

Costruire poligoni

Attività riadattata da Matematica 2001 da *Roberto Battisti, Fabio Brunelli, Franco Spinelli, Carmela Milone*

Introduzione.....	2
Riferimenti curriculari	2
Indicazioni curriculari	2
Prove INVALSI.....	3
Descrizione dell'attività.....	9
Elementi per prove di verifica	14
Spunti per altre attività con gli studenti	20
Bibliografia.....	23
Sitografia	23
Proposta di attività.....	23



Unione Europea
P.O.N. - "Competenze per lo Sviluppo" (FSE)
D.G. Occupazione, Affari Sociali e pari Opportunità



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali e europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale



Introduzione

Questa proposta si configura come un'attività di **laboratorio** (Intendiamo qui per laboratorio non tanto un luogo fisico attrezzato, quanto una metodologia di lavoro tale da permettere agli allievi non solo di eseguire, ma anche di progettare, costruire e manipolare con materiali diversi, discutere e argomentare, fare ipotesi, sperimentare e controllare la validità delle ipotesi formulate)

Si tratta di un itinerario proponibile anche come primo approccio alla geometria del piano in una classe prima. Quest'attività porta i ragazzi a conoscere e definire le principali figure piane attraverso la scoperta delle loro proprietà e attraverso la loro descrizione. Gli oggetti matematici quindi vengono conosciuti attraverso la scoperta di un insieme di proprietà e alcune di queste vengono poi riconosciute come quelle che lo determinano. È fondamentale l'equilibrio tra fasi operative e graduali sistemazioni teoriche per permettere un percorso che, partendo da evidenze visive o da ragionamenti su figure, arrivi gradualmente ad argomentazioni e concettualizzazioni sempre più rigorose.

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni Curricolari attualmente in vigore (D.M. 16 novembre 2012, n. 254) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni Curricolari e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni curricolari: riferimenti

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria:

L'alunno:

- riconosce e rappresenta forme del piano e dello spazio, relazioni e strutture che si trovano in natura o che sono state create dall'uomo;
- descrive, denomina e classifica figure in base a caratteristiche geometriche, ne determina misure, progetta e costruisce modelli concreti di vario tipo;
- utilizza strumenti per il disegno geometrico (riga, compasso, squadra) e i più comuni strumenti di misura (metro, goniometro ...).

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado:

L'alunno:

- riconosce e denomina le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado

Spazio e figure

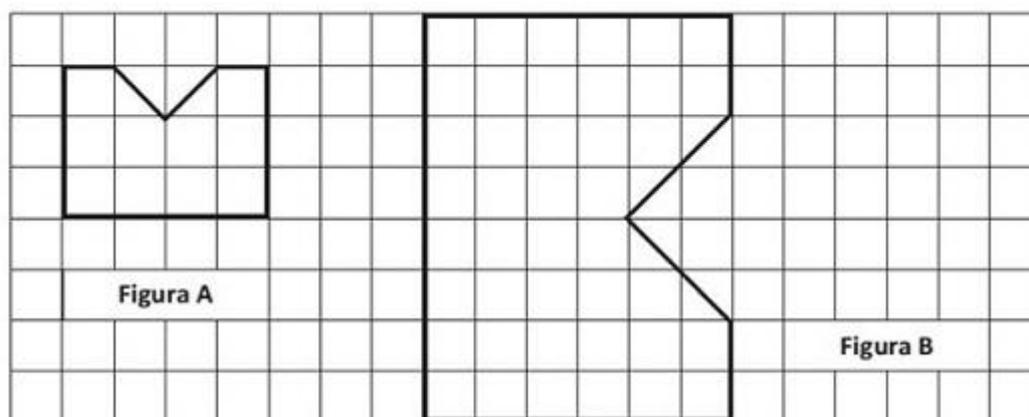
- Riconoscere figure piane simili in vari contesti e riprodurre in scala una figura assegnata.
- Conoscere definizioni e proprietà (angoli, assi di simmetria, diagonali...) delle principali figure piane (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchio).
- Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria).
- Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure.

Prove INVALSI

a.s. 2011/2012 - Domanda D29

Scuola secondaria di I grado - Classe I

D29. Osserva le due figure:



Indica quale delle seguenti affermazioni è vera.

- A. L'area della figura A è la metà dell'area della figura B
- B. L'area della figura B è il triplo dell'area della figura A
- C. L'area della figura B è il quadruplo dell'area della figura A
- D. L'area della figura A è due terzi dell'area della figura B

Soluzione INVALSI: C

Commento

Per poter rispondere correttamente lo studente deve determinare il numero di quadratini che compongono la figura A (11) e di quelli che compongono la figura B (44), e poi effettuare il confronto.

È difficile che lo studente possa a occhio capire la relazione tra le due figure (le figure sono simili). Interessante è controllare le diverse strategie utilizzate dagli studenti per il calcolo dell'area delle figure.

a.s. 2009/2010 - Domanda D16

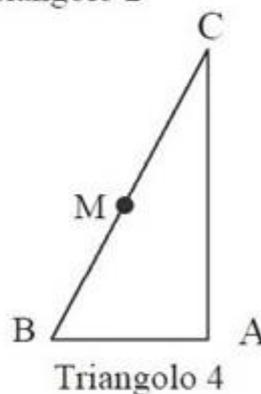
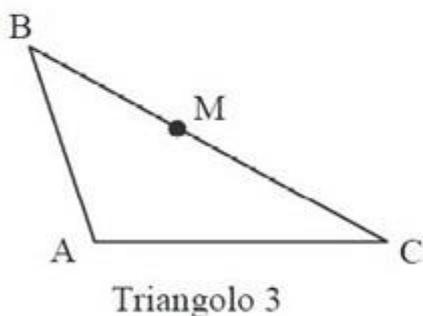
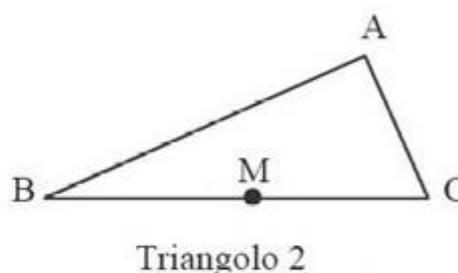
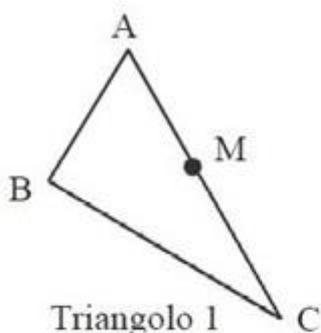
Scuola secondaria di I grado - Classe I

D16. Indica quale dei seguenti triangoli corrisponde a questa descrizione:

ABC è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in A.

Il cateto AB è minore del cateto AC.

M è il punto medio dell'ipotenusa.



- A. Triangolo 1
- B. Triangolo 2
- C. Triangolo 3
- D. Triangolo 4

Soluzione INVALSI: D

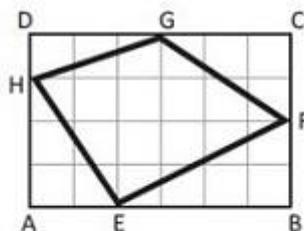
Commento

L'allievo deve coordinare aspetti linguistici, logici e geometrici nel medesimo contesto di figure del piano.

a.s. 2011/2012 - Domanda D15

Scuola secondaria di I grado - Classe I

D15. In figura è rappresentato il quadrilatero EFGH i cui vertici sono sui lati del rettangolo ABCD. Le dimensioni del rettangolo sono 4 m e 6 m.



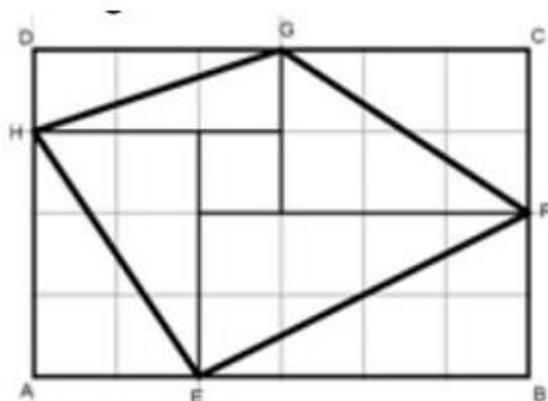
Quanto misura l'area del quadrilatero EFGH?

- A. 11 m²
- B. 11,5 m²
- C. 12 m²
- D. 12,5 m²

Soluzione INVALSI: D

Commento

Il modo forse più semplice per risolvere questo quesito è scomporre il rettangolo in 4 triangoli come in figura:



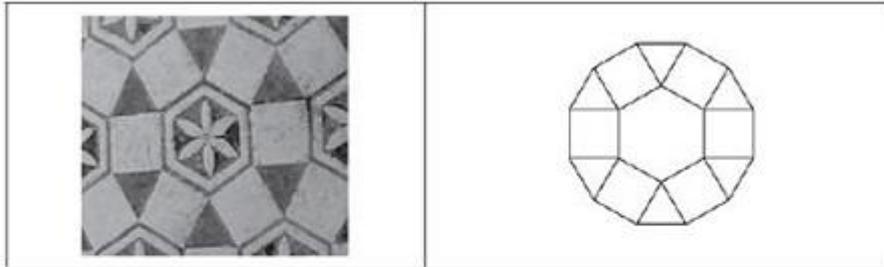
Calcolare poi le aree dei triangoli e sommarle tra loro aggiungendo il quadrato centrale (1,5 + 3 + 3 + 4 + 1).

Un'altra strategia è rappresentata dalla individuazione dell'area del rettangolo (24 cm²) a cui togliere le aree di triangoli (24 - 11,5 = 12,5).

a.s. 2010/2011 - Domanda D9

Scuola secondaria di I grado - Classe III

D9. Le immagini che seguono rappresentano un motivo del pavimento di una antica casa romana e la sua schematizzazione geometrica:



Il motivo, corrispondente a un dodecagono, è composto da un esagono regolare interno, sei quadrati uguali e sei triangoli equilateri uguali.

Indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

		Vero	Falso
a.	L'area dell'esagono è metà dell'area del dodecagono	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b.	L'area di ciascun triangolo è un sesto dell'area dell'esagono	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c.	L'area di un quadrato è il doppio dell'area di un triangolo	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d.	Il perimetro del dodecagono è il doppio di quello dell'esagono	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Soluzione INVALSI:

D9_a.: Falso

D9_b.: Vero

D9_c.: Falso

D9_d.: Vero

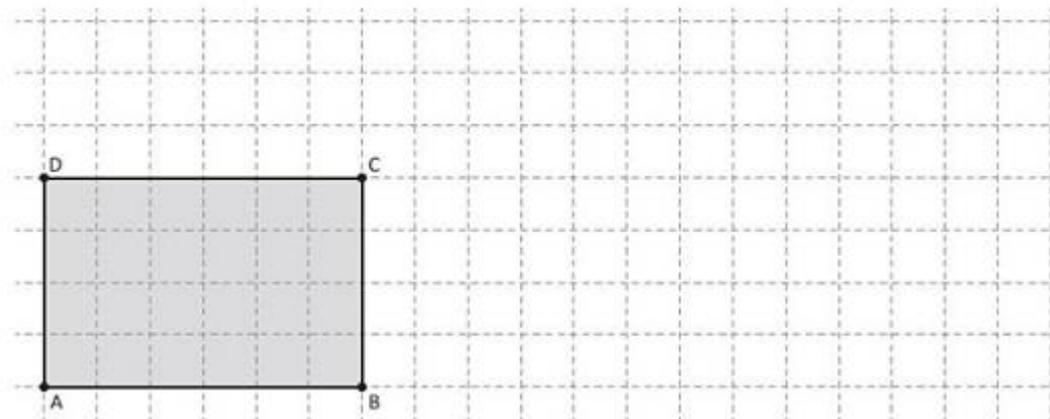
Commento

All'allievo è richiesto di conoscere e utilizzare la proprietà dell'esagono regolare di essere scomponibile (e quindi equivalente) in sei triangoli equilateri congruenti aventi il lato uguale al lato dell'esagono.

a.s. 2012/2013 - Domanda D16

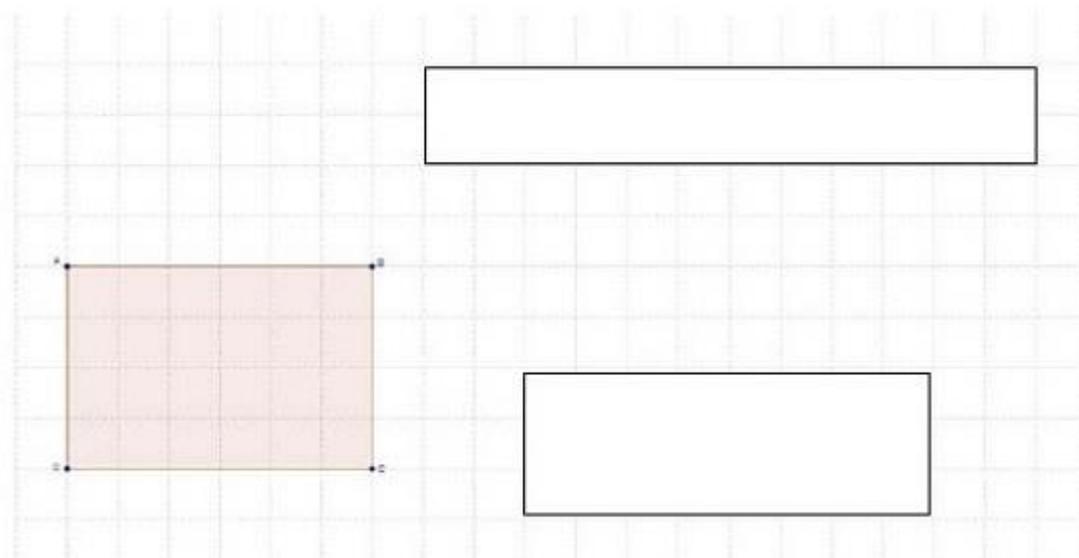
Scuola secondaria di I grado - Classe III

D16. Disegna nel piano quadrettato un rettangolo che abbia la stessa area del rettangolo ABCD, ma perimetro maggiore.



Soluzione INVALSI:

Lo studente disegna o un rettangolo 8 x 3 oppure 2 x 12, oppure qualunque rettangolo con lati x ed y tali che $xy = 24$ e $x + y > 10$



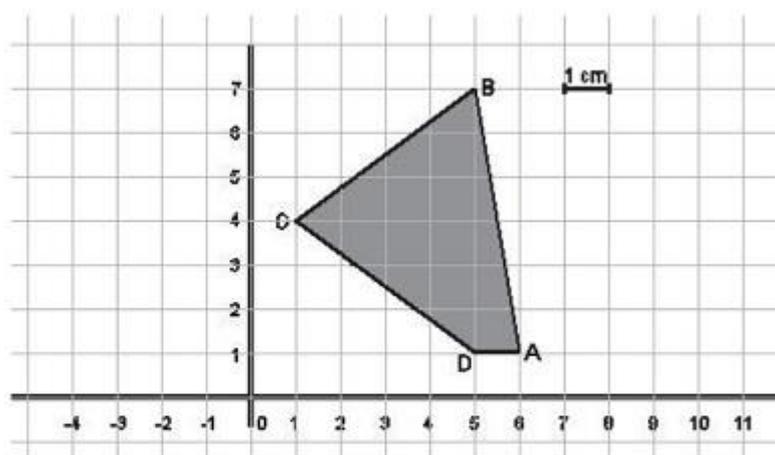
Commento

Lo studente deve riuscire a produrre una figura che rispetti i vincoli posti dal problema sulle relazioni tra i lati del rettangolo: stessa area di ABCD, quindi $xy = 24$ e perimetro maggiore quindi $x + y > 10$, utilizzando il piano quadrettato.

a.s. 2010/2011 - Domanda D18
Scuola secondaria di II grado - Classe II

Il seguente quesito riguarda la scuola secondaria di secondo grado e non può essere proposto come verifica a livello di scuola secondaria di primo grado.
Lo riportiamo qui ugualmente perché la figura del quesito è ricca dal punto di vista geometrico e si presta ad una attività di problem solving collettivo sotto la guida dell'insegnante.

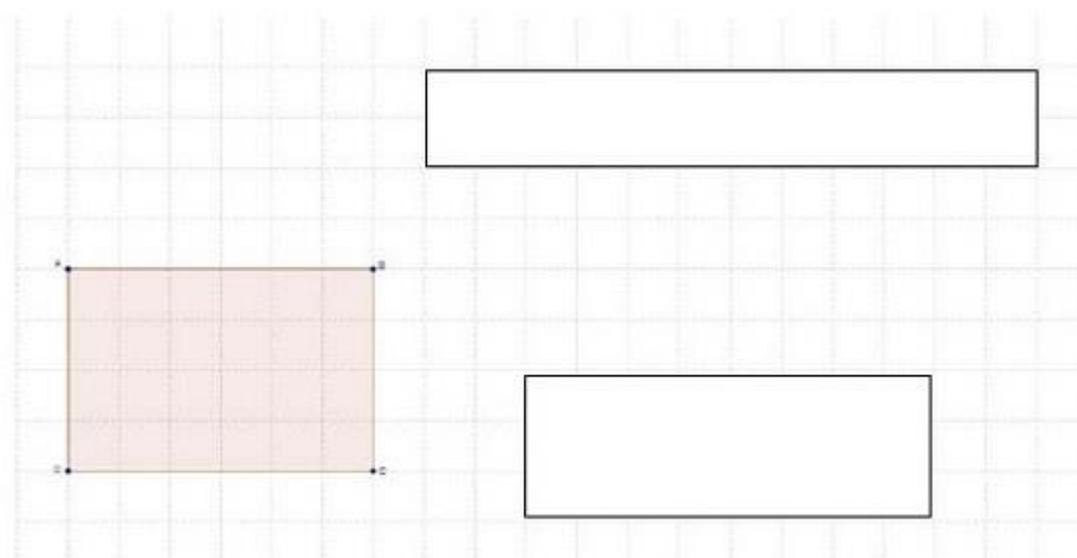
D18. L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.



Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

Risposta: cm²

Soluzione INVALSI:
15 cm²



Commento

Per rispondere è sufficiente conoscere quanto viene svolto nella scuola secondaria di primo grado relativamente ai poligoni equiscomponibili. Si tratta di esercizi tipici della

prassi didattica della scuola secondaria di primo grado, ma anche degli ultimi anni della scuola primaria. Stupisce, quindi, l'elevato numero di risposte mancanti (1 studente su 3) e la bassa percentuale di risposte corrette (meno del 30%). Livello di difficoltà: 1,03

Risultati del quesito D18:

Risposte corrette 28.7%

Risposte errate 37.7%

Risposte Mancate 33.6%.

Descrizione dell'attività

Fase 1

L'insegnante chiede agli alunni: "Dati tre punti è sempre possibile costruire un triangolo avente i punti dati come vertici?" I ragazzi con matita e righello verificano che la risposta è generalmente affermativa. L'insegnante potrà suscitare una breve discussione tra loro per arrivare a precisare che i punti devono essere distinti e non allineati.

L'insegnante chiede agli alunni: "Dati tre segmenti è sempre possibile costruire un triangolo avente i segmenti dati come lati?"

Per rispondere a questa domanda l'insegnante prepara molte striscioline di cartoncino rigido forate alle estremità per l'inserimento dei ferma campioni. La larghezza delle striscioline può essere di un centimetro, le lunghezze possono essere, per esempio, di 7 cm, 10 cm, 18 cm.

Ai ragazzi, riuniti in coppie o in piccolo gruppo, vengono fornite numerose striscioline delle misure su indicate e viene loro richiesto di provare a costruire tutti i triangoli possibili con le striscioline date. L'insegnante ha il compito di guidare i ragazzi alla scoperta che alcune terne di striscioline (come quelle di lunghezza 7 cm, 7 cm, 18 cm) non danno origine ad alcun triangolo. I ragazzi possono raccogliere i loro risultati in una tabella.

Tabella costruibilità triangoli			
Lunghezza dei lati in cm	Lunghezza del lato maggiore in cm	Somma delle lunghezze degli altri due lati in cm	Si forma il triangolo?
7 - 7 - 7	7	14	SI
10 - 10 - 10	10	20	SI
18 - 18 - 18	18	36	SI
7 - 7 - 10	10	14	SI
7 - 7 - 18	18	14	NO
10 - 10 - 7	10	17	SI
10 - 10 - 18	18	20	SI
18 - 18 - 7	18	25	SI
18 - 18 - 10	18	28	SI
7 - 10 - 18	18	17	NO

Dalla analisi dei dati ottenuti possono arrivare a enunciare la regola di costruibilità dei triangoli: "In un triangolo ogni lato deve essere minore della somma degli altri due", oppure, "In un triangolo la somma di due lati deve essere maggiore del terzo lato".



Unione Europea
P.O.N. - "Competenze per lo Sviluppo" (FSE)
D.G. Occupazione, Affari Sociali e pari Opportunità



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali e europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale



L'attività proposta con le strisce di cartoncino rigido potrà essere ripetuta con riga e compasso o con un software di geometria dinamica.

Scarica il file geogebra per vedere la costruzione del triangolo (allegato [Costruzione triangolo](#))

Fase 2

L'insegnante ripropone lo stesso percorso didattico già effettuato con i triangoli questa volta con i quadrilateri. I ragazzi dovranno scoprire che, dati quattro punti, per ottenere un quadrilatero essi devono essere non coincidenti e non allineati a gruppi di tre (analogia con il caso dei triangoli). Inoltre, mentre tutti i triangoli sono convessi (Un poligono è convesso quando la retta che congiunge due qualsiasi vertici consecutivi della spezzata chiusa lascia gli altri vertici in uno stesso semipiano) nel caso dei quadrilateri può accadere di ottenerne anche di non convessi. Costruendo i quadrilateri con le strisce di cartoncino gli allievi si dovranno accorgere che non sempre si ottiene un quadrilatero, cioè esiste una condizione di costruibilità anche per i quadrilateri analoga a quella dei triangoli. Gli allievi dovranno anche scoprire che, mentre i triangoli sono figure rigide, cioè dati tre segmenti il triangolo individuato è unico, i quadrilateri sono figure articolabili cioè, dati quattro segmenti i quadrilateri individuati sono infiniti (differenza con il caso dei triangoli). L'attività proposta con le strisce di cartoncino rigido potrà essere ripetuta anche questa volta con riga e compasso o con un software di geometria dinamica.

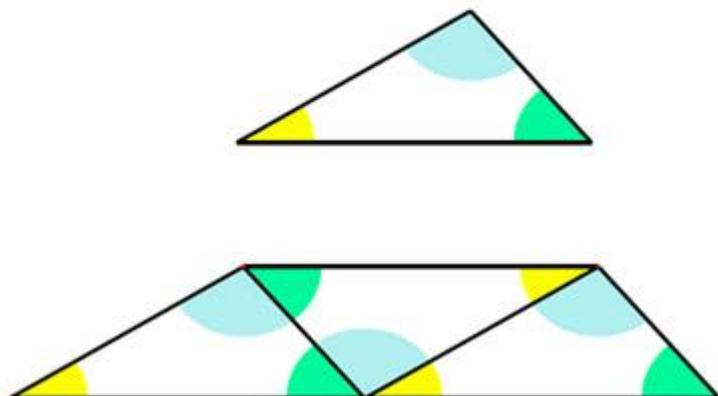
Scarica il file geogebra [figure rigide e non](#)

L'insegnante potrà ancora sollecitare gli allievi con domande del tipo: "Deformando un quadrilatero, costruito a partire da quattro segmenti assegnati, come varia il suo perimetro? Come varia l'area?"

Fase 3

Angoli interni dei triangoli

L'insegnante chiede ai suoi allievi come sono gli angoli interni di un triangolo: "Possono essere acuti? Quanti acuti? Retti? Quanti retti? Ottusi? Quanti ottusi?" I ragazzi disegnano i vari tipi di triangoli, discutono, scrivono le osservazioni proprie e di altri. L'insegnante può anche chiedere: "Disegnate un triangolo che abbia un angolo di 50° e un altro di 60° , quanti triangoli potete costruire? "Puoi disegnare un triangolo in cui la somma degli angoli interni è 210° ? E 150° ?" L'insegnante chiede cosa accade quando si deforma un triangolo in modo da ampliare un angolo: "Gli altri due angoli variano? E se variano, cosa resta invariato?" Gli allievi saranno guidati a congetturare prima e a verificare dopo che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto (misura 180°). Le verifiche empiriche di questo teorema si trovano facilmente nei libri di testo. Ad esempio si può pensare di prendere un triangolo ritagliato in cartoncino; poi si possono affiancare i suoi tre angoli servendosi di tre copie del triangolo in oggetto, ottenendo una disposizione di questo tipo:



L'attività proposta con il disegno potrà essere ripetuta anche con un software di geometria dinamica.

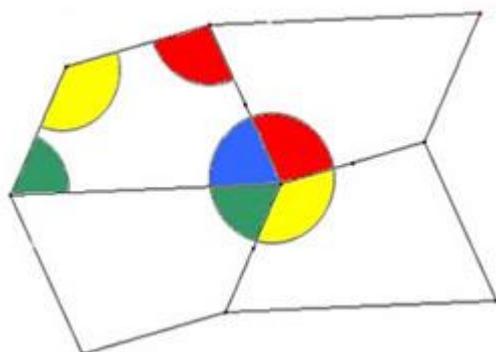
Vedi file [somma angoli triangolo](#) in allegato

Un'altra attività sui triangoli potrebbe essere quella di far disegnare un triangolo date le ampiezze dei tre angoli (la cui somma è 180°). Far osservare che le soluzioni possibili di questo problema portano a triangoli con i lati di lunghezze diverse, ma della stessa forma.

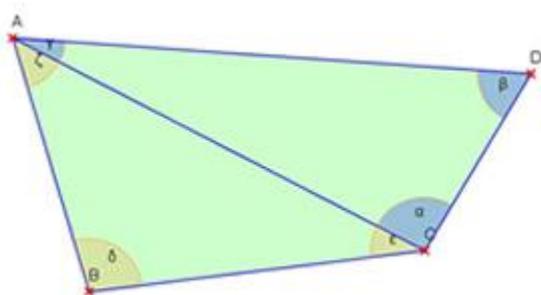
Fase 4

Angoli interni dei quadrilateri

L'insegnante ripropone lo stesso percorso didattico già effettuato con i triangoli questa volta con i quadrilateri convessi. Gli allievi sono invitati a descrivere prima e a sommare poi gli angoli interni di un quadrilatero: i ragazzi disegnano i vari tipi di quadrilateri, discutono, scrivono le osservazioni proprie e di altri. Gli allievi scopriranno empiricamente che la somma degli angoli interni di ogni quadrilatero è costante (analogia con il caso dei triangoli) e che la somma degli angoli interni è due angoli piatti (differenza).



Il fatto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli piatti può anche essere dedotto dividendo in due parti il quadrilatero con una delle sue diagonali e considerando i due triangoli che in questo modo si ottengono.



Un'altra attività sui quadrilateri potrebbe essere quella di far disegnare un quadrilatero date le ampiezze dei quattro angoli (la cui somma è 360°). Far osservare in questo caso che il problema non ha sempre soluzione (es. $100^\circ, 100^\circ, 100^\circ, 60^\circ$) e inoltre le soluzioni possibili portano a quadrilateri non solo con i lati di lunghezze diverse, ma anche non tutti della stessa forma.

Indicazioni metodologiche

La metodologia didattica tradizionale dell'insegnamento della geometria nella scuola italiana è generalmente quella trasmissiva (l'insegnante parla e disegna alla lavagna, descrive, spiega, dimostra) e anche deduttiva (da pochi concetti primitivi e postulati ad una molteplicità di definizioni e teoremi, per finire con l'applicazione a svariati casi di problemi reali, in perfetta analogia con gli Elementi di Euclide). La metodologia qui adottata si fonda sul metodo socio-costruttivista, secondo cui gli allievi, da soli, a coppie o a piccoli gruppi, costruiscono le loro conoscenze in modo attivo, costantemente, lavorando per rispondere a delle situazioni problematiche e risolverle. L'apprendimento di una nuova conoscenza, organizzata a partire dalla individuazione e dalla risoluzione di problemi, si caratterizza come un'attività di ricerca, di produzione di ipotesi, di esplorazioni, di verifiche, attività tutte proprie alla ricerca matematica. L'insegnante ha il compito di stimolare nell'allievo una ricerca attiva, di coordinare il dibattito in classe, di istituzionalizzare le conoscenze nuove, magari riutilizzandole e rafforzandole poi con esercizi di applicazione e verifiche. La metodologia proposta prevede anche l'orchestrazione da parte dell'insegnante della discussione matematica, alternando momenti di lavoro a classe intera, ad altri a piccoli gruppi, per garantire la cooperazione, l'interazione, il confronto con i compagni, discutendo e difendendo le proprie soluzioni proposte, ma accettando di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di un'argomentazione corretta. Lavorando con queste modalità i ragazzi devono sapersi organizzare, dividere il lavoro, gestire il tempo a disposizione, accettare i contributi di tutti, entrare nel punto di vista degli altri, acquisire in definitiva quelle capacità che diventano indispensabili se si desidera adattarsi "bene" alla società attuale.

Dare l'opportunità di argomentare, di discutere le proprie soluzioni, di sostenere le proprie affermazioni, di validare la propria attività matematica, significa **dar loro fiducia** e far crescere la loro responsabilità nell'organizzare e gestire una "piccola" ricerca, proprio il contrario di quanto avviene nelle situazioni tradizionali, dove l'insegnante pensa di essere il vero responsabile della riuscita dei propri allievi, per cui tende a dirigere il lavoro ad aggirare gli ostacoli e ad evitare gli errori per indicare la via "giusta", utilizzando le strategie ritenute più efficaci. Una ulteriore indicazione metodologica è quella di richiedere agli alunni di descrivere per iscritto l'attività svolta, spiegando le motivazioni delle scelte fatte e delle strategie utilizzate, le difficoltà incontrate, insomma si tratta di ripercorrere il tragitto fatto e indicare quello che Polya ha definito "le acquisizioni metodologiche".



Unione Europea
P.O.N. - "Competenze per lo Sviluppo" (FSE)
D.G. Occupazione, Affari Sociali e pari Opportunità



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale



Quindi gli allievi attraverso momenti, che Freudenthal ha indicato, come: osservazione oggetti → manipolazione → costruzione → rappresentazione → comunicazione, dovrebbero essere in grado di costruirsi "gli oggetti mentali" della geometria piana per poi passare gradualmente alla costruzione dei concetti. Gli oggetti, come abbiamo ricordato precedentemente, vengono conosciuti attraverso la scoperta delle loro proprietà e la loro descrizione. Le regolarità geometriche appaiono spesso nell'eseguire tagli, piegature, assemblaggi e sovrapposizioni; tutte queste attività fanno poi apparire intere famiglie di figure, le cui proprietà più complesse e sorprendenti possono venir dimostrate basandosi su quelle più semplici, che costituiscono quindi "un'isola deduttiva" efficace.

La discussione matematica

La fase chiave dell'attività è sicuramente quella collettiva, gestita dall'insegnante come coordinatore della discussione matematica (si veda il documento relativo nel volume *Matematica 2001*) attorno alla situazione-problema.

La raccolta delle ipotesi di soluzione è la prima parte della discussione: va fatta con estrema disponibilità, senza valorizzarne una in particolare, oppure stroncarne una non corretta. Tutte le ipotesi dei ragazzi vanno rigorosamente raccolte e messe al vaglio da loro stessi, in una fase di negoziazione della correttezza o meno. Si verificherà magari che il sostenitore di una ipotesi la difenda accanitamente, con motivazioni più o meno razionali.

Il ruolo dell'insegnante in questa parte di discussione è quello di riportare sempre la discussione su un piano razionale, promuovendo l'argomentazione a favore di una congettura o contro di essa. In tal modo si abitua i ragazzi a non abbracciare un'ipotesi sulla base dell'autorità che può esercitare l'allievo che l'ha formulata, o di fattori affettivi o irrazionali, o ancora di motivazioni di tipo qualitativo. Occorre cioè spingere verso un'argomentazione che giustifichi un'ipotesi con un ragionamento sorretto non solo da giustificazioni logiche, ma anche da calcoli sui dati.

Spunti per un approfondimento disciplinare

1. Riflessioni sui criteri di eguaglianza dei triangoli.

Molto spesso a scuola si trattano i criteri di eguaglianza dei triangoli senza però esplicitarne né la motivazione, né la unicità.

A che servono i criteri di eguaglianza?

Funzionano un po' come un identikit nei riguardi di due triangoli che si sospetta possano essere uguali. Servono a semplificarci un po' la vita.

In generale diciamo che due triangoli sono uguali quando con un movimento rigido è possibile sovrapporli in modo che coincidano, in tal caso coincidano sia i lati che gli angoli. Per garantire, quindi, l'eguaglianza di due triangoli dovremmo provare che i lati corrispondenti sono uguali e che gli angoli corrispondenti sono uguali, dovremmo quindi controllare ben sei coppie di elementi: 3 lati e 3 angoli. Ebbene, per i triangoli esistono dei criteri che consentono, attraverso il controllo di un numero minimo di elementi, (solo 3, purché non tutti angoli), di garantire che i triangoli sono uguali.

Superata questa premessa di solito nei libri di testo vengono introdotti i tre criteri di eguaglianza (possibilmente con attività di manipolazione) e vengono applicati nella risoluzione di vari problemi.

Crediamo però che non si "perda" il giusto tempo per far verificare che i criteri di uguaglianza dei triangoli sono solamente quei tre.

Nei criteri vengono confrontati 3 elementi su 6 dei triangoli. È possibile scegliere questi elementi in maniera diversa?

Potremmo ad esempio scegliere di esaminare questi casi:

- a) due triangoli che hanno tutti e tre gli angoli ordinatamente uguali;
- b) due triangoli che hanno uguali due lati e un angolo non coincidente con quello compreso fra i due lati.

Ricorrendo al software Cabri è possibile verificare facilmente che in nessuno dei tre casi suddetti è possibile garantire l'eguaglianza dei triangoli, in quanto si riescono a costruire dei controesempi.

Vedi file allegato [3angoli.ggb](#)

Vedi file allegato [2lati1angolo.ggb](#)

2. Isoperimetria ed equiestensione

Questo nodo concettuale rappresenta ancora per molti ragazzi uno scoglio notevole e rimane aperto un conflitto estremamente importante quanto delicato, specialmente nella sua costruzione. Per questo motivo nelle prove di verifica abbiamo inserito dei problemi che presentano queste situazioni.

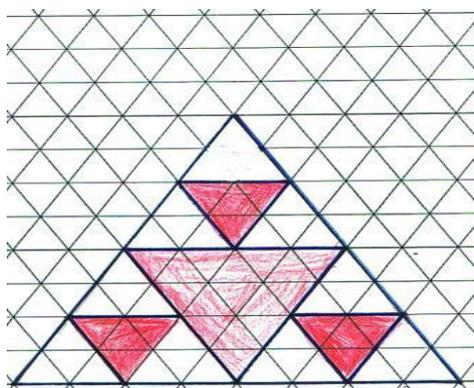
L'approccio al concetto di area dovrebbe avvenire, come sottolineano ormai molti esperti in didattica, attraverso l'identificazione della stessa come una grandezza e solo dopo si dovrebbe passare alla sua misura. Come riporta anche Rouche (*Le sens de la mesure*, 1992, Formation Didier Hatier), nella prima fase devono essere distinti chiaramente gli oggetti, le grandezze e le misure.

L'area in quanto grandezza costituisce un legame fra le superfici (polo geometrico) e le misure (polo numerico). Alcuni didattici (Perrin-Georian 1989, Jaquet 2000) ritengono infatti che un'identificazione troppo precoce fra grandezze e numeri possa favorire la confusione fra le diverse grandezze in gioco (perimetro e area).

Elementi per prove di verifica

1. Prova a costruire un triangolo avente il secondo lato metà del primo e il terzo metà del secondo. Giustifica con il ragionamento quanto emerge dal disegno.

2. Prova a costruire un triangolo avente il secondo lato e il terzo lato entrambi metà del primo. Giustifica con il ragionamento quanto emerge dal disegno.



3. Prova a completare la tabella, con le opportune misure dei lati:

TRIANGOLO	lato a (cm)	lato b (cm)	lato c (cm)
Scaleno	24	15	
Scaleno	3		28

Equilatero		8	
Isoscele	50	25	
Isoscele	37		37
Isoscele		78	1

In quali casi hai più di una soluzione?

4. Costruisci un triangolo i cui la misura dei lati sia espressa da un numero intero di cm e che abbia perimetro 27 cm.

Puoi costruirne uno solo?

Quanti ne puoi costruire?

Quali tipi di triangoli puoi ottenere?

Motiva le tue risposte.

5. Il triangolo equilatero è un particolare triangolo isoscele che ha: ... (elenca solo le proprietà che il triangolo equilatero ha in più rispetto al triangolo isoscele).

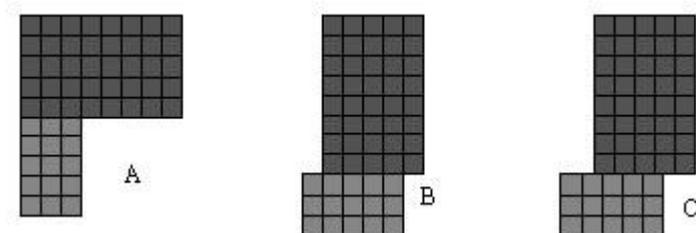
Il rettangolo è un particolare parallelogramma che ha: ... (elenca solo le proprietà che il rettangolo ha in più rispetto al parallelogramma)?

Il quadrato è un particolare rombo che ha: ... (elenca solo le proprietà che il quadrato ha in più rispetto al rombo).

Il quadrato è un particolare rettangolo che ha: ... (elenca solo le proprietà che il quadrato ha in più rispetto al rettangolo).

6. I due rettangoli (Finale 13° RMT, Categorie 4-6)

Si ritagliano due rettangoli in un foglio di carta a quadretti, seguendo le righe della quadrettatura. Le lunghezze dei lati del primo rettangolo sono 5 e 8 lati di quadretto, quelle del secondo sono 5 e 3 lati di quadretto. Questi due rettangoli vengono posti l'uno vicino all'altro, senza sovrapposizioni in modo che si tocchino lungo uno o più lati interi di quadretti (un quadretto di un rettangolo può toccarne solo uno dell'altro rettangolo, con l'intero lato del quadretto). È così possibile trovare numerose figure. (Esempi: le figure A e B sono corrette. La figura C non è corretta perché ci sono dei quadretti di un rettangolo che toccano due quadretti dell'altro rettangolo).



Le figure ottenute non hanno tutte lo stesso perimetro. Per esempio, il perimetro di A misura 36 unità, quello di B ne misura 34.

Qual è il perimetro più piccolo che può avere una figura ottenuta unendo questi due rettangoli rispettando le regole assegnate?

**E qual è il perimetro più grande che si può ottenere?
Spiegate il vostro ragionamento e mostrate le vostre soluzioni.**

Analisi a priori

Ambito concettuale

Geometria: rettangolo, poligoni e perimetro

Aritmetica: addizione

Analisi del compito

Capire le regole di formazione delle figure a partire dai due rettangoli e ciò che rappresenta il loro perimetro aiutandosi con gli esempi.

Disegnare altre figure o costruirle con spostamento di rettangoli mobili ritagliati su carta quadrettata e calcolare il loro perimetro. Trovare così, per tentativi successivi, che il perimetro minore è 32 e il maggiore è 40.

Capire che il perimetro delle figure è minore della somma dei perimetri dei due rettangoli ($42 = 26 + 16$) e che dipende dalla lunghezza della parte comune, indipendentemente dalla forma della figura, cosa che permette di spiegare che, se tale parte misura 1 (la più piccola possibile), il perimetro sarà $42 - 2 \times 1 = 40$ e se questa parte misura 5 (la più grande possibile), il perimetro sarà $42 - 2 \times 5 = 32$.

7. Quadrilateri (Finale 13° RMT, Categorie 6-8)

Con quattro triangoli rettangoli uguali, di lati 3 cm, 4 cm e 5 cm, disposti in modo che ogni triangolo abbia almeno un lato in comune con un altro, si possono ottenere varie figure che chiameremo quadrilateri.

Si considerano diversi due quadrilateri che hanno almeno un lato o un angolo diverso (e non solo una diversa disposizione dei triangoli al loro interno). Ad esempio questi due quadrilateri, di perimetro 22 cm, non sono considerati diversi:



Tra tutti i quadrilateri quali sono quelli di perimetro minimo?
Disegnateli e spiegate come li avete trovati.

Analisi a priori

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione, sottrazione, moltiplicazione

Geometria: poligoni, equiestensione, perimetri

Analisi del compito

Leggere l'enunciato e comprendere le regole di formazione delle figure.

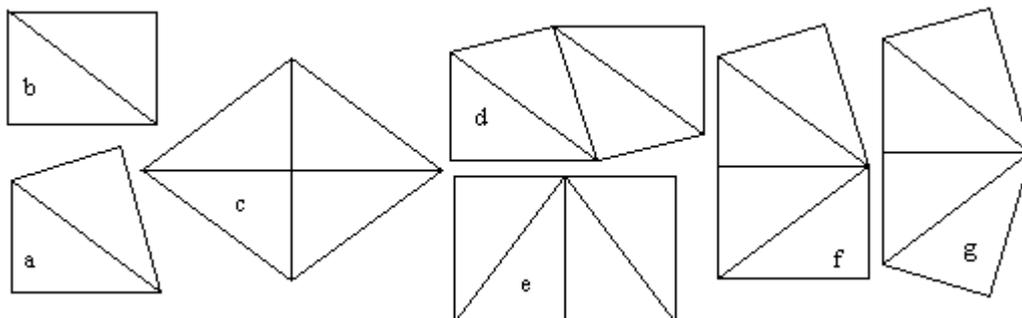
Considerare che, se non ci fossero lati in comune, il perimetro del quadrilatero risulterebbe $4 \times 12 = 48$ (in cm). Per ogni lato in comune occorre togliere, da 48 cm, due volte la misura del lato comune.

Osservare che i lati comuni sono tre oppure quattro. Nel primo caso, per avere il perimetro minimo, occorre avere in comune due lati da 5 cm e un lato da 4 cm. Nel secondo caso due lati da 3 cm e due da 4 cm. (In ogni caso occorre togliere da 48 il doppio di 14)

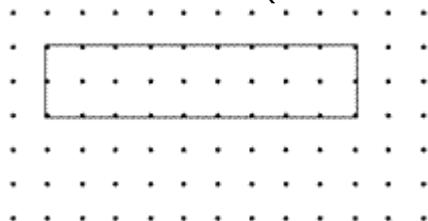
Costruire i quadrilateri rispettando i vincoli fissati. Considerare che, una volta scelto il lato comune, ci sono sempre due diversi modi di disporre due triangoli. Ad esempio due triangoli con l'ipotenusa in comune possono essere disposti nei due modi a e b delle figure seguenti, corrispondenti rispettivamente ad una simmetria assiale e a una simmetria centrale;

Si può anche procedere in modo empirico ritagliando i triangoli e ricomponendo le figure.

Si ottengono le cinque possibilità c, d, e, f, g, tutte di perimetro 20 cm (48 cm-28 cm):



8. La cordicella (Finale 15° RMT, categorie 4-5)



Annamaria ha teso una cordicella su un'asse chiodata rettangolare. Vede che la cordicella:

- forma un rettangolo i cui lati sono paralleli a quelli della tavoletta
- tocca 22 chiodi
- circonda 18 quadretti interi

Disegnate una cordicella che, come la precedente:

- formi un rettangolo i cui lati siano paralleli a quelli dell'asse
- tocchi sempre 22 chiodi
- ma circonda il maggior numero possibile di quadrati interi.

Siete sicuri d'aver trovato il rettangolo che contiene il maggior numero di quadrati? Motivate la vostra risposta.

Analisi a priori

Ambito concettuale

Aritmetica: addizione, moltiplicazione

Geometria: rettangolo, approccio alle nozioni di perimetro e area

Analisi del compito

Verificare i dati dell'enunciato: 22 chiodi e 18 quadrati

Pensare che il rettangolo potrebbe essere più lungo o più largo e rendersi conto che se si aumenta la lunghezza, la larghezza diminuisce e reciprocamente, se diminuisce la

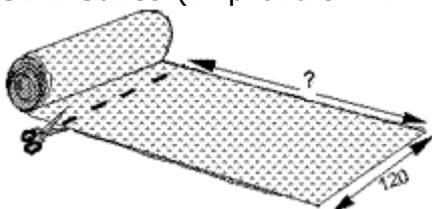
lunghezza la larghezza aumenta toccando egualmente lo stesso numero di chiodi. (il perimetro è conservato)

Constatare che il numero dei quadrati interni varia secondo i rettangoli e annotare i risultati, superando le difficoltà ad esprimere le lunghezze dei lati

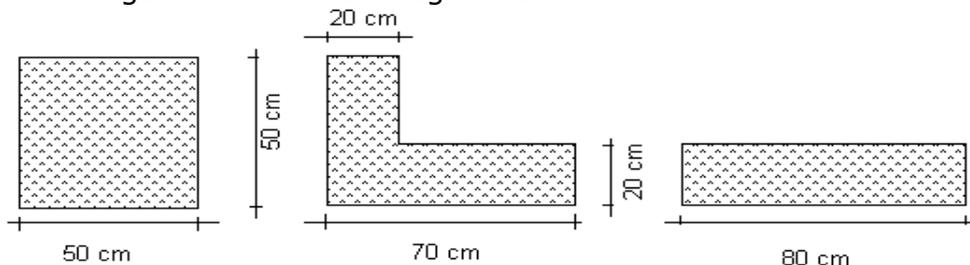
lunghezza*:	10	9	8	7	6	5	...
larghezza*:	1	2	3	4	5	6	...
chiodi toccati (perimetro*)	22	22	22	22	22	22	...
quadrati circondati (area)	10	18	24	28	30	30	...

Spiegare che il numero dei quadrati varia, secondo i calcoli o i tentativi, che è possibile circondarne 24, poi 28, poi 30 e disegnare il rettangolo da 5 per 6 come soluzione. Visto che le dimensioni sono espresse in numeri interi, il numero di tentativi è limitato e permette di essere sicuri che la soluzione trovata sia quella ottimale.

9. Il sarto (I° prova 9° RMT, Categorie 5-8)



Un sarto deve comprare una stoffa che costa 10 euro al metro. Il pezzo di stoffa, da tagliare da un rotolo, è alto 120 cm ed è uguale al dritto e al rovescio. Al sarto ne occorre un quantitativo sufficiente per ritagliare 3 quadrati, 3 figure a forma di "elle" e 3 rettangoli con le misure seguenti:



Il sarto vuole spendere il meno possibile

Quanto deve essere lungo il pezzo di stoffa rettangolare che deve comprare?

Spiegate il vostro ragionamento e mostrate con un disegno come deve ritagliare le figure.

Analisi a priori

Ambito concettuale

Geometria: pavimentazioni, aree

Analisi del compito

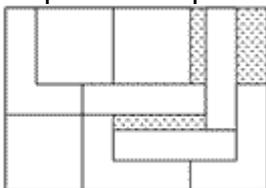
Capire che la pezza di stoffa si può considerare un rettangolo con una dimensione nota e l'altra variabile e che le figure devono essere accostate e non sovrapposte.

Provare con il disegno a disporre le figure nel rettangolo.

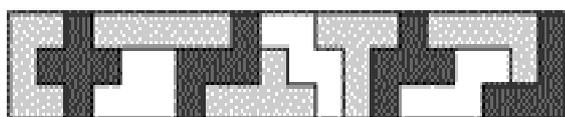
Capire che esistono varie disposizioni corrispondenti a spese diverse.

Cercare la disposizione migliore (170 cm) per tentativi o con un ragionamento (es. Perché possano essere ritagliate tutte le figure occorrono almeno 152,2 cm di stoffa,

occorre inoltre affiancare nella lunghezza della stoffa almeno tre figure e la prima disposizione possibile è (50+50+70). Si veda ad esempio la figura proposta.



10. Con i pentamini (I° prova 13° RMT, categorie 5-7) (Finale 15° RMT, categorie 4-5)



Enrico gioca con i suoi 12 pentamini e vuole costruire un rettangolo «3 x 5». Prende un pentamino, ma si accorge che così non riuscirà a completare il rettangolo.



Quali sono i pentamini che Enrico non riuscirà mai ad usare? Giustificate le vostre risposte.

Analisi a priori

Ambito concettuale

Logica: organizzazione sistematica

Geometria: osservazione critica di figure geometriche

Analisi del compito

Osservare che certi pezzi possono occupare una, due o tre righe della griglia.

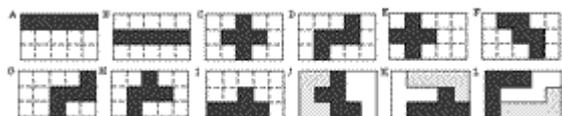
Constatare che la «barra» della figura A, lascia libere due righe che possono essere completate solo con due pezzi uguali.

Constatare che la posizione centrale di alcuni pentamini implicherebbe l'utilizzo dello stesso pentamino due volte per completare la griglia (vedere figure B, C e D).

Osservare infine che certi pentamini suddividono la griglia in parti non ricopribili con pentamini rendendo così impossibile la costruzione del rettangolo. (vedere figure E, F, G, H).

In base a queste osservazioni, verificare pezzo per pezzo se è possibile completare la griglia «3x5» con due pentamini differenti. Per esempio modificando la disposizione del pentamino da (H) a (J), si trova una soluzione, lo stesso se si passa da (I) a (K).

Constatare che solamente, la «barra» (A, B), la «croce» (C, E), la «Z» (D, G) e la «W» (F) non possono essere utilizzate. Si trovano dei rettangoli di tre pentamini differenti con gli altri otto (per esempio J, K, L).



Spunti per altre attività con gli studenti

1. Giochiamo con le definizioni

I ragazzi, divisi in gruppi, utilizzano un file di Cabri in cui è rappresentato un rombo (in alternativa potrebbero lavorare anche con striscioline di cartoncino e fermacampioni o cannuce per bibite).

Elencano quindi le proprietà dei lati, degli angoli, delle diagonali che non variano al variare del rombo per trascinamento dei suoi vertici.

Il rombo è un quadrilatero che ha:

- i lati uguali
- le diagonali perpendicolari
- le diagonali che si dimezzano
- gli angoli opposti uguali
- i lati opposti paralleli

.....

Successivamente i ragazzi divisi in gruppi scelgono una proprietà del rombo e cercano di costruire il quadrilatero a partire da questa proprietà. Si accorgeranno che alcune proprietà pur essendo proprietà del rombo non sono sufficienti per ottenerlo (sono condizioni necessarie, ma non sufficienti).

- Scarica il file [rombo1.ggb](#)
- Scarica il file [rombo2.ggb](#)
- Scarica il file [rombo3.ggb](#)
- Scarica il file [rombo4.ggb](#)
- Scarica il file [rombo5.ggb](#)

Se però, si considerano opportunamente coppie di proprietà, queste riescono a definire il rombo. Da qui si arriva a distinguere proprietà caratterizzanti e proprietà derivate.

Si può continuare in questo modo, con un lavoro di smussamento e di selezione successivo, a individuare le proprietà necessarie e sufficienti che definiscono un determinato quadrilatero.

Ad esempio, la presenza di 4 angoli retti in un parallelogramma si può ritenere un numero minimo di informazioni per ottenere un rettangolo? La costruzione con Cabri ci permette di verificare che costruendo un parallelogramma e imponendo la condizione che un angolo sia retto automaticamente anche gli altri tre saranno retti.

Scarica il file [rettangolo.ggb](#)

2. Identikit di un quadrilatero

Si può anche condurre un'attività in cui si chiede quali siano le informazioni minime per poter disegnare un quadrilatero. Si comincia dalla figura più semplice, il quadrato, per poi soffermarsi su altri quadrilateri: il rettangolo, il rombo, il parallelogramma, il trapezio, il deltoide, un qualsiasi quadrilatero non trapezio...

Il gioco a squadre che viene descritto nell'attività può anche svolgersi al computer con Cabri.

Una squadra disegna una di queste figure con Cabri e fornisce all'altra squadra quelle che ritiene le informazioni minime per costruire la stessa figura. Ad esempio, per il rombo è possibile fornire il lato ed uno degli angoli per individuarlo univocamente?

Scarica identikit identikit.ggb

3. Lavori su aree

Costruzione del Tangram



Costruire, come in figura un quadrato di 12 cm di lato in cartoncino e suddividerlo in 7 parti numerate; tagliare poi i 7 pezzi. Adoperando sempre tutti i pezzi assieme provare a costruire figure geometriche piane conosciute. Per ognuna di quelle trovate disegnarla e poi descriverne le caratteristiche principali. Calcolare il perimetro e l'area. (Si possono ottenere un rettangolo, un triangolo isoscele, un parallelogrammo, un trapezio rettangolo e un trapezio isoscele).

Dopo aver disegnato 6 triangoli rettangoli uguali (di lati 6 cm, 8 cm, 10 cm) ritagliali. Combina 2 o 3 o 4 o 5 o 6 triangoli fra di loro per formare nuove figure geometriche. Per ogni figura trovata, disegnalala, descrivi le sue caratteristiche e calcola perimetro e area. I risultati possono essere raccolti in un cartellone o in una tabella:

Tabella

Numero triangoli	Numero combinazioni	Figure trovate
2	6	Rettangolo, triangolo isoscele, romboide, parallelogrammo
3	5	Trapezio rettangolo, trapezio scaleno, quadrilatero irregolare, pentagono irregolare
4	12	Rettangolo, parallelogrammo, triangolo scaleno, trapezio scaleno, rombo, quadrilatero e pentagono ed esagono irregolari
5	8	Trapezio rettangolo, quadrilatero e pentagono ed ettagono irregolari
6	13	Rettangolo, parallelogrammo, trapezio isoscele, trapezio scaleno, quadrilatero e pentagono ed esagono ed ettagono irregolari

4. Costruzione dei poligoni

L'insegnante avvia i propri allievi alla generalizzazione dei risultati già ottenuti con i triangoli e i quadrilateri ai poligoni convessi con un numero qualunque di lati.

5. Angoli interni dei poligoni

L'insegnante avvia i propri allievi alla generalizzazione della proprietà già trovata riguardo la somma degli angoli interni di un triangolo e di un quadrilatero. I risultati potrebbero essere raccolti in una tabella come la seguente per arrivare a scoprire la relazione generale:

Numero dei lati del poligono	Somma degli angoli interni del poligono	Somma degli angoli espressa in angoli piatti
3	180°	180° x 1
4	360°	180° x 2
5	540°	180° x 3
6	720°	180° x 4
7	900°	180° x 5
8	1080°	180° x 6
9	1260°	180° x 7
10	1440°	180° x 8
....
n	180° x (n-2)

6. Angoli interni dei poligoni

L'insegnante avvia i propri allievi alla "scoperta" della proprietà dei poligoni relativa alla somma degli angoli esterni. Dopo aver fatto disegnare su un foglio, a piccoli gruppi di alunni, poligoni con numero diverso di lati, li invita a seguirne il contorno con un fiammifero. In corrispondenza ad ogni vertice gli allievi fanno ruotare il fiammifero di un angolo (orientato) uguale all'angolo esterno di quel vertice; alla fine si renderanno conto del fatto che il fiammifero ha fatto un giro completo, indipendentemente dal numero dei lati del poligono.

È possibile proporre anche una simulazione con Cabri utilizzando, come fiammifero, un vettore.

Scarica il file [Fiammifero.ggb](#)

7. Diagonali di un poligono

L'insegnante chiede agli alunni di disegnare poligoni con un diverso numero di lati (triangolo, quadrilatero, pentagono, esagono, ...). Chiede poi quante sono le diagonali dei poligoni considerati. Gli alunni dovrebbero attivarsi sia attraverso il disegno e il conteggio, sia tramite la discussione collettiva. L'insegnante suggerisce agli allievi di raccogliere i risultati ottenuti in una tabella.

Per il risultato generale che fornisce il numero delle diagonali in funzione del numero dei lati il docente spingerà gli allievi ad argomentare attraverso domande del tipo: "Quante sono le diagonali che *escono* da ciascun vertice?" "Quanti sono i vertici?" "Conteggiamo in questo modo le diagonali, otteniamo i dati della nostra tabella? Perché?"



Unione Europea
P.O.N. - "Competenze per lo Sviluppo" (FSE)
D.G. Occupazione, Affari Sociali e pari Opportunità



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali e europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale



Bibliografia

AAVV, RMT, *I problemi come supporto per l'apprendimento: il ruolo del RMT*, L. Grugnetti e C. Bisso, pag.25, Bologna, Tecnoprint 2007

E. Castelnuovo, *La Matematica - Figure piane A*, La Nuova Italia

C. Bernardi, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, "Come e che cosa dimostrare nell'insegnamento della matematica" vol.20°-B N.5, settembre-ottobre 1997

B. Micale - C. Milone, *"Sul problema didattico delle definizioni: un'attività sperimentale nella scuola media"* - *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* - vol. 29A N.5 - settembre 2006

Sitografia

Archivio RMT, Rally Matematico Transalpino; www.math-armt.org

Matematica 2001:

<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2001.pdf>

Proposta di attività

(da condividere e discutere in rete)

Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti: individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto. Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze. Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe): l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà.

Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.