Definire quadrilateri con le simmetrie

Riadattata da Matematica 2001 da Roberto Battisti, Fabio Brunelli, Carmela Milone

Attività aggiornata nel 2015 grazie ai fondi PON-FSE relativi al progetto PON MATEMATICA (B-10-FSE-2010-3)

Introduzione

Lo scopo di questa attività è quello di condurre i ragazzi alla **costruzione dei quadrilateri convessi** e alla scoperta di una loro **classificazione**, utilizzando come criterio, non proprietà, quali la congruenza di lati, di angoli o il parallelismo o la perpendicolarità, ma gli elementi di simmetria che possono essere presenti. Questo porta non solo a classificare i quadrilateri convessi per inclusione, ma anche a prevedere altre eventuali definizioni per partizione alla maniera euclidea.

Da frequenti indagini e da discussioni "brainstorming" con ragazzi in entrata alla scuola secondaria di primo grado, succede sempre più frequentemente di incontrare studenti che, messi in situazioni di dover spiegare il **concetto di angolo**, o lo identificano con il punto di incontro di due semirette, o con la zona "vicina" al vertice, o parlano di spazio racchiuso fra due rette che si incontrano; inoltre anche chi riesce a ricordare la definizione classica "parte di piano (illimitata?) compresa fra due semirette che hanno l'origine in comune", spesso non è capace di applicare questa nozione in modo soddisfacente, se posto in diverse situazioni problematiche.

Questa confusione fra **piano e spazio**, fra **rette e piani** e questa identificazione dell'angolo con un punto, se da una parte può essere indotta dalla terminologia usata nel linguaggio comune (pensiamo al calcio d'angolo nel gioco del calcio, dove l'angolo rappresenta il punto in cui il calciatore deposita il pallone, o all'angolo della stanza, che spesso significa un punto ben preciso…), comunque denota un percorso sbagliato nella costruzione del concetto. Non si segue, come sottolinea Freudenthal, un processo che preveda questi passaggi intermedi: osservazione; manipolazione; costruzione; rappresentazione e comunicazione, inventando attività stimolanti, che permettano di costruirsi prima "gli oggetti mentali" per poi pian piano passare alla costruzione dei concetti.

Gli oggetti devono venir conosciuti attraverso la **scoperta delle loro proprietà e la loro descrizione**, perché è attraverso il linguaggio utilizzato che le percezioni generano oggetti mentali; proprio per questo motivo non devono venir solo definiti come oggetti ideali e assiomatici della geometria deduttiva, anche se a molti insegnanti può far comodo e indurre l'idea che procedendo in tal modo si risparmia tempo.
Per recuperare in parte questo percorso, fondamentale per costruire il concetto, si propongono queste semplici attività scaricabili.

- GLI ANGOLI IN PALESTRA (vedi file allegato angoli_in_palestra.doc)
- ANGOLI TRASPORTATI (vedi file allegato angoli_trasportati.doc)
- RIDUZIONE DEGLI ANGOLI (vedi file allegato riduzione_degli_angoli.doc)
- ANGOLI DECAPITATI (vedi file allegato angoli_decapitati.doc)
- CONFRONTO DI ANGOLI (vedi file allegato confronto_di_angoli.doc)
- CONFRONTO DI ANGOLI A DISTANZA
  (vedi file allegato confronto_angoli_a_distanza.doc)
- ADDESTRAMENTO (vedi file allegato addestramento.doc)

I problemi sugli angoli, che ti proponiamo, sono tratti dall'Archivio RMT, Rally Matematico Transalpino, i coordinatori internazionali sono Lucia Grugnetti e Francois Jaquet.
Per maggiori informazioni visita il sito:
http://www.armtint.org/presentazione-rmt/problemi-rmt

Riferimenti curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 57 del 15/07/2010, Direttiva n. 65 del 09/07/2010) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni curricolari: riferimenti

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado.

L'alunno:

- riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.
- legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado.

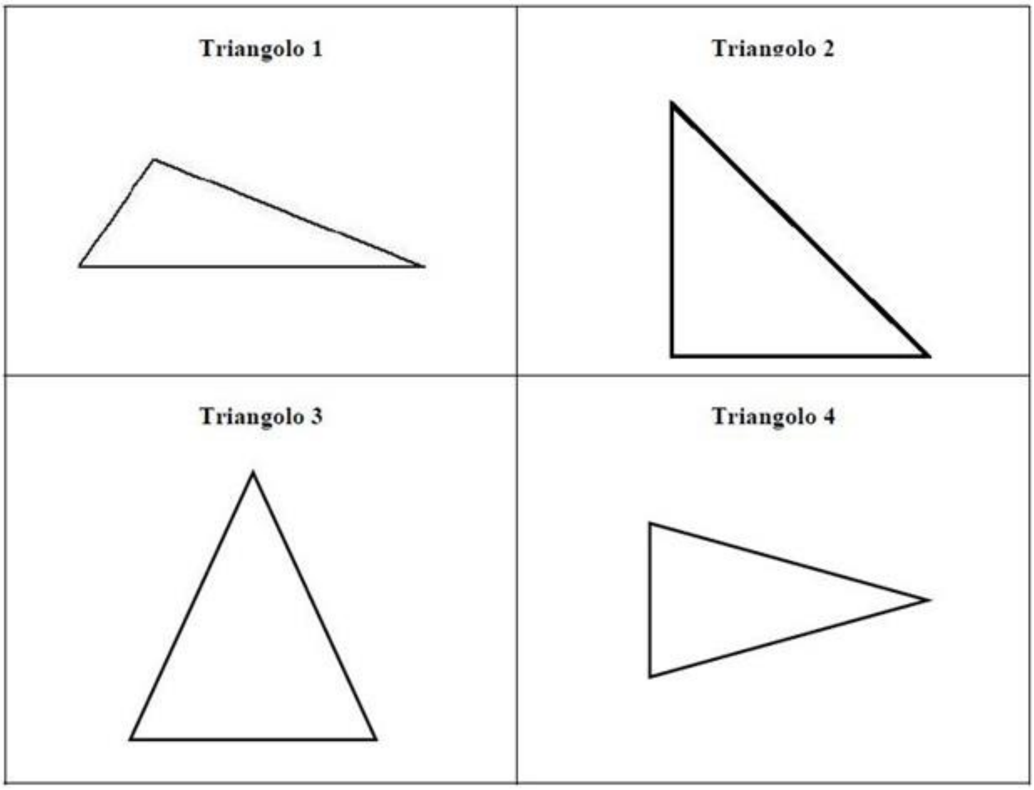
Spazio e figure

- Descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri.
- Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).
- Rappresentare punti, segmenti e figure sul piano cartesiano.
- Conoscere definizioni e proprietà (angoli, assi di simmetria, diagonali…) delle principali figure piane (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchio).
- Descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri.

Prove Invalsi

a.s. 2011/2012 - Domanda D26
Scuola secondaria di I grado – Classe I

D26. Quale dei seguenti triangoli non ha assi di simmetria?



☐ A. Triangolo 1

☐ B. Triangolo 2

☐ C. Triangolo 3

☐ D. Triangolo 4

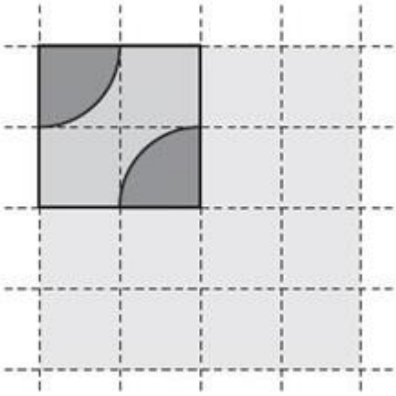
Soluzione INVALSI: A

Commento
Il quesito non riguarda i quadrilateri bensì i triangoli. Tuttavia è importante per verificare il riconoscimento di assi di simmetria nelle figure della geometria. Lo studente deve osservare che i triangoli 2, 3 e 4 sono triangoli isosceli e pertanto hanno un asse di simmetria rappresentato dalla altezza relativa al lato non uguale.

a.s. 2012/2013 - Domanda D25
Scuola secondaria di I grado – Classe III

E25. **Questa figura rappresenta quattro mattonelle di un pavimento. Solo una delle mattonelle è decorata.**

Disegna la decorazione delle altre mattonelle in modo che i loro bordi in comune siano tutti assi di simmetria.



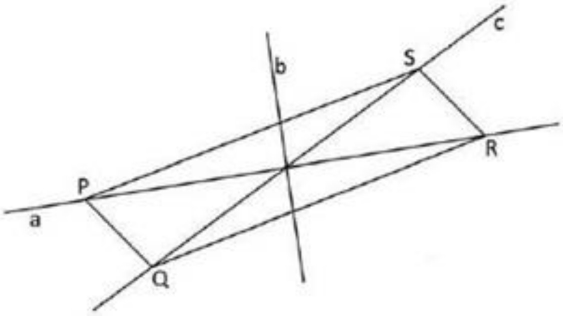
Soluzione INVALSI

Commento
Lo studente deve completare un disegno secondo assi di simmetria e non semplicemente riconoscere una simmetria.
Oltre il 67% degli studenti risponde correttamente.
Le Indicazioni chiedono di saper riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria).

a.s. 2011/2012 - Domanda D17
Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il seguente quesito riguarda la scuola secondaria di secondo grado tuttavia a nostro parere può essere proposto come verifica a livello di scuola secondaria di primo grado.
La figura del quesito è ricca dal punto di vista geometrico e si presta anche ad una attività di problem solving collettivo sotto la guida dell’insegnante.
Si consiglia di riportare la figura su carta, ritagliare la figura e indagare gli assi di simmetria mediante piegature della carta.

D17. Quale fra le rette *a*, *b* e *c*, nel piano della figura, è un asse di simmetria del parallelogramma PQRS?



☐ A. La retta *a*

☐ B. La retta *b*

☐ C. La retta *c*

☐ D. Nessuna delle tre

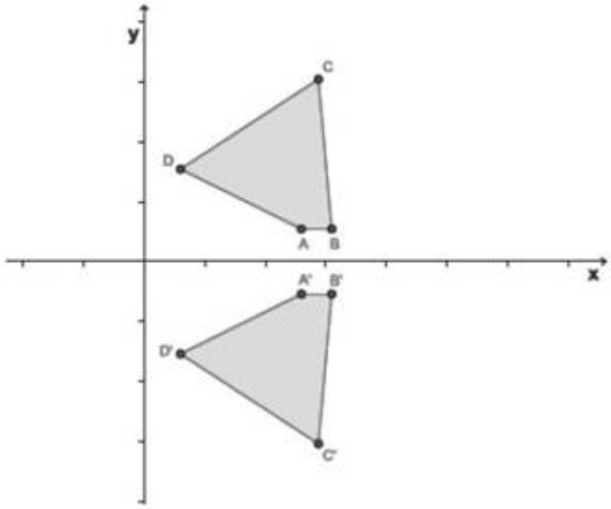
Soluzione INVALSI: D

Commento
Il livello di difficoltà previsto della domanda è di poco superiore alla media (0,25). Per rispondere è necessario conoscere il significato di simmetria; in particolare distinguere la simmetria assiale da quella centrale. Mentre il rettangolo possiede due assi di simmetria, il parallelogramma ha solo un centro di simmetria.

a.s. 2011/2012 - Domanda D30
Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il seguente quesito riguarda la scuola secondaria di secondo grado tuttavia a nostro parere può essere proposto come verifica a livello di scuola secondaria di primo grado. La figura del quesito è ricca dal punto di vista geometrico e si presta anche ad una attività di problem solving collettivo sotto la guida dell'insegnante.

D30. **Il quadrilatero A'B'C'D' è ottenuto applicando al quadrilatero ABCD una trasformazione.**



Di quale trasformazione si tratta?

☐ A. Traslazione

☐ B. Simmetria rispetto all'asse *y*

☐ C. Simmetria rispetto all'asse *x*

☐ D. Rotazione attorno all'origine

Soluzione INVALSI: C

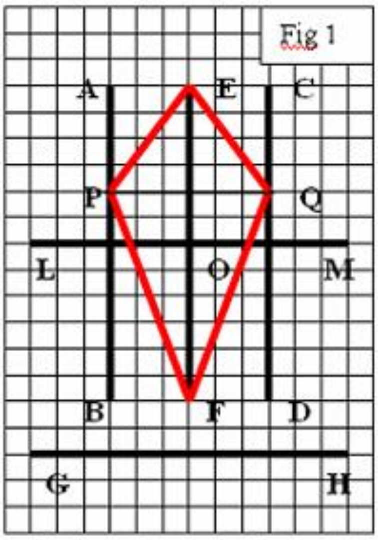
Commento
Il livello di difficoltà previsto della domanda è basso (- 0,39). Per rispondere è necessario conoscere il significato di simmetria (assiale e centrale). È immediato osservare che i vertici dei due poligoni si corrispondono in una simmetria avente come asse quello delle x.

Descrizione dell'attività

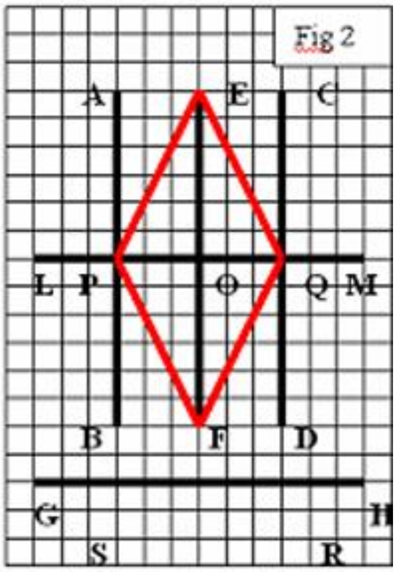
Questo percorso viene preceduto dalla **realizzazione di un modello**. I ragazzi, divisi in piccoli gruppi e con l'aiuto dell'insegnante, procedono alla costruzione del modello.
In un secondo momento seguono, attraverso schede appositamente predisposte, le istruzioni per l'utilizzo del modello. Attraverso i movimenti indicati nella scheda, i ragazzi individuano quadrilateri che hanno assi di simmetria passanti o no per i vertici e in cui è presente o no un centro di simmetria e giungono alla descrizione (e successivamente alla definizione) di tali quadrilateri attraverso i loro elementi di simmetria.
Di volta in volta scoprono o verificano la presenza di relazioni fra gli elementi del quadrilatero (lati, angoli, diagonali,…), riflettendo su eventuali situazioni di isoperimetria o di equiestensione.
Individuano, infine, eventuali relazioni di inclusione fra le famiglie dei quadrilateri, determinate tenendo conto della presenza o meno del centro di simmetria, del numero degli assi di simmetria, e dell'appartenenza o meno dei vertici del quadrilatero all'asse di simmetria.

Prima scheda operativa

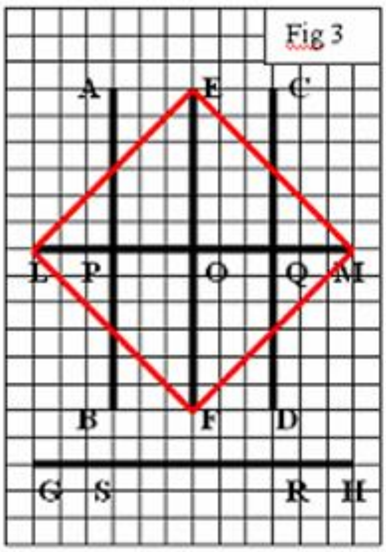
Si dispone inizialmente un vertice (una puntina protetta dal pezzetto di sughero) sul segmento EF, uno sul segmento AB, uno sul segmento CD (non in posizione simmetrica rispetto ad EF) e uno sul segmento LM.
Premessa: un generico quadrilatero non ha assi di simmetria.
Consegna: *scopri la forma di un quadrilatero avente un asse di simmetria* (si suggerisce di scegliere come asse la retta passante per E ed F).



I ragazzi discutono sul numero di vertici che possono trovarsi sull'asse, giungendo alla conclusione che se un vertice del quadrilatero si trova sull'asse di simmetria, un altro vertice deve trovarsi su tale asse. Si possono scegliere come vertici sull'asse i punti E ed F. Si dispongono simmetricamente rispetto all'asse i punti sui segmenti AB e CD.
Si sistemano degli elastici attorno ai vertici del quadrilatero e attorno alle diagonali. Si conviene di definire aquilone un quadrilatero convesso che ha almeno un asse di simmetria passante per due vertici opposti.
[Si escludono dall'osservazione i punti mobili sul segmento GH].
Tenendo fissi i vertici in E ed F i ragazzi fanno scorrere gli altri due vertici sulle rette AB e CD secondo vettori di uguale intensità e verso, scoprendo, attraverso il movimento, le proprietà particolari di cui godono gli elementi dell'aquilone.
Consegna: individua, se esiste, in questa famiglia di aquiloni quello che ha due assi di simmetria passanti ciascuno per due vertici opposti. I ragazzi disporranno i vertici sulle rette AB e CD rispettivamente nei punti P e Q.
Si conviene di definire rombo un quadrilatero convesso che ha due assi di simmetria ciascuno passante per due vertici opposti.
Consegna: il rombo gode delle proprietà di cui gode l'aquilone? Perché? Tenendo fissi i vertici in E ed F, e facendo scorrere quelli in P e Q sulla retta LM, secondo vettori aventi uguale intensità, ma verso opposto, si ottiene una famiglia di rombi.
Consegna: gli elementi del rombo godono anche di altre proprietà di cui non godono gli aquiloni?

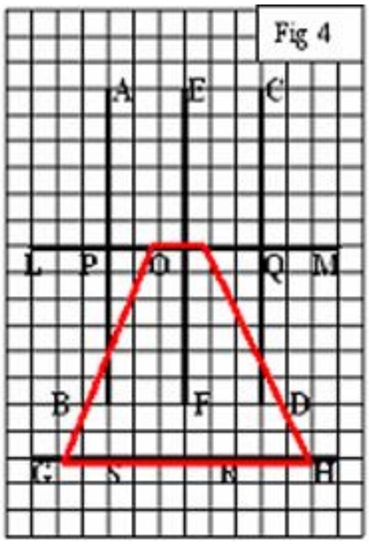


Tenendo fissi i vertici in E ed F, i ragazzi dispongono gli altri due in L ed M, riportano su un foglio quadrettato il rombo e lo ritagliano. Piegano il rombo lungo la retta che congiunge i punti medi dei lati EM ed LF e osservano che ripetono lo stesso procedimento per gli altri due lati opposti del rombo. Si conviene di definire quadrato un quadrilatero convesso che ha quattro assi di simmetria, di cui due passanti per due vertici opposti e due non passanti per alcun vertice.
Consegna: il quadrato gode delle proprietà di cui gode il rombo? Perché? Gli elementi del quadrato godono anche di altre proprietà? Quali? (Si tolgono gli elastici e si escludono dalle considerazioni che seguono i vertici sulla retta EF).

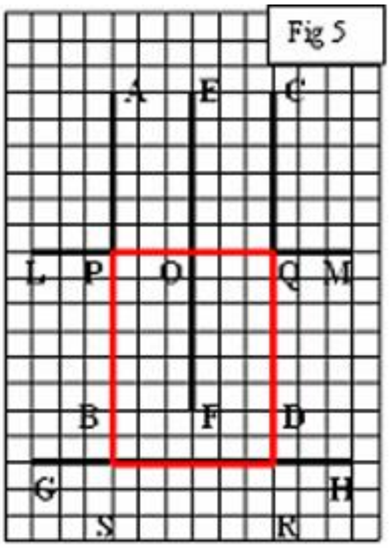


Si passa poi al caso in cui nessun vertice si trova sull’asse di simmetria: si suggerisce ai ragazzi di sistemare un vertice sulla retta GH, alla distanza di 5 quadretti dall’asse di simmetria e un altro sulla retta LM, alla distanza di un quadretto dall’asse di simmetria.
Consegna: dove si troveranno i simmetrici di tali vertici? Si pone un elastico attorno ai vertici del quadrilatero e altri due attorno ai vertici opposti. Si conviene di definire trapezio isoscele un quadrilatero convesso che ha almeno un asse di simmetria non passante per alcuno dei vertici. Facendo scorrere i vertici sulla retta LM secondo vettori di uguale intensità, ma verso opposto e spostando allo stesso modo i vertici che si trovano sulla retta GH si scoprono, attraverso il movimento, le proprietà

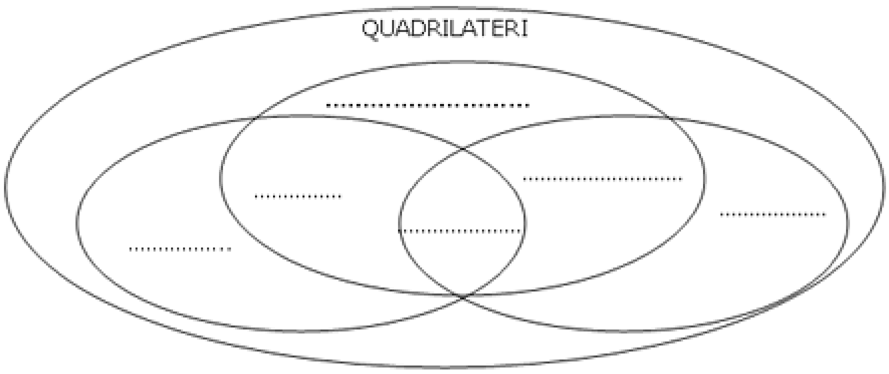
particolari di cui godono gli elementi di un trapezio isoscele.



A partire dalla famiglia dei trapezi isosceli, con considerazioni analoghe a quelle descritte precedentemente a partire dalla famiglia degli aquiloni, viene individuato un quadrilatero convesso avente due assi di simmetria non passanti per alcuno dei vertici al quale viene dato il nome di rettangolo e a partire dalla famiglia dei rettangoli viene ritrovato il quadrato.

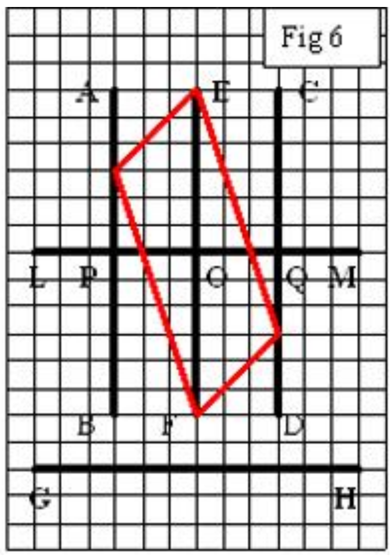


Si invitano infine i ragazzi a sistemare in maniera opportuna i quadrilateri incontrati lungo il percorso in un diagramma di Eulero-Venn, tenendo conto del numero degli assi di simmetria, e dell'appartenenza o meno dei vertici del quadrilatero all'asse di simmetria.



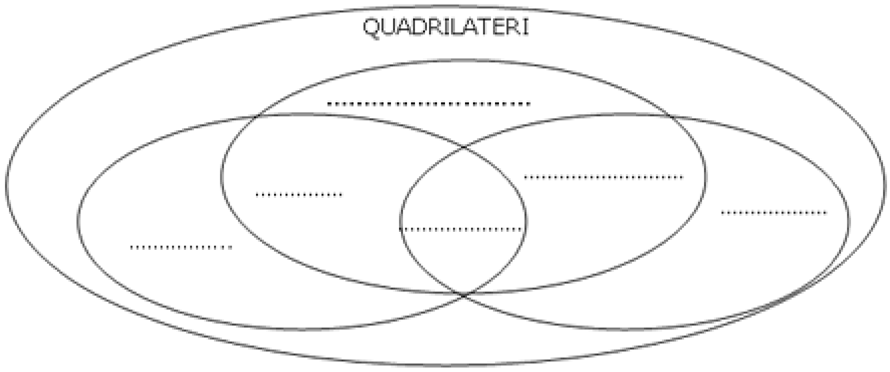
Seconda scheda operativa

1. **Consegna**: Scopri la forma di un quadrilatero avente un centro di simmetria. L'insegnante suggerisce di scegliere come centro il punto O.
2. **Consegna**: Poni un vertice sulla retta EF e un altro sulla retta AB, dove si troveranno gli altri due vertici? Si pone un elastico attorno ai vertici. Si conviene di definire parallelogramma un quadrilatero convesso con un centro di simmetria.



3. Facendo scorrere i vertici sulle rette AB e CD secondo vettori di uguale intensità e verso opposto si scoprono, attraverso il movimento, le proprietà particolari di cui godono gli elementi del parallelogramma. A partire dalla famiglia dei parallelogrammi, con considerazioni analoghe a quelle descritte precedentemente, viene ritrovato il rombo, già trovato per altra via. Il rombo dunque non solo ha due assi di simmetria passanti per i vertici, ma anche un centro di simmetria.
A partire dalla famiglia di rombi viene ritrovato il quadrato. Il quadrato dunque possiede oltre a quattro assi di simmetria, anche un centro di simmetria.
I ragazzi sistemano poi i vertici sulla retta EF e fanno scorrere i vertici sulle rette AB e CD, secondo vettori di uguale intensità e verso opposto fin quando, misurando le diagonali, non risultino congruenti; ritrovano così il rettangolo. Il rettangolo dunque possiede non solo due assi di simmetria non passanti per i vertici, ma anche un centro di simmetria. Consegna: Lasciando fermi i punti sulla retta EF e facendo scorrere solo i vertici sulle rette AB e CD, quanti di questi rettangoli puoi ottenere? Si spostano i vertici sulla retta EF e poi, tenendoli fermi, si fanno scorrere i vertici sulle rette AB e CD. Si ottiene un'altra famiglia di parallelogrammi nella quale è

possibile individuare altri due rettangoli. Consegna: puoi sistemare i vertici sulla retta EF in modo che questi due rettangoli coincidano? Il rettangolo che ottieni risulta simmetrico rispetto alle sue diagonali? Quanti assi di simmetria ha? Si ritrova dunque il quadrato anche nella famiglia dei rettangoli. Si invitano infine i ragazzi a sistemare in maniera opportuna i quadrilateri incontrati lungo il percorso in un diagramma di Eulero-Venn, tenendo conto della presenza o meno del centro di simmetria, del numero degli assi di simmetria, e dell'appartenenza o meno dei vertici del quadrilatero all'asse di simmetria.



Conclusione

Nella fase 4 della prima scheda i ragazzi, fissati due vertici nei punti E ed F e facendo scorrere gli altri due vertici secondo vettori di uguale intensità e verso sulle rette AB e CD, trovano infinite coppie di aquiloni simmetrici rispetto all'asse rappresentato dalla retta LM.
Il **rombo** è l'elemento unito fra queste infinite coppie di aquiloni simmetrici. A conclusioni analoghe possono giungere anche in altri momenti dell'attività, ad esempio nella fase 6 della seconda scheda in cui, in relazione ad ogni posizione fissata per i vertici sulla retta EF, si individuano due rettangoli che si corrispondono nella simmetria rispetto al centro O. Il quadrato è l'elemento unito fra queste infinite coppie di rettangoli simmetrici.
Laddove si presenti l'occasione si farà notare come le proprietà individuate per una famiglia di quadrilateri si conservano anche nei casi limite, ad esempio nella fase 4, i casi limite di posizione dei vertici sulle rette AB e CD danno origine ad una coppia di triangoli isosceli; in essi si riscontrano le stesse proprietà individuate negli aquiloni, compresa la somma degli angoli interni, perché nel caso del triangolo due dei lati consecutivi dell'aquilone diventano segmenti adiacenti e quindi uno degli angoli dell'aquilone diventa un angolo piatto.
Durante l'attività con la scheda 1 si osserverà che, una volta fissati i vertici sulla retta EF, le figure che si ottengono facendo variare la posizione degli altri due vertici sulle rette AB e CD secondo i movimenti indicati, sono equiestese, ma non isoperimetriche. È possibile a questo proposito condurre l'osservazione sulle variazioni del perimetro, ed individuare le configurazioni di perimetro minimo e massimo. Ogniqualvolta viene individuato e poi definito un quadrilatero particolare all'interno di una famiglia di quadrilateri, viene sempre posta la seguente domanda: Il quadrilatero che hai trovato gode delle proprietà di cui godono i quadrilateri della famiglia? Gli elementi del quadrilatero che hai individuato godono anche di altre proprietà? Quali? Queste osservazioni consentono di stabilire relazioni di tipo inclusivo tra famiglie di quadrilateri.

Indicazioni metodologiche

La metodologia adottata, alternando momenti di lavoro a classe intera, quando si deve dare la consegna a tutti, o quando si analizzano le soluzioni trovate tramite una discussione allargata, ad altri a piccoli gruppi, si fonda sulla discussione matematica (vedi file allegato discussione matematica).
Questa attività inoltre consente di porre l'accento sul fatto che, a partire dalla presenza di elementi di simmetria, è possibile **definire figure geometriche note** in maniera diversa da quella usuale, basata su relazioni di congruenza di lati o di angoli e su relazioni di parallelismo fra lati. A partire da queste nuove definizioni, è possibile riscoprire, fra le proprietà della figura, anche quelle che, all'interno delle "vecchie" definizioni erano utilizzate per caratterizzarla.
Si può inoltre cogliere l'occasione per fare con gli alunni **un'analisi critica** di alcune definizioni fornite dai libri di testo (ad esempio nell'ambito dei quadrilateri), facendo notare come talvolta ci sia poca coerenza nel passaggio da una definizione all'altra. Tale mancanza di coerenza viene sottolineata dalla difficoltà di rappresentare graficamente, attraverso relazioni fra insiemi, le relazioni esistenti tra queste famiglie di figure geometriche. In questa attività verranno messe alla prova le capacità non solo critiche, ma anche argomentative degli alunni.
Da sottolineare che attività di questo tipo possono condurre a confrontare da un punto di vista storico la **geometria euclidea** con quella attuale ed osservare le differenze esistenti.
Le definizioni che dava Euclide, ad esempio sui quadrilateri, avevano lo scopo di determinare una partizione nell'insieme dei quadrilateri. La scelta che si fa oggi è quella di mettere a confronto le figure geometriche in modo da rilevarne analogie e differenze, pertanto privilegiando le definizioni che danno luogo a relazioni di tipo inclusivo.

Spunti per un approfondimento disciplinare

Gli argomenti matematici collegati a questa attività sono:

1. Concetti di Classificazione e di Definizione
(vedi file allegato concetti_di_classificazione_e_di_definizione)
2. Isometrie[1]
3. Isoperimetria ed equiestensione
(vedi file allegato isoperimetria_ed_equiestensione)
4. Concetto di angolo[2]

Elementi per prove di verifica

Prima parte

Un'attività che si potrebbe proporre è quella di utilizzare lo stesso modellino articolabile (cfr. A.M. Facenda, M.C., J. Nardi, F. Paternoster, *Dallo studio di un "modello dinamico" alle definizioni: un percorso interattivo*, Dallo spazio del bambino

---

[1] Le isometrie (congruenze) sono le trasformazioni rigide (trasformazioni geometriche elementari) del piano in sé: traslazioni, rotazioni (con il caso particolare della simmetria centrale), simmetrie assiali e antitraslazioni (glissosimmetrie).
Introdotte nella Scuola Media con i programmi del 1979, nella Scuola Elementare nel 1985 e ripresi recentemente dai Nuovi Ordinamenti Scolastici, non hanno mai avuto vita facile. In qualche caso ignorate dagli insegnanti, in altri casi sono state trattate come un argomento a parte. Sarebbe al contrario auspicabile una loro trattazione non a sé stante, bensì trasversale a tutto il programma di geometria.
Dal punto di vista del rapporto tra matematica e realtà sono argomenti fortemente legati alla natura e alle opere dell'uomo. Dal punto di vista teorico la geometria stessa si può intendere come lo studio delle proprietà invarianti delle figure rispetto a opportune trasformazioni geometriche. Dal punto di vista didattico le figure in movimento suscitano maggiore curiosità e interesse da parte degli alunni.
Riferimento bibliografico: Silvia Dentella, L'insegnamento della geometria. Trasformazioni geometriche (classificazione delle figure) in L'insegnamento della geometria. Seminario di formazione per Docenti. Istruzione Secondaria di primo grado, Liceo Scientifico Vallisneri, Lucca, Novembre 1995-Marzo 1996, pag. 77.

[2] Il concetto di angolo, data l'essenziale importanza che riveste sia all'interno della matematica sia nelle applicazioni della matematica alle altre scienze e alla tecnica, deve essere oggetto di uno studio approfondito e curato. Giovanni Prodi ricorda come alla nozione di angolo debba essere legata l'idea di rotazione, per cui viene presentato come una coppia (*R, S*) di semirette con origine O, a cui si associa una "regione angolare" (che, correttamente viene detta essa stessa angolo) la quale, se *R* ed *S* non sono allineate, è costituita dall'intersezione dei due semipiani:
• semipiano generato da *R* e contenete *S*; • semipiano generato da *S* e contenente *R.*
Nel caso che *R* e *S* siano allineate (angolo piatto) vi è ambiguità si può scegliere come regione angolare l'uno o l'altro dei due semipiani individuati dai lati. Con questa definizione si cerca di dare al concetto di angolo un indirizzo non statico, ma dinamico, intendendo rappresentare l'insieme delle semirette e delle rotazioni che esse rappresentano comprese in uno stesso angolo, inteso come regione angolare convessa come d'altronde viene presentato dalla geometria euclidea tradizionale. Con questa rappresentazione, una volta fissata la semiretta *R* possiamo considerare la rotazione che porta *R* in *S* e così avere una corrispondenza biunivoca fra le rotazioni con centro O e gli angoli aventi come primo lato *R* avendo ottenuto un "angolo orientato". Rimane comunque il problema sollevato da molti studiosi sulla nozione di misura degli angoli. Senza voler entrare qui nel merito del dibattito, possiamo limitarci ad ammettere che la misura degli angoli nel suo aspetto pratico viene accettata da tutti; esistono vari strumenti per effettuare queste operazioni (sestante in astronomia, teodolite in topografia, goniometro nelle officine meccaniche,……). Da parte nostra possiamo rifarci a questi procedimenti empirici ed ammettere che "esiste un'unica applicazione (detta misura angolare) che fa corrispondere ad ogni angolo del piano un numero reale non negativo".
Ancora sul concetto di angolo vedi: *L'insegnamento della Geometria, Seminario di formazione per Docenti*, Istruzione secondaria di primo grado, Quaderni 19/1, Liceo scientifico Vallisneri Lucca, 1996, pag 41-48.

agli spazi della geometria. Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore Terme, 1997) per la "costruzione" delle definizioni dei vari tipi di quadrilatero nella maniera classica utilizzata dai libri di testo, definizioni in cui sono prese in considerazioni come proprietà caratterizzanti quelle riguardanti l'eguaglianza di lati o di angoli, il parallelismo dei lati… in modo da giungere ad una classificazione per inclusione.
Come nella precedente attività i ragazzi lavorano seguendo delle schede guida, nelle quali viene chiesto di muovere dei punti del modellino e di elencare le figure che man mano vengono individuate.
Successivamente dovranno indicare cosa cambia durante il movimento nelle misure dei lati, nelle loro posizioni reciproche, nelle misure delle diagonali, nelle loro posizioni reciproche.
Viene poi richiesto di elencare per ognuno dei quadrilateri individuati tutte le **proprietà riguardanti i lati e le diagonali**.
Prese in esame in maniera opportuna alcune famiglie, ad esempio aquiloni, rombi, quadrati (dal punto 1 al punto 7 della prima scheda operativa dell'attività precedentemente descritta), i ragazzi, aiutandosi con il modello, dovranno indicare le proprietà comuni (al fine di descrivere gli invarianti) e dovranno individuare quale/i fra le frasi riportate in elenco descrive (o descrivono) **tutti e solo** questi quadrilateri:

Quadrilateri a diagonali perpendicolari.
Quadrilateri con due coppie di lati uguali.
Quadrilateri con le diagonali che si bisecano.
Quadrilateri con i lati uguali.
Quadrilateri con almeno due coppie distinte di lati consecutivi uguali.
Quadrilateri con le diagonali non uguali.
Quadrilateri con diagonali perpendicolari, di cui almeno una biseca l'altra.
Quadrilateri con due lati uguali. Quadrilateri con una diagonale sempre bisecata dall'altra.

Questa fase sarà seguita da una discussione collettiva per verificare la correttezza delle scelte.
È opportuno ripetere la fase relativa alla individuazione delle "descrizioni" corrette per ogni famiglia di quadrilateri, in modo da giungere a descrizioni condivise e operare poi delle scelte che mettano in evidenza gli invarianti fra le varie famiglie.

Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc (file allegato verifica1.doc) o in formato .pdf (file allegato verifica1.pdf).

Seconda parte
Utilizzo Cabri Géomètre
Può essere opportuno svolgere un'attività sulle definizioni avvalendosi dell'aiuto del **Cabri Géomètre** (cfr E. Lanzi – A. Pesci, Un'analisi a priori dell'utilizzo di Cabri Géomètre nella scelta di proprietà per definire figure: il caso del rettangolo, Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria. Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore Terme, 1997).
La **funzione di trascinamento** del Cabri Géomètre può essere sfruttata per distinguere, fra le proprietà di una figura geometrica, quelle che la caratterizzano univocamente. Si può realizzare un'attività in classe articolata in due fasi:

a) disegnato un rombo con Cabri Géomètre, si fanno elencare ai ragazzi le proprietà dei lati, degli angoli, delle diagonali che sono invarianti al variare del rombo per trascinamento dei suoi vertici.

Il rombo è un quadrilatero che ha:
- i lati uguali;
- le diagonali perpendicolari;
- le diagonali che si dimezzano scambievolmente;
- gli angoli opposti uguali;
- i lati opposti paralleli.
- ……………

b) si chiede ai ragazzi di verificare quali di queste proprietà prese singolarmente individuano univocamente un rombo, cioè si possono considerare caratterizzanti (devono costruire il rombo utilizzando solo la proprietà che hanno indicato come caratterizzante e validare la figura costruita con la funzione di trascinamento del mouse).

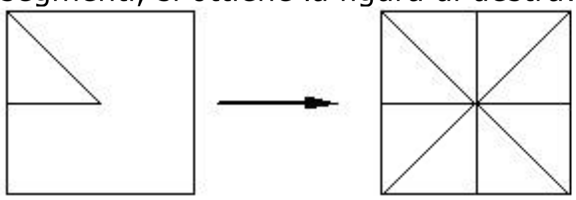
c) successivamente si potrebbero ulteriormente analizzare queste proprietà, per verificare se, opportunamente accoppiate, possono caratterizzare un rombo.

N.B. Chi non possiede il Cabri Géomètre, può scaricare da Internet la versione demo che è utilizzabile per 20 minuti sul sito http://www.cabri.com/.

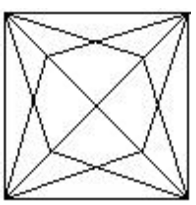
Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc (file allegato verifica2.doc) o in formato .pdf (file allegato verifica2.pdf).

Terza parte
Primo esempio
Priscilla gioca con delle tesserine trasparenti sulle quali ha disegnato una figura.
Ha scoperto che sovrapponendole, si creano nuove figure. Osserva la seguente figura.

Sovrapponendo 4 tesserine, con la stessa figura (a sinistra) composta di due segmenti, si ottiene la figura di destra:



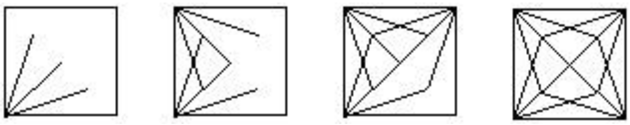
Priscilla prova con altre 4 tesserine che hanno un altro disegno, ottenuto tracciando tre segmenti, e ottiene la figura qui sotto:



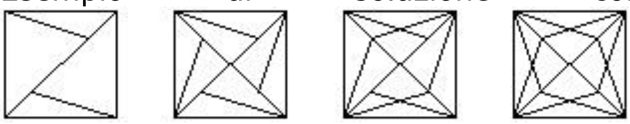
Qual è il disegno, composto da tre segmenti, che è necessario fare sulle tesserine per poter ottenere l'ultima figura? Esistono più soluzioni?
Spiega la tua risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale:
- Geometria: rotazioni, simmetrie, ribaltamenti.
Analisi del compito:
- Scegliere tre segmenti e provare a ruotare o a ribaltare.
- Rappresentare le tappe ad ogni rotazione o simmetria o ribaltamento, ci sono almeno due soluzioni.
- Possibilità di due soluzioni. Osserva la figura che ti proponiamo.
Esempio di soluzione con rotazioni successive:



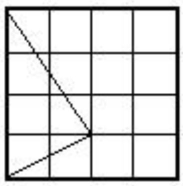
Esempio di soluzione con rotazioni e ribaltamenti:



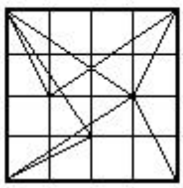
Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc (file allegato verifica3.doc) o in formato .pdf (file allegato verifica3.pdf).

Quarta parte
Secondo esempio
Osserva le seguenti immagini e successivamente prova a rispondere alle domande.

Si hanno a disposizione **4 tessere quadrate** trasparenti. Su ciascuna di esse sono disegnati, come mostra la figura qui sotto, una quadrettatura ed un triangolo (che si vedono da una parte e dall'altra per la trasparenza della tessera).



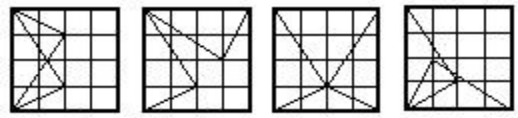
Se si sovrappongono perfettamente le quattro tessere facendo coincidere i bordi, in modo che nessuno dei quattro triangoli coincida con gli altri, si può ad esempio ottenere la figura qui in basso, che non ha assi di simmetria.



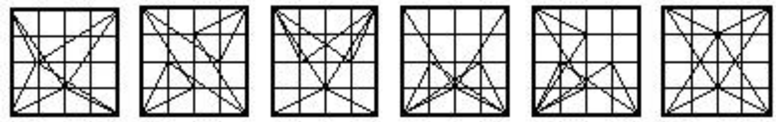
Sovrapponendo ancora le 4 tessere, quante figure diverse, composte da quattro triangoli distinti, e con almeno un asse di simmetria si possono ottenere?
Disegnate tutte le figure diverse che avete trovato, con quattro triangoli distinti e almeno un asse di simmetria.

ANALISI A PRIORI
Campo concettuale
- Geometria: simmetrie e rotazioni. Analisi del compito

- Costruire le quattro tessere su carta trasparente o anche su carta quadrettata (avendo l'accortezza in quest'ultimo caso di visualizzare, con ricalco, il triangolo anche sul retro della tessere) e cercare le soluzioni possibili dandosi un metodo (per es., tenere ferme due tessere, simmetriche fra loro, e provare a sistemare le altre due in modo ancora simmetrico).
- Trovare le figure richieste, per esempio, disegnando prima su un quadrato le figure simmetriche diverse che si ottengono dalla sovrapposizione di due tessere.



Successivamente, disegnando le simmetriche di queste ancora rispetto agli assi di simmetria del quadrato scopri che si possono ottenere 6 diverse figure con almeno un asse di simmetria.



Scarica la versione cartacea delle prove di verifica in formato .doc (verifica4.doc) o in formato .pdf (verifica4.pdf).

Altre attività con gli studenti

Dalle simmetrie di una figura geometrica alle sue proprietà

Può essere interessante far osservare ai ragazzi il fatto che attraverso le simmetrie che possiedono i quadrilateri e che sono servite a caratterizzarli nelle definizioni concordate, è possibile andare a ritrovare tutte le proprietà di cui essi godono.
Ad esempio, esaminando l'aquilone, dal fatto che possiede un asse di simmetria passante per i vertici seguono le seguenti proprietà:
- i lati corrispondenti rispetto all'asse sono uguali;
- gli angoli corrispondenti rispetto all'asse sono uguali;
- una diagonale (quella che non coincide con l'asse) è perpendicolare all'asse di simmetria (e quindi all'altra diagonale) e viene da questo diviso in due parti uguali; - la diagonale coincidente con l'asse divide due angoli opposti dell'aquilone in parti uguali.

Si potrebbero fare esaminare ai ragazzi le altre definizioni di quadrilateri che sono state costruite attraverso gli elementi di simmetria e dedurre da queste tutte le proprietà di cui godono i quadrilateri in questione.
Anche per ciò che riguarda la relazione che in alcuni casi esiste fra **assi di simmetria** e **centro di simmetria** di una figura, potrebbe essere interessante far esaminare ai ragazzi cosa succede componendo due simmetrie assiali con assi fra loro perpendicolari.

Scarica il file Cabri (file allegato compsimm).
Scarica il file Geogebra (file allegato compsimm_1151)

In tal modo si arriverebbe ad affermare che l'esistenza per alcune figure geometriche di un centro di simmetria è la naturale conseguenza del fatto che già possiedono due assi si simmetria fra loro perpendicolari (vedi rombo, rettangolo, quadrato).

Questa, però, che è solo una condizione sufficiente, potrebbe erroneamente essere ritenuta dai ragazzi anche una condizione necessaria. Per ovviare a questo problema, potrebbero essere proposte immagini come queste dell'arachide e della girandola in cui si richiede ai ragazzi di individuare un centro di simmetria e, se esistono, gli assi di simmetria.
Per un approfondimento su questo argomento confronta questa attività di Matematica 2001: Regolarità e modularità nella natura e nell'opera dell'uomo (file allegato medie)

Bibliografia

AAVV, Matematica 2001. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola primaria. Scuola secondaria di I grado.* (http://repository.indire.it/repository_cms/working/export/418/files/matematica2001.zip)

Bozzolo, C., *Il problema degli isoperimetri,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol. 20A-B, N.5, 1997.

Facenda, A.M., Manna, M.C., Nardi, J., Paternoster, F., *Dallo studio di un "modello dinamico" alle definizioni: un percorso interattivo*, Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria. Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore Terme, 1997.

Jaquet, F., *Il conflitto area-perimetro,* L'educazione Matematica, anno XXI, serie VI vol. 2, n.2, giugno 2000.

Lanzi, E., Pesci, A., *Un'analisi a priori dell'utilizzo di Cabri nella scelta di proprietà per definire figure: ipil caso del rettangolo*, Dallo spazio del bambino agli spazi della geometria. Atti del 2° Internuclei Scuola dell'Obbligo, Salsomaggiore Terme, 1997.

Malara, A., L'insegnamento della geometria nella scuola media questioni teoriche e didattico-metodologiche, in *L'insegnamento della Geometria*, Seminario di formazione per Docenti, Istruzione secondaria di primo grado, Quaderni 19/1, Liceo scientifico Vallisneri, Lucca, 1996.

Milazzo, F., Pennisi, M., *Una classificazione dei quadrilateri*, La Matematica e la sua Didattica, n.4, 2000.

Prodi G. et al., *Scoprire la Matematica*, Ghisetti e Corvi, Milano, 2003.

PISA 2003, *Valutazione dei quindicenni*,a cura dell'OCSE, Roma, Armando, 2004.

Sitografia

Sito dell'Unione matematica Italiana (UMI):
http://umi.dm.unibo.it/
Dal sito INVALSI OCSE-PISA 2006:
http://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=ocsepisa06

L'autrice dei problemi sugli angoli è G. Telatin, Math-Ecole n°177, Sion-CH,1977. Essi sono tratti dall'Archivio RMT, Rally Matematico Transalpino, coordinatori internazionali: Grugnetti Lucia e Francois Jaquet: http://www.armtint.org/presentazione-rmt/problemi-rmt

Proposta di attività

(da condividere e discutere in rete)
Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:
individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.
Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.
Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà. Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.