

PISA 2003 Valutazione dei quindicenni a cura dell'OCSE, Roma, Armando Armando, 2004.

V. Villani, *Cominciamo da zero*, Pitagora Editrice, Bologna (2003).

Sitografia

Sito UMI - Matematica 2003
Sito dell'Unione matematica Italiana (UMI) - Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM)
Invalsi

Proposta di attività per il corsista

Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:
individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.
Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.

Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà.
Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.