Le camicie di Diofanto

Riadattata da Matematica 2001 da *Archetti, Barsanti*

Attività aggiornata nel 2015 grazie ai fondi PON-FSE relativi al progetto PON MATEMATICA (B-10-FSE-2010-3)

Introduzione
L'esempio è un problema che introduce l'allievo a trattare alcune semplici equazioni diofantee, precisamente le equazioni del tipo *Ax + By = C*, dove *A, B, C* sono numeri interi le cui soluzioni vanno analogamente ricercate fra gli interi {...-2, -1, 0, 1, 2, ...}.
La questione presenta interesse **didattico** e **matematico** per i seguenti motivi:

1. di un'equazione occorre sempre dire in quale ambito numerico (ad esempio, naturali, interi, razionali, ...) si cercano le soluzioni (ad esempio, un'equazione come $x^2 = 2$ non è risolubile nei razionali, ma lo è nei reali): per gli allievi è spesso automatico pensare, invece, che un'equazione sia risolubile (o meno) in assoluto. L'esempio introduce in modo naturale la necessità di limitarsi alle **soluzioni intere non negative**; poi l'esempio viene esteso anche alle ricerca delle soluzioni negative;
2. spesso gli allievi pensano che un'equazione (se ha soluzioni) **ha un'unica soluzione**; costa fatica immaginare che ne possa avere più di una o addirittura infinite: le equazioni diofantee qui indagate o non hanno soluzioni o ne hanno infinite. È una situazione in cui tipicamente non ci si trova con le solite equazioni di primo grado;
3. il problema proposto porta in modo abbastanza naturale a cercare una messa in formula della situazione per analogia con le equazioni di primo grado in un'incognita e quindi ad utilizzare le lettere (due in questo caso) per esprimere il costo dei due tipi di camicie che il commerciante deve acquistare; si ottiene una relazione numerica del tipo *Ax + By = C* (dove *A, B, C* sono numeri dati), che ha somiglianza con le equazioni conosciute, ma che non si sa trattare con algoritmi noti;
4. il fatto che non si posseggano algoritmi risolutivi (che non vanno assolutamente forniti agli allievi: il problema non vuol essere un'anticipazione di argomenti delle superiori) fa emergere la necessità di **esplorare gli interi** (non negativi) per cercare eventuali soluzioni; gli allievi procedono usualmente per tentativi ed errori, cioè con un metodo intuitivo e molto naturale, che favorisce la produzione di congetture e al contempo un approccio significativo alla formula che si ottiene (cioè un'equazione di primo grado canonica). Così facendo sono indotti a leggere continuamente la formula che hanno davanti per interpretare quello che succede: la necessità di trovare i valori numerici di un'incognita (ad esempio, per la *y*), una volta fissato un valore per l'altra (ad esempio, per la *x*), li porta anche a trasformare la formula in modo opportuno.
Nella situazione giocano in modo essenziale le rappresentazioni su tabelle o su grafici: esse forniscono agli allievi un utile strumento che supporta e stimola i loro ragionamenti e le loro congetture. Tipicamente le strategie per tentativi ed errori corrispondono a ragionamenti del tipo "facciamo finta che" (ad es. che il commerciante acquisti 2 camicie da 40 euro): questi emergono e rendono particolarmente produttiva la situazione, rispetto alle competenze da acquisire, se il lavoro di soluzione viene condotto in modo da stimolare la discussione e la produzione di ipotesi da parte degli allievi (cfr. Nucleo Argomentare e Congetturare).

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari
Le attività M@t.abel hanno precisi *obiettivi di apprendimento* che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni Curricolari attualmente in vigore (D.M. 16 novembre 2012, n. 254) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni Curricolari e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento

dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado:

L'alunno:

- riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza;
- utilizza e interpreta il linguaggio matematico (piano cartesiano, formule, equazioni…) e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado

Numeri

- Individuare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri.
- Comprendere il significato e l'utilità del multiplo comune più piccolo e del divisore comune più grande, in matematica e in situazioni concrete.
- In casi semplici scomporre numeri naturali in fattori primi e conoscere l'utilità di tale scomposizione per diversi fini.

Relazioni e funzioni

- Interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà.
- Esplorare e risolvere problemi utilizzando equazioni di primo grado.

Prove INVALSI

a.s. 2013/2014 - Domanda D23
Scuola secondaria di I grado - Prova Nazionale

D23. ***a*** **e** ***b*** **sono due numeri naturali.**

Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera (V) o falsa (F).

		V	F
a.	Se a è un multiplo di 6 e b è un multiplo di 4, allora $a \cdot b$ è un multiplo di 8	☐	☐
b.	Se a è un multiplo di 5 e b è un multiplo di 10, allora $a \cdot b$ è divisibile per 25	☐	☐
c.	Se $a+b$ è pari, allora almeno uno dei due addendi, a oppure b, è pari	☐	☐
d.	Se a è divisibile per 10, allora $a+1$ è divisibile per 11	☐	☐

Soluzione INVALSI:
V
V
F
F

Commento
L'attività proposta prevede un approfondimento sui divisori e i multipli di un numero naturale, lo studente dovrebbe quindi essere pronto per affrontare quesiti che riguardano alcune caratteristiche generali di multipli e divisori.

a.s. 2011/2012 - Domanda E17
Scuola secondaria di I grado - Prova Nazionale

E17. Paolo acquista una tessera che consente l'ingresso a prezzo ridotto per un anno a un cinema della sua città. Il costo della tessera è di 12 euro e permette di pagare il biglietto di ingresso solo 5 euro per ogni spettacolo.

a. Completa la seguente tabella, dove *n* è il numero degli spettacoli e *S* il costo complessivo della tessera e dei biglietti di ingresso.

***n* (numero di spettacoli)**	***S* (costo complessivo in euro)**
0	12
1	....
2	....
3	....
4	....
5	....

b. Quale fra le seguenti formule consente di calcolare il costo complessivo *S* al variare del numero *n* di spettacoli?

A. ☐ $S = 12 + 5n$

B. ☐ $S = 12 + 5$

C. ☐ $S = 12 + n$

D. ☐ $S = 12n + 5n$

n (num. spettacoli)	*S* (costo compl. in euro)
0	12
1	17 o 12 + 5
2	22 o 12 + 10 o 12 + 5×2
3	27 o 12 + 15 o 12 + 5×3
4	32 o 12 + 20 o 12 + 5×4
5	37 o 12 + 25 o 12 + 5×5

n (num. spettacoli)	*S* (costo compl. in euro)
0	12
1	17 o 12 + 5
2	22 o 12 + 10 o 12 + 5×2
3	27 o 12 + 15 o 12 + 5×3
4	32 o 12 + 20 o 12 + 5×4
5	37 o 12 + 25 o 12 + 5×5

Soluzione INVALSI: E_17a:
E_17b: A
E_17b: D

Commento

Il quesito con i suoi tre item è un tipico problema di modellizzazione matematica di un fenomeno e di passaggio tra rappresentazioni diverse dello stesso fenomeno (tabella, formula, grafico). Nell'item a lo studente deve completare una tabella con valori numerici e quindi accorgersi che a partire da 12 il costo del biglietto cresce sempre di 5. Nell'item b si richiede di passare alla generalizzazione attraverso la scelta della formula che rappresenta il costo al variare del numero di spettacoli. Infine nel terzo item lo studente deve scegliere il grafico che meglio rappresenta l'andamento del costo al variare del numero di biglietti. I risultati complessi ci dicono che oltre il 50% degli studenti è in grado di rispondere correttamente ai tre quesiti. Uno spunto didattico potrebbe essere di discutere su ciò che ogni rappresentazione (tabella, formula, grafico) della situazione mette in evidenza rispetto alle altre.

a.s. 2009/2010 - Domanda D21

Scuola secondaria di I grado - Prova Nazionale

D21. Queste sono le prime tre figure di una sequenza.

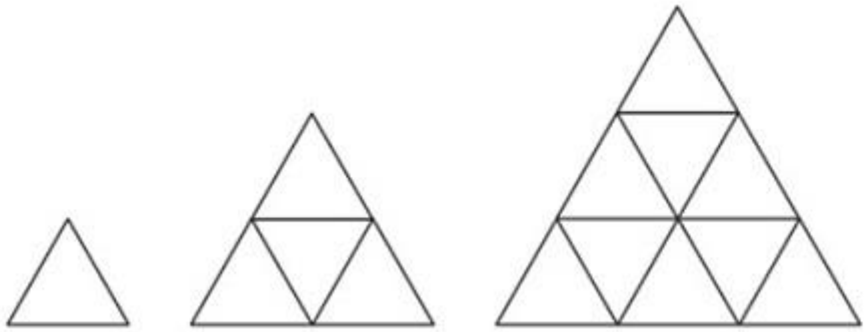

fig. 1 fig. 2 fig. 3 ...

Il lato del triangolo di figura 2 è il doppio di quello di figura 1 e la sua area è quattro volte più grande. Il lato del triangolo di figura 3 è il triplo di quello di figura 1 e l'area è nove volte più grande.

a) Un triangolo formato da 30 triangoli uguali a quello di figura 1 appartiene alla sequenza?

☐ Sì

☐ No

b) Giustifica la tua risposta:

....

....

....

Soluzione INVALSI: No

Commento

Lo studente deve riconoscere che la sequenza che si genera contando i triangoli piccoli è la sequenza dei numeri naturali al quadrato 1 4 9… pertanto nella sequenza non può esserci il numero 30. Lo studente può continuare la sequenza immaginando un triangolo con il lato 4 volte più grande e costituito quindi da 16 triangoli piccoli, passando poi ad uno con il lato 5 volte più grande e 25 triangolini arrivando così a un triangolo con il lato 6 volte più grande e costituito da 36 triangoli piccoli. Avendo raggiunto 36 triangoli piccoli è evidente che il triangolo con 30 triangoli piccoli non fa parte della sequenza. Nell'attività qui proposta si suggerisce nelle prove di verifica di far costruire ai ragazzi sequenze dei multipli di due numeri non primi fra loro ed osservare regolarità, si suppone quindi che i ragazzi abbiano imparato a riflettere su sequenze di numeri e ad individuare regolarità al loro interno.

Descrizione dell'attività

L'insegnante propone il seguente problema al gruppo classe.

Problema: «*Un negoziante acquista un certo numero di camicie da 40 euro ed un certo numero di camicie da 60 euro. Ha a disposizione 560 euro. Quante camicie di un tipo e quante dell'altro può acquistare ponendosi come obiettivo quello di utilizzare tutta la cifra a disposizione?*»

In questo problema le incognite sono due: il numero delle camicie da 40 euro e quello delle camicie da 60 euro; il problema non fornisce altra informazione su relazioni tra questi numeri che non sia quella dell'utilizzo dell'intera cifra a disposizione.

L'insegnante invita gli alunni a confrontarsi tra compagni di banco per cercare di risolvere il problema.
Guida poi gli alunni nella discussione che ne scaturisce e raccoglie i risultati in tabella:

Camicie da 40	Camice da 60	Spesa totale	Corretto
1	8	1x40 + 8x60 = 40 + 480 = 520	NO
2	8	2x40 + 8x60 = 560	SI
3	7	3x40 + 7x60 = 540	NO
4	6	4x40 + 6x60 = 520	NO
5	6	5x40 + 6x60 = 560	SI
...	...	...	

Osserviamo che esistono più coppie di numeri interi che risolvono il problema.
Possiamo scrivere:

_____ x 40 + ______ x 60 = 560

Si conducano gli alunni tramite delle domande guidate a:
- riconoscere cosa nel procedimento varia e cosa rimane costante;
- mantenere il significato dei vari elementi: a cosa si riferisce il numero che deve essere messo nel primo quadratino? A cosa si riferisce il numero che deve essere messo nel secondo quadratino?
- generalizzare la formula indicando con x e y le variabili.

Si arriva così a scrivere l'equazione risolutiva che è la seguente:
$40 \cdot x \cdot 60 \cdot y = 560$
dove x rappresenta il numero delle camicie da 40 euro e y il numero delle camicie da 60 euro ($40\,x$ rappresenta quindi la spesa sostenuta per le camicie dei primo tipo e $60\,y$ la spesa sostenuta per le camicie del secondo).
Si tratta quindi di un'equazione di I grado in cui ci sono due incognite. Non conosciamo nessun metodo per risolverla.

Utilizziamo un metodo sistematico:

Cominciamo a vedere che cosa succede ponendo x = 1 avremo allora:

40 · 1 + 60 · y = 560.

Si è ottenuta un'equazione di primo grado che siamo in grado di risolvere. Si trova in effetti:

60 · y = 560 - 40 = 520
y = 520/60 ~ 8,7

Poiché y rappresenta una certa quantità di camicie, non può essere un numero non intero. Nel nostro caso dovremo cercare solo le soluzioni rappresentate da coppie x, y di numeri interi (non negativi), quindi il commerciante non può impegnare tutta la cifra di cui dispone comprando una sola camicia da 40 euro.

Proviamo allora con *x = 2*.

L'equazione ottenuta è la seguente:

40 · 2 + 60 · y = 560
80 + 60 · y = 560
60 · y = 560 - 80

y = 480/60 = 8
Ecco quindi trovata la prima soluzione del problema: (2, 8). Il commerciante può comprare 2 camicie da 40 euro e 8 camicie da 60 euro.

Può però darsi che esistano altre soluzioni.

Proviamo per *x = 3* e *x = 4:*

Se *x = 3* allora *y = 440/60 ~ 7.3* Se *x = 4* allora *y = 400/60 ~ 6.7*

In entrambi i casi il valore ottenuto per y non è intero e quindi le soluzioni non sono accettabili.
Se provate invece con *x = 5* ottenete *y = 6*.
Procedendo per tentativi otteniamo la seguente tabella:

x	2	5	8	11	14
y	8	6	4	2	0

L'insegnante può sollecitare tramite domande la scoperta della regola con cui si succedono i valori della variabile x e quelli della variabile y. Mentre i valori della *x* aumentano di tre in tre, quelli della *y* diminuiscono di due in due. La scoperta della regolarità con cui si succedono i valori delle variabili rende più mirati i tentativi, ma sollecita anche a superare il limite imposto dal problema circa **l'accettabilità delle soluzioni** (numeri interi positivi in quanto si tratta di camicie da acquistare).

Proviamo allora a non ragionare più sulle camicie e quindi ad ampliare l'insieme di accettabilità delle soluzioni all'insieme dei relativi, (interi positivi e negativi). Con la regola appena trovata sarà facile verificare la possibilità di continuare a trovare

coppie di valori accettabili, che allungano la tabella sia verso sinistra (x negativa e y positiva) che verso destra (x positiva e y negativa):

+3

x	-1	2	5	8	11	14	17
y	10	8	6	4	2	0	-2

-2

Si noterà così che le soluzioni, cioè le coppie di valori che soddisfano la nostra equazione, diventano infinite.

La regola numerica precedentemente trovata corrisponde a quella geometrica che ci fa passare da un punto all'altro del grafico contando i quadretti tramite scalini di passo costante (partendo dal punto in alto i punti si succedono aumentando la x di 3 e diminuendo la y di 2).
Spontaneamente gli alunni si accorgeranno che i punti sono allineati e infiniti e che corrispondo alle infinite soluzioni della nostra equazione.

Analizziamo ora la struttura dell'equazione da cui siamo partiti; si tratta di un'equazione in due incognite, di I grado, in cui i coefficienti di *x* e di *y* sono numeri interi, così come il termine noto.

Equazioni di questo tipo vengono chiamate **equazioni diofantee,** dal nome di un famoso algebrista greco (Diofanto, appunto) che per primo le ha studiate.

Indicazioni metodologiche

Probabilmente qualche alunno dopo i primi tentativi casuali potrebbe trovare un **metodo**, magari anticipando quello dell'insegnante, che può essere valorizzato e condiviso da tutti tramite una verifica puntuale.

È necessario:

- utilizzare la calcolatrice per accelerare i calcoli quando si lavora per tentativi;

- mantenere il significato di ciò che si sta facendo, finché si lavora sulle soluzioni del problema proposto e dare particolare rilievo alla decisione di sganciarsi dal contesto iniziale quando si ricercano soluzioni nell'insieme degli interi relativi. Con tale scelta il problema si sgancia dalla realtà, diventa un problema numerico e le soluzioni diventano infinite;

- possono essere utilmente usate delle tabelle in Excel impostando la funzione se...allora e altre per il calcolo delle differenze se gli alunni hanno pratica di questo programma.

La regolarità trovata per le coppie assicura che i punti, che rappresentano sul piano cartesiano, siano disposti su una stessa retta (la pendenza rimane costante).

Si può segnalare, solo alla fine, che un ulteriore ampliamento dell'insieme nel quale si cercano le soluzioni, ad esempio all'insieme dei reali trasforma l'insieme discreto delle soluzioni in un insieme continuo e la rappresentazione grafica sul piano cartesiano diventa una retta.

Spunti per un approfondimento disciplinare

Equazione diofantea con a, b, c numeri interi.

$ax + by = c$

Affinché l'equazione abbia soluzione, è necessario che *c* sia un multiplo del massimo comun divisore tra a e b.

Teorema di Bezout. Se a, b sono interi e c è il loro massimo comun divisore, allora esistono interi h, k tali che:

$ah + bk = c$

h e *k* possono essere trovati attraverso un metodo costruttivo che utilizza l'algoritmo euclideo.
Per approfondire questo argomento leggi il seguente approfondimento (vedi file allegato algoritmo euclideo).

Elementi per prove di verifica

Lavoro individuale 1

Fornire alcune equazioni a coefficienti interi, alcune con soluzioni coppie di interi ed altre senza soluzioni intere e chiedere di:

- trovare se possibile almeno 5 soluzioni di ognuna;
- spiegare il metodo che è stato seguito;
- dare un tentativo di spiegazione del perché alcune non hanno soluzioni intere.

Le seguenti sono equazioni a due incognite a coefficienti interi

1. $11x + 3y = 50$
2. $8x - 14y = 20$
3. $9x + 12y = 19$
4. $20x - 25y = 45$
5. $20x - 25y = 28$

Per ognuna di esse trova, se possibile, almeno 5 coppie di soluzioni costituite da numeri interi nell'insieme Z (Interi relativi).

Spiega il metodo che hai seguito per trovare le soluzioni.
Dai un tentativo di spiegazione sul perché per alcune delle equazioni proposte non sei riuscito a trovare soluzioni.

Scegli una delle equazioni per la quale hai trovato almeno 5 coppie di soluzioni costituite da numeri interi nell'insieme Z dei numeri relativi, **ordina**, rispetto ad una variabile, la corrispondente tabella e **trova** una regolarità. **Individua** sul piano cartesiano i punti che hanno come coordinate le coppie di soluzioni trovate e **descrivi** la loro disposizione sul piano.

Lavoro individuale 2

Dare agli alunni delle equazioni in due incognite e chiedere di trovare almeno 5 coppie di soluzioni nell'insieme dei razionali.

Dare agli alunni delle equazioni in due incognite e chiedere di trovare il valore di una variabile, fornendo un valore assegnato per l'altra (scambiare le variabili date e quelle da trovare sia come valore che come simbolo).

Trova nell'insieme dei numeri razionali almeno 5 coppie di soluzioni per la seguente equazione:

$7x + 9y = 15$

Inoltre trova il valore della:
- y nel caso in cui la x = 8;
- x nel caso in cui la y = 3;
- x nel caso in cui la y = 8;
- y nel caso in cui la x = 3.

Individua sul piano cartesiano i punti che hanno come coordinate le coppie di soluzioni trovate.

Lavoro in piccoli gruppi 1

Il lavoro si svolge in 3 fasi.

Fase 1
Dividere la classe in gruppi di due alunni, far inventare e risolvere un problema che sia risolvibile con una equazione Diofantea.
Successivamente l'insegnante raccoglie testo e soluzione scritti su fogli separati e dà al gruppo A il testo formulato dal gruppo B e viceversa.

Fase 2
Ogni gruppo lavora sul problema ricevuto risolvendolo o sottolineando possibili errori o contraddizioni.

Fase 3
I gruppi A e B lavorano insieme e discutono entrambi i problemi sia come formulazione del testo che come procedura di soluzione.
Se sulla retta dei numeri colorate di rosso i punti corrispondenti ai primi multipli di 3 e di blu quelli corrispondenti ai primi multipli di 9.
Guardando la loro disposizione potete osservare che:

____

____

- Scrivete ora i multipli di 3 (M_3) compresi tra 99 e 150 e i multipli di 9 (M_9) compresi tra 99 e 270.
- Eseguite numerose differenze, nell'insieme dei numeri naturali, prendendo un numero in M_9 e l'altro in M_3.
- Provate a trovare due multipli appartenenti a sequenze diverse la cui differenza sia pari a 10.
- Osservate i risultati, trovate una regolarità e provate a descriverla.

Cercate di dare una spiegazione della regolarità trovata.

Lavoro in piccoli gruppi 2

Far rappresentare i multipli di due numeri (non primi tra loro) sulla retta dei numeri, o con pallini o tramite la sequenza abbastanza lunga dei loro multipli (ad esempio 3 e 9).

Chiedere agli alunni di:
- eseguire numerose differenze tra un multiplo della prima sequenza e uno della seconda presi a caso e raccogliere i risultati ottenuti;
- trovare i due multipli, uno di una sequenza e uno di un'altra con differenza uguale ad un valore assegnato dall'insegnante (dare anche valori non trovabili ad esempio nell'esempio fatto 11, 20, 32, ecc... cioè numeri che non siano multipli del loro MCD);
- fare delle ipotesi sulle possibili differenze che si possono ottenere.

Dividere la classe in gruppi di due alunni, chiedere ad ogni gruppo di:
- inventare un problema risolvibile impostando una equazione Diofantea;
- risolvere il problema trovando almeno cinque soluzioni.

Successivamente l'insegnante raccoglie i soli testi dei problemi (la risoluzione resta al gruppo degli autori del problema) e li ridistribuisce ai vari gruppi dando al gruppo A il testo del gruppo B e al gruppo B il testo del gruppo A chiedendo ad ogni gruppo di:
- risolvere il problema ricevuto;
- rappresentare i valori trovati sul piano cartesiano;
- fare osservazioni al testo per migliorarlo o correggere ciò che sembra non corretto.

Infine i componenti dei gruppi A e B si riuniscono e discutono entrambi i problemi mettendo a confronto il metodo utilizzato, e le soluzioni trovate. Se necessario, possono confrontarsi anche sulla formulazione del testo arrivando ad una stesura condivisa di entrambi i testi.

Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato.doc (file allegato verifica.doc) o in formato.pdf (file allegato verifica.pdf).

Spunti per altre attività con gli studenti

Analizzare l'equazione:
$3x - 5y = 0$ riscriverla nella forma $3x = 5y$

Trovare alcune soluzioni e fare la loro rappresentazione grafica sul piano cartesiano.

Analizzare l'equazione

$4x + 6y = 2$
riscriverla nella forma

$4 \cdot x = 2 - 6 \cdot y$ ovvero $4x-(-6y) = 2$

Far notare che, tralasciando i segni, si tratta di cercare un multiplo di 4 ed un multiplo di 6 che differiscono di 2 e troviamo alcune soluzioni con l'ausilio della seguente rappresentazione grafica:

multipli di 4: ○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○○○●○
multipli di 6: ○○○○○●○○○○○●○○○○○●○○○○○●○○○○○●○○○○○●○○○○○●○○○○○●○○○○○

con lo stesso metodo troviamo le soluzioni dell'equazione:

$4x + 6y = 6$ ovvero $4x = 6 - 6y$ *ovvero* $4x - (-6y) = 6$

Analizzando più in dettaglio i multipli di 4 e 6 evidenziare che le differenze possono essere di 2, 4, 6, 8 ecc., cioè numeri sempre pari e quindi multipli di 2 loro massimo comun divisore.

Indagare la seguente equazione

$4x + 6y = 5$ ovvero $4x = 5 - 6y$ *o* $4x- (-6y) = 5$

Per concludere che non può avere soluzione.

Facciamo scrivere ai ragazzi la regola trovata (l'equazione ha soluzioni intere se il termine noto è un multiplo di 2 e che 2 è proprio il massimo comune divisore tra 4 e 6).
Verifichiamo la regola trovata cercando le soluzioni di
$6x + 9y = 15$ ovvero $6x = 15 - 9y$

e di altre equazioni inventate da loro e infine enunciamo la regola generale.

Materiali di supporto all'attività
Algoritmo euclideo

Materiale per le prove di verifica

Versione cartacea delle prove di verifica in formato.doc (file allegato verifica.doc) o in formato.pdf (file allegato verifica.pdf).

Bibliografia

AAVV, Matematica 2001. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola primaria. Scuola secondaria di I grado* (scarica il documento).

AAVV, Matematica 2003. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola secondaria di II grado* (scarica il documento).

PISA 2003 Valutazione dei quindicenni a cura dell'OCSE, Roma, Armando Armando, 2004

Sitografia

Sito dell'Unione matematica Italiana (UMI)
http://www.dm.unibo.it/umi

Dal sito INVALSI OCSE-PISA 2006
https://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=ocsepisa06
Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:
- individuare i principali **nodi didattici** cui la situazione fa riferimento;
- esporli sinteticamente per scritto.

Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.

Sperimentare l'unità proposta:
- fare una **ricognizione del contesto scolastico** specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli **adattamenti necessari**;
- formulare il **progetto didattico relativo**;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un **diario di bordo** (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuto in classe).
L'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà.
Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.