



Unione Europea
P.O.N. - "Competenze per lo Sviluppo" (FSE)
D.G. Occupazione, Affari Sociali e pari Opportunità



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale



L'albero maestro **a cura di R. Battisti, F. Brunelli, F. Spinelli**

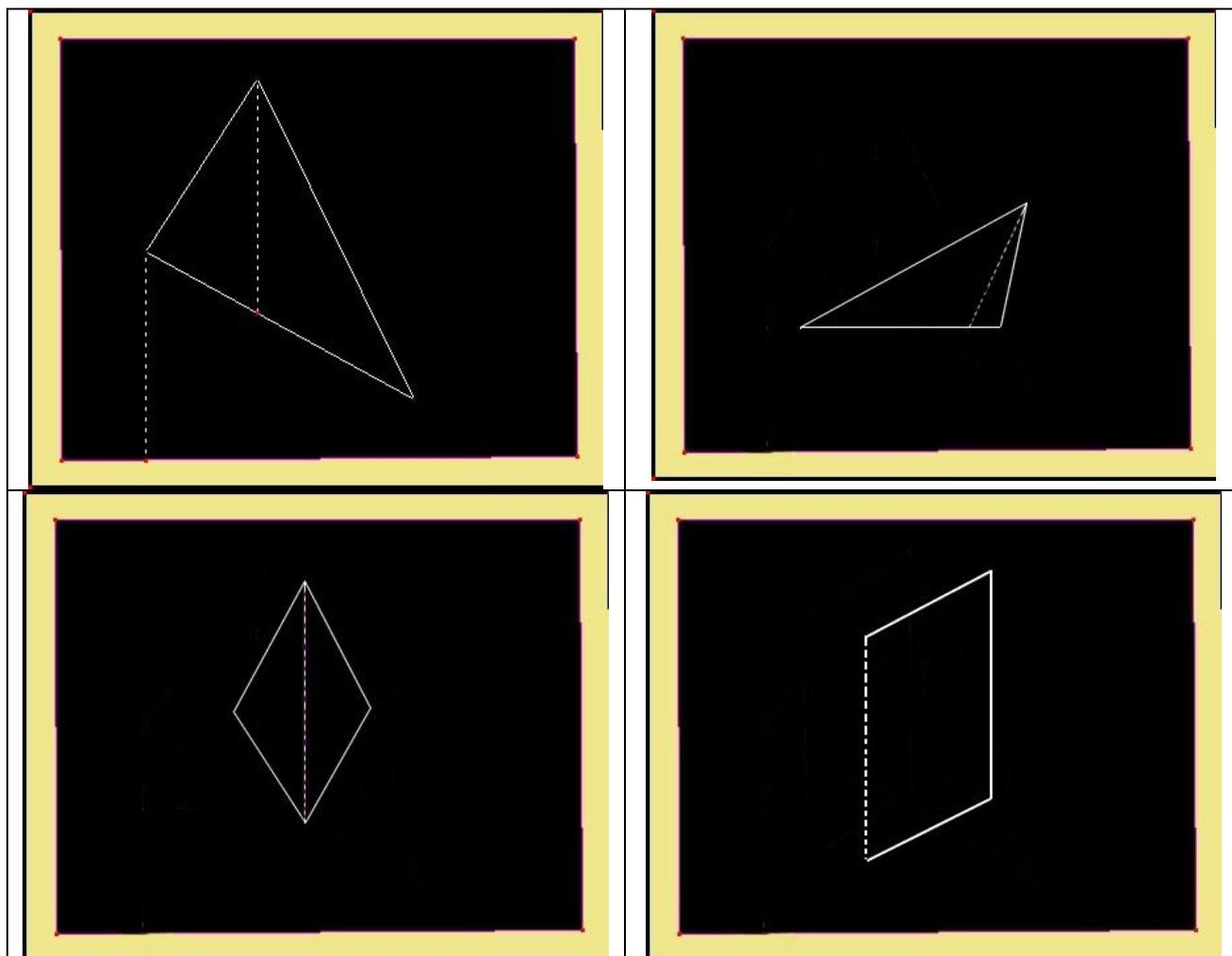
Introduzione.....	2
Descrizione dell'attività	7
Fase 1 Disegniamo su fogli rotondi	7
Fase 2 Le strisce	8
Fase 3 Distanza di un punto da una retta	9
Fase 4.....	10
Fase 5 Altezze di un triangolo	10
Indicazioni metodologiche	11
Spunti per un approfondimento disciplinare.....	13
Attività 1	13
Attività 2	14
Elementi per prove di verifica	15
Spunti per altre attività con gli studenti	16
Bibliografia.....	21
Sitografia	21
Proposta di attività per il corsista	22

Introduzione

Questa attività può essere introdotta all'inizio del primo anno in un contesto tipicamente geometrico, riprendendo i concetti intuitivi che gli studenti hanno di distanza, rette perpendicolari e altezza.

Questi concetti, che potrebbero apparire semplici, perché affrontati fin dai primi anni di scuola, in realtà sono spesso occasione di errori e rivelano quindi la loro complessità.

Figura 1 altezze sbagliate



L'attività prevede una fase di elaborazione personale degli allievi e una successiva discussione collettiva delle soluzioni elaborate.

La discussione che segue l'attività di esplorazione offre l'occasione di ritornare sui concetti parzialmente acquisiti e passare dalle prime concezioni elementari di natura ingenua e spontanea a quelle più elaborate e corrette.

Tutto questo dovrebbe aiutare a superare le difficoltà legate ai vari stereotipi (ad esempio l'altezza di un triangolo come segmento sempre sempre interno ad esso).

Un altro stereotipo è quello di identificare il concetto di rette perpendicolari con quello di rette rispettivamente verticale e orizzontale.

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni Curricolari attualmente in vigore (D.M. 16 novembre 2012, n. 254) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni Curricolari e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni curricolari: riferimenti

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado:

L'alunno:

- riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi;
- riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza;
- spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta [...];
- confronta procedimenti diversi [...];
- produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite [...];
- sostiene le proprie convinzioni [â€¦], utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta;
- utilizza e interpreta il linguaggio matematico e ne coglie il rapporto col linguaggio naturale;
- ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

Spazio e figure

- Utilizzare e distinguere fra loro i concetti di perpendicolarità, parallelismo, orizzontalità, verticalità.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado

Spazio e figure

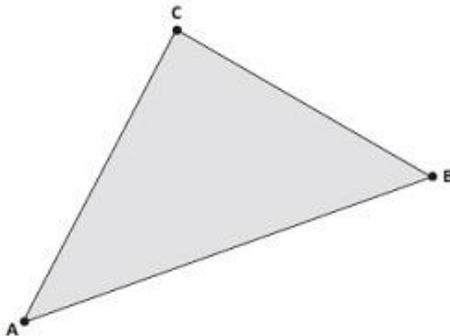
- Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).
- Conoscere definizioni e proprietà delle principali figure piane.
- Descrivere... costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri.
- Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure.

Prove INVALSI

a.s. 2011/2012 - Domanda D25

Scuola secondaria di I grado - Classe I

D25. Osserva la figura.



Disegna nel triangolo ABC l'altezza CH relativa al lato AB.

Soluzione INVALSI: la risposta è accettabile se il piede dell'altezza cade entro ± 3 mm dal punto corretto.

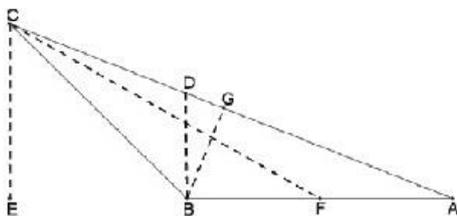
Commento

Il quesito si pone l'obiettivo di verificare il concetto di distanza di un punto da una retta e la relazione di perpendicolarità. Nel quesito nessuno dei lati del triangolo è parallelo ai lati del foglio e cioè ad una delle direzioni privilegiate e questo costituisce una difficoltà per i ragazzi che spesso identificano il concetto di perpendicolare con quello di verticale. Il quesito si presta bene ad affrontare la relazione di perpendicolarità dell'altezza rispetto alla base, distinguendola dall'essere un segmento necessariamente verticale. Il concetto di perpendicolare non risulta pertanto essere una proprietà intrinseca all'oggetto, ma condizionata dalla sua posizione. In alcune fasi dell'attività "L'albero maestro" viene utilizzato un foglio rotondo proprio per rimuovere lo stereotipo delle figure geometriche con lati orientati secondo i margini del foglio.

a.s. 2012/2013 - Domanda D15

Scuola secondaria di I grado - Classe I

D15. Osserva la figura.



Quale, tra le seguenti coppie di segmenti, rappresenta due delle altezze del triangolo ABC?

- A. CE e CF
- B. BD e BG
- C. CE e BG
- D. CF e BD

Soluzione INVALSI: C.

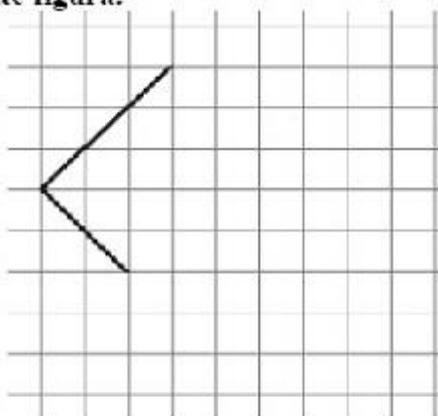
Commento

Attraverso questo quesito si vuole verificare se l'alunno ha chiaro il concetto di altezza come segmento di perpendicolare condotto da un vertice al lato opposto e non come segmento necessariamente verticale. Nel triangolo in questione si chiede di identificare le altezze relative ai tre lati e fra questi solo uno segue una direzione privilegiata (il lato AB è parallelo ad uno dei lati del foglio). Una coppia che può portare fuori strada è la coppia BD e BG in quanto BG è perpendicolare al lato AC e BD è perpendicolare al lato AB, ma BD non è l'altezza relativa ad AB in quanto il vertice opposto ad AB non è B, ma C.

a.s. 2010/2011 - Domanda D16

Scuola secondaria di I grado - Classe I

D16. Osserva la seguente figura.



a. **Completa la figura in modo da ottenere un quadrato.**

b. **Spiega come hai fatto per disegnare il quadrato.**

.....
.....
.....

Soluzione INVALSI: D16b: lo studente deve fare riferimento alle proprietà del quadrato: ad esempio al fatto che i lati sono di lunghezza uguale, oppure che gli angoli sono retti, oppure che le diagonali sono uguali, ecc.

Ho prolungato (allungato, continuato,...) il lato più corto fino a farlo diventare lungo come l'altro lato e poi ho disegnato gli altri due lati in modo che fossero tutti uguali.

Ho prolungato (allungato, continuato,...) il lato più corto fino a farlo diventare lungo come l'altro lato e poi ho disegnato gli altri due in modo che gli angoli fossero retti.

Ho prolungato (allungato, continuato,...) il lato più corto fino a farlo diventare lungo come l'altro e poi ho disegnato le diagonali uguali e ho completato il quadrato...

Commento

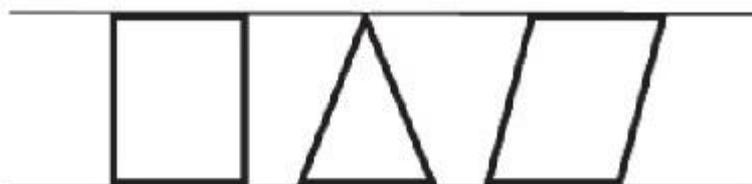
Con questo quesito si vuole verificare l'acquisizione da parte dell'allievo della relazione di perpendicolarità. In una situazione non stereotipa come questa in cui i lati accennati del quadrato non seguono la direzione dei lati dei quadretti può risultare difficile per

gli alunni disegnare il quadrato mantenendo la perpendicolarità fra i lati. L'insegnante avrà cura di discutere in classe con i ragazzi le risposte alla domanda D16b in cui si fa riferimento al rombo. Affermazioni del tipo "ho fatto in modo di disegnare un rombo perché poi quando si gira è un quadrato" denunciano la rigidità con cui gli alunni collegano le figure geometriche a determinate rappresentazioni grafiche, rigidità che purtroppo viene rafforzata dalle immagini di molti libri di testo.

a.s. 2009/2010 - Domanda D19

Scuola primaria - Classe V

D19. Su una striscia rettangolare di carta sono stati disegnati un rettangolo, un triangolo e un parallelogramma, tutti con base uguale.



Per ognuna delle seguenti affermazioni indica, mettendo una crocetta nella colonna corrispondente, se è vera o se è falsa.

	Vero	Falso
a. L'area del parallelogramma è il doppio di quella del triangolo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b. L'area del parallelogramma è maggiore di quella del rettangolo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c. L'area del triangolo è la metà di quella del rettangolo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Soluzione INVALSI:

D19a: Vero

D19 b: Falso

D19 c: Vero

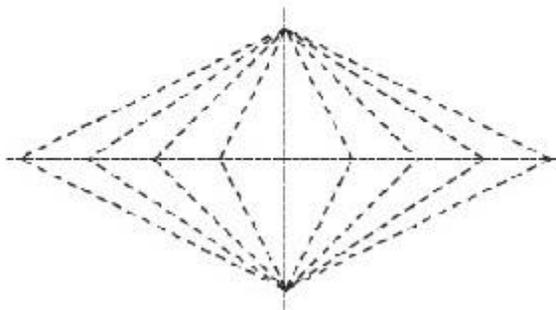
Commento

Questo quesito, formulato per verificare la capacità di confrontare aree di poligoni, implicitamente serve anche a verificare il concetto di distanza di un punto da una retta e la relazione di perpendicolarità. Lo studente deve essere capace di cogliere il fatto che le altezze dei tre poligoni coincidono con la distanza delle due rette parallele della striscia e di avvalersi della proprietà secondo cui la distanza di due rette parallele è costante. Pertanto tutti e tre i poligoni hanno stessa altezza e stessa base. Risulta evidente il collegamento fra questo quesito e la Fase 2 dell'Attività "L'albero maestro".

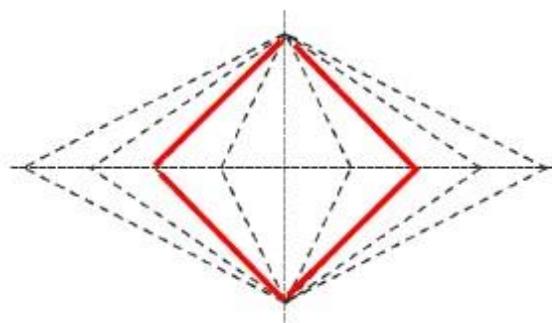
a.s. 2010/2011 - Domanda D9

Scuola primaria - Classe V

D9. Cerca il quadrato nella figura qui sotto e ripassane i lati con la penna.



Soluzione INVALSI:



Commento

Con questo quesito si vuole verificare l'acquisizione da parte dell'allievo della relazione di perpendicolarità. L'alunno deve individuare una figura geometrica in base alle sue proprietà. Nel caso in questione deve individuare il quadrato in un insieme di rombi, quindi identificare il quadrato come rombo con gli angoli retti, o con le diagonali di lunghezza uguale. La difficoltà consiste appunto nella richiesta di individuare il quadrato come rombo particolare, un quadrato disposto non in posizione canonica con i lati paralleli ai margini del foglio. Di solito ai ragazzi risulta più naturale controllare la presenza dell'angolo retto, magari ad occhio o girando il foglio, piuttosto che affidarsi in maniera più sicura ad uno strumento di misura per controllare la congruenza delle diagonali

Descrizione dell'attività

Fase 1

Disegniamo su fogli rotondi

L'insegnante consegna ad ogni allievo un foglio circolare bianco (ritagliato dall'insegnante) con il disegno di una barca su un'onda del mare. La richiesta per gli

alunni è quella di disegnare sul foglio l'albero maestro della barca a vela. L'albero dovrà essere lungo circa quanto la barca.

La richiesta di disegnare su fogli rotondi e non quadrettati, già sperimentata ampiamente in molte scuole, è fatta per evitare riferimenti del tipo orizzontale e verticale, indotti da fogli rettangolari. La mancanza di riferimenti aiuta gli allievi a riflettere unicamente sulla relazione tra la barca e l'albero maestro. Questo utilizzo di fogli bianchi e rotondi prosegue anche per le successive attività. Si passerà ai normali fogli di quaderno rendendo consapevoli gli studenti di non riferirsi a quadretti o bordi in problemi di questo tipo.

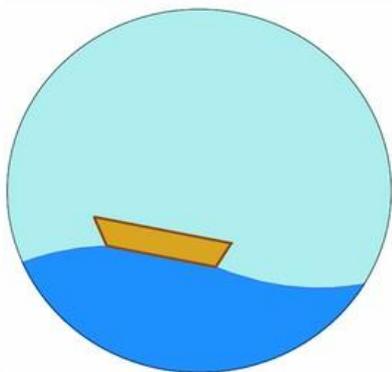


Figura 2

La figura 2 mostra un veliero che si sta muovendo verso sinistra sulle onde del mare. Disegna l'albero maestro e la vela.

Scarica il disegno da utilizzare in classe (allegato [Figura 3 Veliero](#))

L'attività prosegue con l'osservazione dei vari disegni e con la discussione delle varie soluzioni trovate. L'insegnante potrà intervenire direttamente con la richiesta: "Spiega perché".

Questa attività dovrebbe far emergere la discussione intorno ai due concetti:

- "verticale" (concetto fisico legato al campo gravitazionale);
- "perpendicolare" (concetto geometrico legato all'angolo retto).

Fase 2

Le strisce

L'insegnante procura strisce di carta (o di stoffa) di diversa altezza (per esempio carta adesiva da carrozziere). Le strisce devono essere di una certa lunghezza e con gli estremi strappati, in modo da non sovrapporsi all'immagine mentale del rettangolo.



Figura 4

La richiesta è quella di misurare l'altezza delle strisce. I ragazzi attueranno diverse strategie, tra cui quella di piegare la striscia su se stessa e misurare la piegatura. I ragazzi discutono e lavorano in coppie. Segue una fase di discussione collettiva nella classe riguardo alle soluzioni elaborate. Nasce quindi in modo spontaneo il concetto di altezza della striscia come distanza fra le rette che formano i due bordi della striscia.

Fase 3

Distanza di un punto da una retta

Lavoro in coppie

L'insegnante consegna ad ogni coppia un foglio bianco rotondo con il disegno di un segmento r e di un punto P fuori di esso.

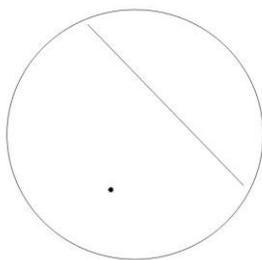


Figura 5 Segmento e punto fuori di esso

Scarica il disegno da ritagliare che rappresenta un segmento e un punto fuori da esso (allegato [Figura 5 Segmento](#)).

La richiesta per gli alunni è la seguente:

“Trovate la strada più corta che, secondo voi, va dal punto P al segmento r , disegnatela e poi misuratene la lunghezza. Scrivete poi il procedimento che avete seguito. Ora tracciate anche altre strade rettilinee, misuratele e confrontate le misure con quella che avete tracciato come la più corta. Scrivete le vostre osservazioni.”

I ragazzi discutono e lavorano in coppie. Segue una fase di discussione collettiva nella classe riguardo alle soluzioni elaborate.

Questo dovrebbe aiutare a rinforzare il concetto di distanza di un punto da una retta come percorso più breve dal punto alla retta stessa e il concetto di perpendicolarità.

Fase 4

L'insegnante può chiedere ai ragazzi: "Cosa vi viene in mente sentendo la parola altezza?"

Alla discussione che segue si può proporre la ricerca dei significati e dei diversi contesti della parola "altezza" nella lingua italiana (anche con l'aiuto del dizionario).

Ad esempio: "Non mi sento all'altezza". "Sua altezza reale". "Altezza del mare". "Alto mare". "Oggi il mare è troppo alto", ecc.

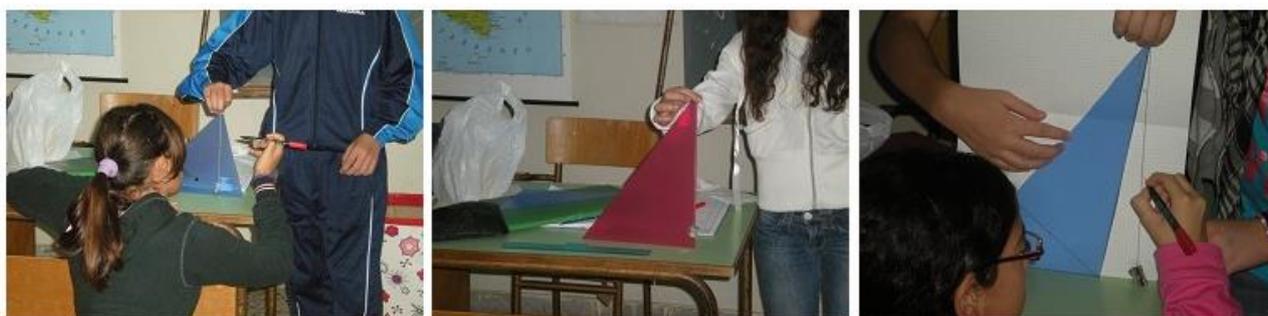
Una prima conclusione è che il significato di altezza in lingua italiana è molteplice e diverso da quello in matematica.

Un secondo aspetto che spesso resta sottointeso è che l'altezza di particolari cose (un albero, una candela, una persona, ...) è in qualche modo "intrinseca", cioè non legata alla posizione degli stessi, mentre l'altezza delle figure geometriche dipende dalla base scelta di volta in volta.

Fase 5

Altezze di un triangolo

L'insegnante consegna un triangolo acutangolo scaleno ritagliato a ciascun alunno (che può lavorare anche in coppia) e chiede di tracciare l'altezza del triangolo almeno in due modi diversi, utilizzando gli strumenti più opportuni (sulla cattedra ci saranno a disposizione squadra, filo a piombo, riga e compasso).



Dalla discussione conseguente dovrebbero emergere:

- 1) Il triangolo possiede tre altezze
- 2) L'altezza di un triangolo si può individuare in diversi modi

Dopo che gli alunni si sono impraticitati sufficientemente delle diverse tecniche per individuare l'altezza di un triangolo, l'insegnante potrà proporre l'esplorazione dei diversi tipi di triangoli.

Come sono le altezze di un triangolo equilatero? E quelle di un triangolo isoscele? E quelle di un triangolo rettangolo scaleno? E quelle di un triangolo rettangolo isoscele? E di un triangolo ottusangolo?

L'insegnante può anche suggerire di utilizzare la piegatura della carta per individuare le altezze.

Insegnante: *"Disegna un triangolo di lati 10 cm, 11 cm, 12 cm.*

Ritaglialo. Come potresti trovare le tre altezze utilizzando le piegature della carta?

Descrivi ciò che hai fatto."

Ogni alunno dovrà verbalizzare il procedimento seguito.

Esempi di verbalizzazione degli alunni.

Alunno: *"Ho provato e quando piegavo scorrevo una parte del lato sull'altra (dovevano combaciare) fino a che la piegatura non cadeva perpendicolarmente partendo dall'angolo opposto al lato."*

La maggior parte degli alunni, pur portando a termine correttamente la consegna, nella verbalizzazione trascurava il fatto che la piegatura-altezza deve passare dal vertice opposto al lato-base: *"Dopo avere disegnato il triangolo ho usato le piegature della carta in modo da formare angoli retti. Quando le piegature formavano angoli retti avevo trovato un'altezza. L'altezza cadeva perpendicolare alla base in modo da formare angoli retti."*

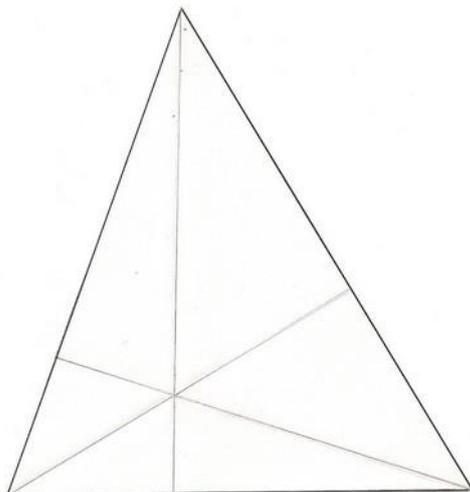


Figura 8 Altezze

Indicazioni metodologiche

È esperienza comune che gli studenti incontrino difficoltà nel passare dalle conoscenze intuitive a una prospettiva teorica.

Da qui le scelte seguenti:

- 1) le costruzioni geometriche come contesto tematico nel quale organizzare le attività didattiche;
- 2) la discussione collettiva in classe come metodologia in cui far evolvere i processi argomentativi degli studenti verso la concettualizzazione;
- 3) la verbalizzazione da parte degli studenti delle attività svolte per spingerli a descrivere e commentare la soluzione dei problemi e per seguirli nel loro processo di crescita logica;
- 4) la giustificazione delle procedure seguite, delle costruzioni fatte, delle scelte operate;
- 5) un "quaderno" dove gli studenti riportano le osservazioni e le conclusioni alle quali si arriva dopo una discussione collettiva.

Spunti per un approfondimento disciplinare

L'utilizzo di un software di geometria dinamica come Cabri o Geogebra può favorire ulteriormente l'esplorazione sulle perpendicolari e sulle altezze, in quanto permette di esplorare dinamicamente le figure. Inoltre consente di non avere riferimenti come i quadretti o il bordo del foglio rettangolare e di girare le figure in ogni direzione. Se insieme al trascinamento si usa anche la misura, allora l'esplorazione si arricchisce di osservazioni sulla perpendicolare come segmento più breve.

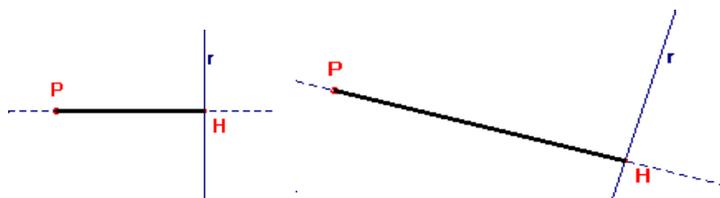


Figura 1

Figura 2

Il riferimento teorico che sottende questa attività è sempre quello della geometria euclidea, in cui per un punto esterno a una retta esiste una sola retta perpendicolare alla retta data. Altro riferimento cruciale è la misura, che, qui come per gli angoli, presuppone l'assioma di continuità.

L'attività successiva riguarda il concetto di altezza di un triangolo ed è legata non solo al concetto di distanza, ma anche alle problematiche che possono sorgere se si traccia la perpendicolare da un punto a un segmento invece di tracciare tale perpendicolare rispetto alla retta cui il segmento appartiene. Qui, in particolare, gli schemi d'uso acquisiti relativamente alla costruzione della perpendicolare vanno integrati con i concetti geometrici di retta e segmento.

Attività 1

Questa attività generalizza la precedente su carta, in cui si chiedeva di tracciare le altezze di triangoli particolari.

Disegnare un triangolo ABC, tracciare l'altezza dal vertice C al lato opposto. (Figura 3)

Provando a muovere i vertici del triangolo, che cosa succede? In quali casi l'altezza sparisce? (Figura 4).

Come è possibile visualizzare l'altezza anche se il triangolo è ottusangolo? (Figura 5).

Muovere i vertici del triangolo, facendo in modo che quest'ultimo si 'giri' e osservare che cosa succede (Figura 6).

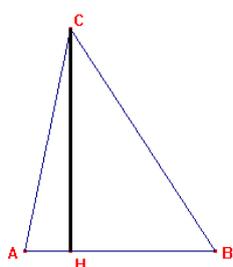


Figura 3

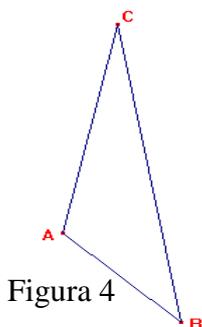


Figura 4

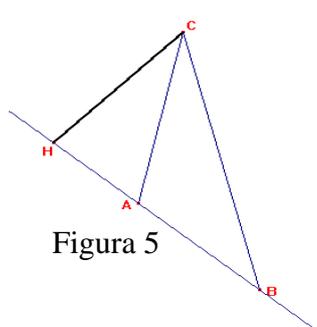


Figura 5

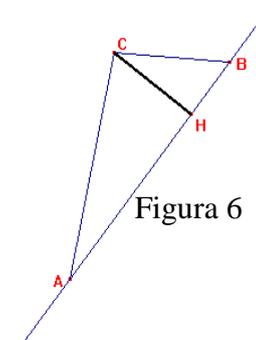


Figura 6

Quando si muovono i vertici di un triangolo ABC, il triangolo si modifica di conseguenza, rimanendo comunque un triangolo. È evidente che il triangolo di Cabri, con la sua variabilità, ha caratteristiche di generalità rispetto ad un qualsiasi altro

triangolo realizzato su carta, che conserva, per sua natura, le caratteristiche del caso particolare, come ad esempio l'essere acutangolo.

Con Cabri lo stesso triangolo può diventare ottusangolo, rettangolo, isoscele, scaleno, equilatero, ... Il triangolo in Cabri è dunque una famiglia di triangoli, ossia l'insieme dei triangoli rappresentabili, quindi si può pensare come un 'triangolo generico'.

La ricchezza percettiva che lo strumento tecnologico riesce a conferire al concetto di triangolo consente agli studenti di uscire dagli schemi degli stereotipi, per costruire significati più vicini alla teoria della geometria.

L'attività successiva mira a esplorare con l'aiuto di un software il concetto di rette parallele e di rette perpendicolari, con le corrispondenti relazioni (per esempio, il fatto che una perpendicolare di una perpendicolare è parallela alla retta di partenza). Il quadro teorico che sottende questa attività è sempre quello della geometria euclidea, in cui per un punto esterno a una retta esiste una sola retta parallela alla retta data e i teoremi relativi all'esistenza e all'unicità di parallele e perpendicolari.

Attività 2

Disegnare una retta r e un punto P non appartenente ad essa. Quante rette parallele alla retta r passano per il punto P ?

Disegnare una retta r e un punto P non appartenente ad essa. Quante rette perpendicolari alla retta r passano per il punto P ?

Data una retta r , disegnare due rette s , t ad essa perpendicolari. Come risultano tra di loro le rette s e t ?

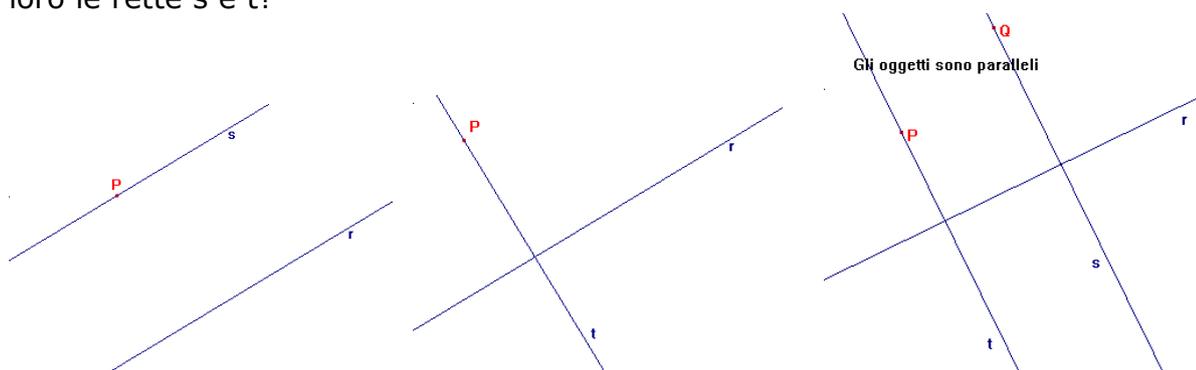


Figura 7

Se si costruiscono una retta r , un punto P e la retta s parallela ad r e passante per P (Figura 7), è possibile muovere, con il cursore, il punto P sullo schermo e si osserva che la retta s si muove di conseguenza, in modo da passare sempre per P e da essere sempre parallela ad r . Se si muove la retta r , ancora la retta s si modificherà in modo da conservare, in ogni istante, sia il passaggio per P che il parallelismo ad r , vincoli posti entrambi in fase di costruzione.

Attraverso la dinamicità di Cabri la distanza fra le rette parallele può variare, anche la loro direzione può variare, ma si conserva la relazione di parallelismo tra le due rette: la percezione della relazione di parallelismo fra rette risulta indubbiamente arricchita rispetto a quanto può essere realizzato su un foglio di carta. Inoltre, introducendo un altro schema d'uso in Cabri, la verifica di proprietà, è possibile esplorare situazioni come quella proposta dal terzo punto dell'Attività 2, in cui si verifica che due rette perpendicolari a una stessa retta sono parallele tra loro.

Di qui si può procedere con la misura a determinare la distanza tra le due rette parallele, come per la precedente attività fatta con le strisce su carta

Altri sviluppi possono essere quelli di studiare l'altezza in un poligono, ad esempio un quadrilatero cercando casi particolari, osservazioni, definizioni. E ancora la perpendicolare nello spazio, l'altezza in un solido...

Elementi per prove di verifica

1) Osserva attentamente le figure.

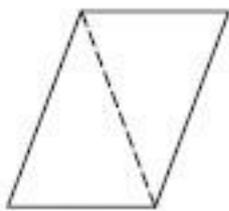


Figura 1

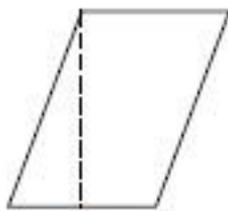


Figura 2

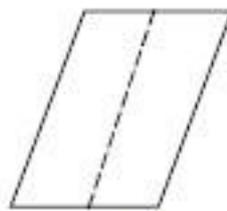


Figura 3

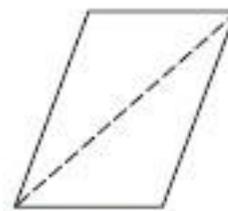


Figura 4

In quale figura il segmento tratteggiato corrisponde all'altezza?

Nella figura...

- A. (Figura 1)
- B. (Figura 2)
- C. (Figura 3)
- D. (Figura 4)

2) Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A. Un triangolo ha sempre tre altezze.
- B. Un triangolo ha solo un'altezza.
- C. Il numero delle altezze dipende dal tipo del triangolo.
- D. Un triangolo non sempre ha l'altezza.

3) Quali, fra le seguenti descrizioni, potrebbero essere considerate accettabili per indicare l'altezza di un triangolo?

- 1 - La distanza tra un vertice e il punto medio del lato opposto.
- 2 - Un segmento che congiunge un lato con il vertice ad esso opposto.
- 3 - La distanza tra un vertice e la retta alla quale appartiene il lato opposto.
- 4 - La distanza tra due vertici del triangolo.
- 5 - Il segmento di perpendicolare da un vertice al lato opposto o al suo prolungamento.

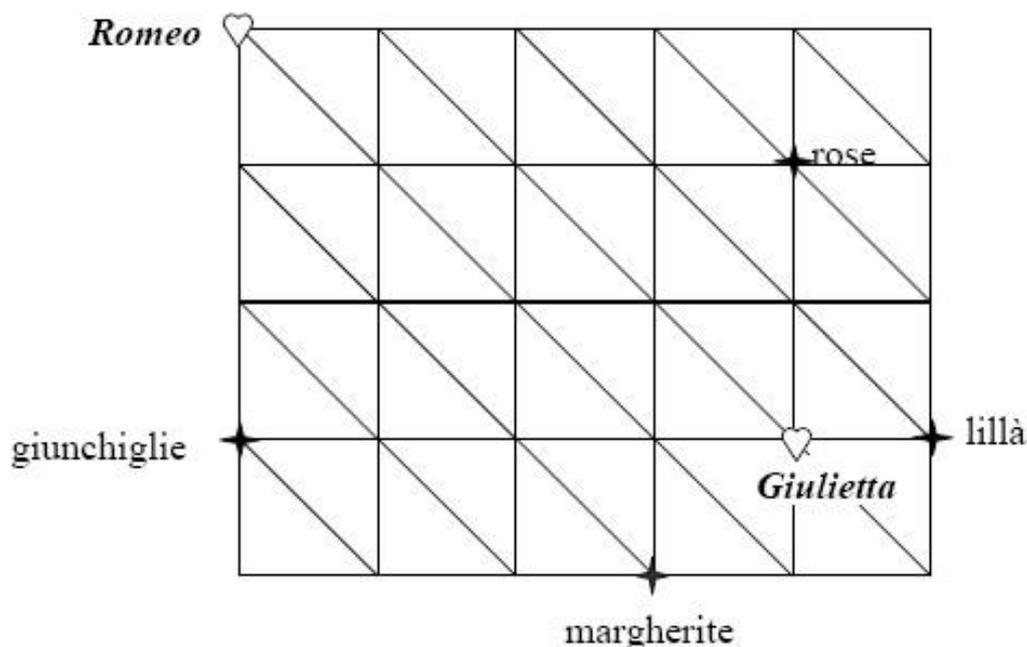
Le risposte accettabili sono:

- 1) B)
- 2) A)
- 3) 3) e 5).

Scarica la versione testuale degli esercizi (allegato [esercizi](#))

Spunti per altre attività con gli studenti

1) Romeo e Giulietta (Cat. 4, 5 del 16° RMT Prova I – gen/feb 2008 © ARMT 2008)



Romeo cammina seguendo le strade disegnate su questa piantina.

Vuole raggiungere Giulietta e vuole anche, però, assolutamente portarle un mazzo di fiori.

Romeo può scegliere tra un mazzo di lillà o un mazzo di rose, o un mazzo di giunchiglie oppure un mazzo di margherite.

Quale mazzo di fiori deve scegliere Romeo per percorrere la strada più corta possibile? Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Analisi a priori

Ambito concettuale

- Geometria: spostamento su una griglia, determinazione di distanze, misura e confronto di lunghezze

Analisi del compito

- Costatare che i percorsi che vanno da Romeo a Giulietta e che passano per un mazzo di fiori sono molti

- Rendersi conto che, per confrontare la lunghezza di due percorsi, non è sufficiente contare il numero di "trattini" dello schema ma che bisogna tener conto del tipo di trattini; ce ne sono due, che corrispondono a due unità di misura non equivalenti: il lato e la diagonale di un quadrato della griglia.

- Trovare i criteri di confronto di queste due unità: una diagonale è più lunga del lato di un quadrato, ma due lati sono più lunghi di una diagonale (tramite una stima a occhio, o attraverso spostamenti reali o immaginari per confrontare direttamente le lunghezze, o tramite la misura effettuata con una riga graduata o riportando le

lunghezze, oppure attraverso dei "teoremi adulti" del tipo «la strada più corta tra un punto ed un altro è la linea retta» ...).

- Trovare il percorso più corto per ogni fiore, tenendo conto dei criteri precedenti.
- Paragonare i quattro percorsi minimali ottenuti: «percorso delle giunchiglie», «percorso delle margherite» ... (tenendo sempre presente i criteri precedenti) aiutandosi eventualmente con una disposizione in tabella:

Fiori scelti	N. di "pezzi" del percorso	N. di lati	N. di diagonali
Giunchiglie	7	7	0
Margherite	6	3	3
Lillà	6	3	3
Rose	6	5	1

- Notare che tra i tre percorsi di 6 pezzi, quelli corrispondenti alle margherite ed ai lillà hanno la stessa lunghezza, mentre quello delle rose comprende una diagonale al posto delle tre degli altri due. Dedurre che la strada delle rose è la più corta tra queste tre.

Paragonare infine il percorso delle rose e quello delle giunchiglie e constatare che quando si tolgono ad ognuno i 5 lati di quadrato, restano due lati per le giunchiglie contro una diagonale per le rose e che quindi la strada delle rose è la più corta.

Oppure: misurare tutti i percorsi con una riga e confrontare le lunghezze

Oppure: riportare le differenti lunghezze di ogni percorso per ottenere un segmento della stessa lunghezza del percorso totale: poi confrontare direttamente o indirettamente le lunghezze dei percorsi ottenuti.

2) Punti notevoli di un triangolo:

L'attività della **Fase 5 (Altezze di un triangolo)** porta all'individuazione dell'**ortocentro** del triangolo (punto di incontro delle altezze o dei loro prolungamenti).

Una prosecuzione di questa attività potrebbe prevedere la ricerca di altri punti notevoli del triangolo:

- **Incentro** (punto di incontro delle bisettrici degli angoli)

L'incentro non coinvolge direttamente il concetto di perpendicolare, tuttavia può emergere molto facilmente dall'attività delle piegature della **fase 5**. Alcuni alunni nella ricerca dell'ortocentro possono aver piegato la carta sovrapponendo lati consecutivi e individuando un punto di incontro delle piegature al quale probabilmente non sono in grado di dare un nome.

Resoconto di quanto accaduto in una classe:

Viene chiesto di disegnare lo stesso triangolo utilizzato nella **Fase 5 Altezze di un triangolo** (10 cm, 11 cm, 12 cm), di ritagiarlo e di piegarlo in modo da sovrapporre i lati consecutivi.

I ragazzi sono guidati a riflettere su cosa succede quando si sovrappongono i due lati: qualcuno dice che si è dimezzato il lato, ma ci si accorge abbastanza presto che non è così; altri osservano correttamente che è l'angolo che si è dimezzato.

Richiesta: "Avete mai incontrato una linea che dimezza un angolo?" Un'alunna ricorda che a educazione tecnica hanno fatto qualcosa di simile e si chiamava bisettrice.

Richiesta: "Quale proprietà può avere il punto di incontro delle bisettrici?" (Occorre dare qualche suggerimento altrimenti difficilmente ai ragazzi può venire in mente qualcosa) "Si usa il compasso!".

Un alunno: "Si centra nel punto e la circonferenza passa da tutti i vertici". Si prova e la congettura si rivela falsa.

Qualcuno osserva: "La circonferenza tocca tutti e tre i lati". Si prova ed è così. Al punto così individuato viene dato il nome di incentro.

L'insegnante fa osservare che l'ortocentro e l'incentro non coincidono, anzi possono essere anche distanti tra loro. (l'ortocentro può essere esterno al triangolo, l'incentro è sempre interno).

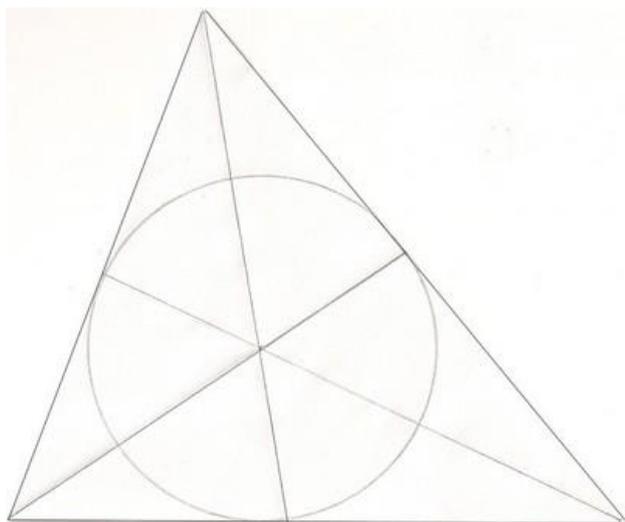


Figura 9 Bisettrici

- **Baricentro** (punto di incontro delle mediane dal punto di vista geometrico; centro di massa dal punto di vista fisico).

La ricerca di questo punto notevole del triangolo porta ad utilizzare un concetto sviluppato nelle attività precedenti: il concetto fisico di verticalità.

Si richiede di disegnare il solito triangolo, ma questa volta sul cartoncino (perché sia più rigido), di ritagiarlo e di tracciarne le mediane.

Il triangolo appoggiato sul baricentro resta in equilibrio (orizzontale).

Se si infila la punta di una penna nel baricentro il cartoncino ruota perfettamente (posizione di equilibrio indifferente).

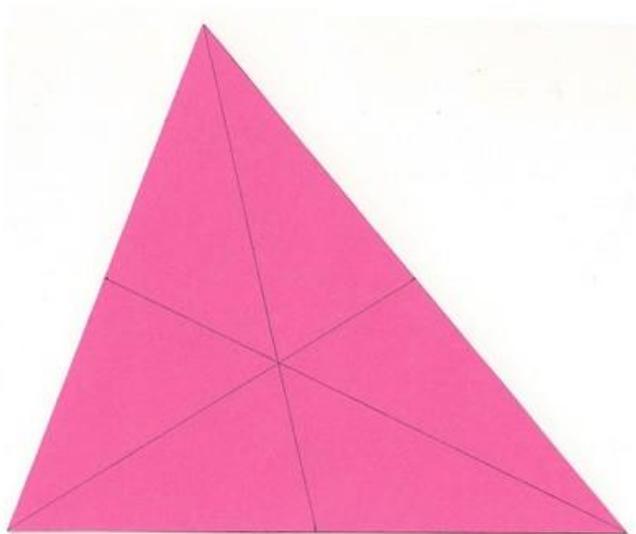


Figura 10 mediane

Si può far osservare che se si sospende il triangolo in un punto qualunque e vi si fa passare un filo a piombo il baricentro si troverà esattamente sulla linea del filo.

Se ripetiamo l'esperimento, sospendendo il triangolo in un altro punto, il baricentro si troverà ancora sulla nuova verticale. Il punto di incontro delle due verticali ci darà il baricentro del triangolo. Questo quindi può essere un altro modo per trovare il baricentro.

Si può far oscillare il triangolo e vedere che alla fine, quando si ferma, il baricentro ritorna ad essere sulla verticale passante per il punto di sospensione (equilibrio stabile dei corpi sospesi).

- **Circocentro** (punto di incontro degli assi dei lati).

Dopo aver esplorato gli altri punti notevoli può sorgere la domanda di trovare il centro della circonferenza che passa per i vertici del triangolo.

Si chiede di disegnare il solito triangolo di 10 cm, 11 cm, 12 cm di ritagliarlo e di provare a trovare, utilizzando le piegature, il centro di quella circonferenza.

Ai ragazzi viene abbastanza facilmente in mente che possono piegare un lato su se stesso facendone coincidere i vertici e di ripetere l'operazione anche per gli altri lati (sicuramente nella ricerca degli altri punti notevoli con le piegature qualche alunno avrà già utilizzato questa modalità).

Fra le consegne da dare agli alunni è importante richiedere di verbalizzare le operazioni eseguite e ciò che si ottiene:

"Ho piegato un lato su se stesso facendo coincidere i due vertici, il lato viene così diviso a metà, la piegatura che si ottiene forma angoli retti con il lato e passa per la metà del lato. Ripeto l'operazione anche per gli altri lati del triangolo".

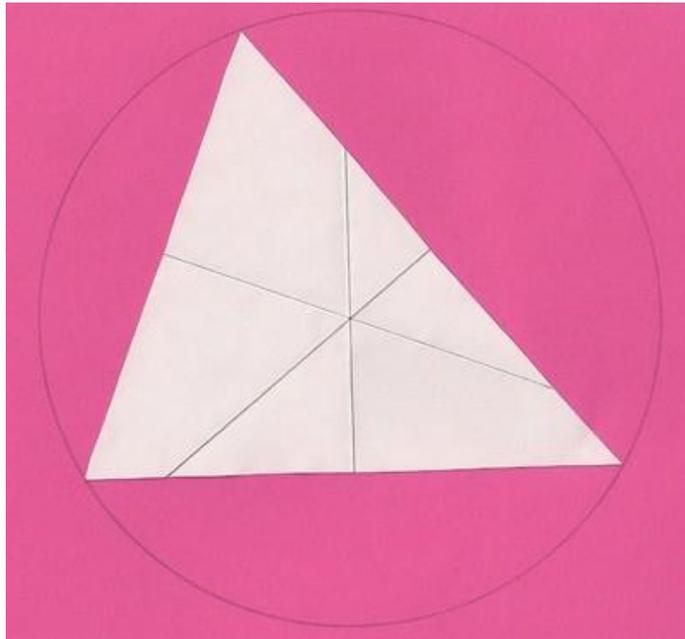


Figura 11 assi

Un'osservazione interessante da fare con gli alunni è che nel caso dei triangoli ottusangoli l'ortocentro e il circocentro sono esterni al triangolo, mentre l'incentro e il baricentro, qualunque sia il triangolo, sono interni.

3) Il Lampione (Prove OCSE-PISA 2003)

Il consiglio comunale ha deciso di mettere un lampione in un piccolo parco triangolare in modo che l'intero parco sia illuminato. Dove dovrebbe essere collocato il lampione?

Questa questione pratica da risolvere è un buon esempio di matematizzazione di una situazione reale. Anche se è stato pensato per ragazzi quindicenni, quindi più grandi, può essere utilizzata come un buon esempio di attività, che richiede l'uso di competenze acquisite.

Si può pensare di procedere così:

1. Problema reale

Occorre localizzare il punto di un parco in cui mettere un lampione.

2. Trasformare il problema reale in un problema matematico

Il parco può essere rappresentato come un triangolo e l'illuminazione di un lampione come un cerchio con il lampione al centro; il problema viene riformulato in: "localizzare il centro del cerchio circoscritto al triangolo".

3. Risolvere il problema matematico

Poiché il centro di un cerchio circoscritto a un triangolo giace nel punto di incontro degli assi dei lati del triangolo, occorre costruire gli assi di due lati del triangolo. Il loro punto di intersezione è il centro del cerchio.

4. Tradurre la soluzione matematica nella situazione reale

La soluzione trovata viene applicata alla situazione del parco reale. Occorre ragionare sulla soluzione e riconoscere che se uno dei tre angoli fosse ottuso, la

soluzione non sarebbe appropriata, poiché il lampione dovrebbe essere collocato fuori dal parco. Occorre anche riconoscere che l'ubicazione e la dimensione degli alberi nel parco sono altri fattori che influiscono sull'utilità della soluzione matematica.

Bibliografia

Colombo Bozzolo Clara, L'altezza questa sconosciuta Università Cattolica, Brescia.

AAVV, *Matematica 2001*. Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media).

<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2001.pdf>

AAVV, *Matematica 2003*. Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola elementare e scuola media).

<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf>

PISA 2003 Valutazione dei quindicenni a cura dell'OCSE, Roma, Armando Armando, 2004

D'Amore B., Sandri P. (1996). Fa' finta di essere... Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 19A, 3, 223-246.

Robutti, O. (2008). Figure e modelli nella scuola primaria. In: L. Giacardi, F. Ferrara, M. Mosca, *Mathesis Subalpina, Conferenze e Seminari 2007-2008*. TORINO: Kim Williams Books (ITALY).

Sitografia

<https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/>

<https://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=ocsepisa06>

Proposta di attività per il corsista

(da condividere e discutere in rete)

Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti: individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.

Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.

Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà.

Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.