

L'uomo di Vitruvio¹

a cura di Gaetana Bartolomej, Giuliana Della Torre, Maria Pia Perelli

Indice

Introduzione.....	2
Indicazioni curriculari.....	2
Prove INVALSI.....	4
Descrizione attività.....	10
<i>Problema</i>	10
<i>Fase 1- Riflessioni sul problema</i>	10
<i>Fase 2- Le affermazioni di Leonardo</i>	11
<i>Fase 3- Il protocollo delle misurazioni</i>	12
<i>Fase 4 – Misure e loro registrazione</i>	15
<i>Fase 7 – Confronto fra la distribuzione delle altezze dei maschi e quella delle femmine</i>	23
<i>Fase 8 - Confronto numerico fra altezza e apertura delle braccia</i>	25
Indicazioni metodologiche.....	27
Spunti per un approfondimento disciplinare.....	28
Elementi per prove di verifica.....	32
Spunti per altre attività con gli studenti.....	37
Documentazione e materiali.....	37
Bibliografia.....	38
Sitografia.....	39
Proposta di attività per il corsista.....	39

¹ Attività aggiornata nel 2015 grazie ai fondi PON-FSE relativi al progetto PON MATEMATICA (B-10-FSE-2010-3)

Introduzione

L'attività ha in sé tutte le caratteristiche di una ricerca scientifica: parte dall'analisi di un testo che presenta alcune ipotesi e, attraverso la rilevazione di dati opportuni, prova le congetture proposte, usando rapporti tra grandezze omogenee che vengono rappresentate e studiate con chiavi di lettura geometriche, aritmetiche e statistiche.

L'unità risulta particolarmente utile per rafforzare concetti di base di statistica descrittiva come la raccolta dei dati, la tipologia dei caratteri e le loro modalità, la costruzione di diagrammi ramo-foglia, di tabelle, di istogrammi di frequenze e permette di affrontare, consolidandoli, anche altri temi quali il rapporto, l'arrotondamento, la misura, il piano cartesiano e le funzioni. L'unità rende evidente l'intero processo della ricerca statistica che va dalla presentazione di un problema, per il quale sono necessari dati quantitativi, alla sua argomentata soluzione ed è particolarmente indicata per un'attività finale di una classe terza.

Partendo dall'analisi di un'opera di Leonardo che fa riferimento ad un grande architetto romano quale è Vitruvio, l'attività si rivela funzionale alla realizzazione di un percorso pluridisciplinare con italiano, storia, scienze, scienze-motorie e arte-immagine, richiede la collaborazione di docenti e alunni, può essere svolta parallelamente in più classi e offre alcuni spunti per fare un cenno alla storia della scienza. Inoltre, si ritiene che possa di stimolare positivamente la motivazione degli studenti che, partecipando attivamente alle diverse fasi proposte, divengono protagonisti del proprio apprendimento.

Indicazioni curriculari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni Curricolari attualmente in vigore (D.M. 16 novembre 2012, n. 254) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni Curricolari e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola secondaria di primo grado:

L'alunno:

- Analizza e interpreta rappresentazioni di dati per ricavarne misure di variabilità e prendere decisioni.
- Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza.

- Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
- Ha rafforzato un atteggiamento positivo rispetto alla matematica attraverso esperienze significative e ha capito come gli strumenti matematici appresi siano utili in molte situazioni per operare nella realtà.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado

Dati e previsioni

- Rappresentare insiemi di dati, anche facendo uso di un foglio elettronico. In situazioni significative, confrontare dati al fine di prendere decisioni, utilizzando le distribuzioni delle frequenze e delle frequenze relative. Scegliere ed utilizzare valori medi (moda, mediana, media aritmetica) adeguati alla tipologia ed alle caratteristiche dei dati a disposizione. Saper valutare la variabilità di un insieme di dati determinandone, ad esempio, il campo di variazione.

Prove INVALSI

a.s. 2011/2012 - Domanda E24

Scuola secondaria di I grado - Classe III

E24. In una stazione meteorologica sulle Alpi sono state registrate le temperature alle ore 8.00 per una settimana e riportate nella tabella qui sotto.

Giorno	Temperatura alle 8.00
Lunedì	-7°C
Martedì	-3°C
Mercoledì	+1°C
Giovedì	-5°C
Venerdì	0°C
Sabato	+3°C
Domenica	-3°C

Calcola la media aritmetica delle temperature riportate in tabella.

Risposta: °C

Soluzione INVALSI:

-2 (unità di misura già fornita)

Il quesito richiede il calcolo di una media aritmetica con numeri relativi. La difficoltà è rappresentata dalla temperatura 0° C che diversi studenti potrebbero non aver conteggiato come valore da considerare.

In altre parole un errore probabile potrebbe essere stato quello di dividere la somma delle temperature per 6 e non per 7.

Commento

Lo studente deve calcolare la media aritmetica delle temperature registrate alle ore 8:00 per una settimana in una stazione meteorologica sulle Alpi e le temperature, espresse in gradi centigradi, sono numeri relativi.

Applicando la procedura per il calcolo della media aritmetica, deve sommare tutte le temperature registrate durante la settimana $[-7 + (-3) + 1 + (-5) + 0 + 3 + (-3)]^{\circ}\text{C} = -14^{\circ}\text{C}$ e dividere la somma ottenuta per sette, cioè il numero di giorni in cui sono state rilevate: $(-14 \div 7)^{\circ}\text{C} = -2^{\circ}\text{C}$

La risposta corretta, pertanto, è -2°C .

Qualche studente, però, potrebbe erroneamente non conteggiare temperatura 0°C e dividere la somma delle temperature ottenute per 6 e non per 7.

a.s. 2012/2013 - Domanda D26

Scuola secondaria di I grado - Classe III

D26. Il Grafico A e il Grafico B rappresentano le assenze del primo quadrimestre di una classe di 20 alunni.

Grafico A: giorni di assenza degli alunni

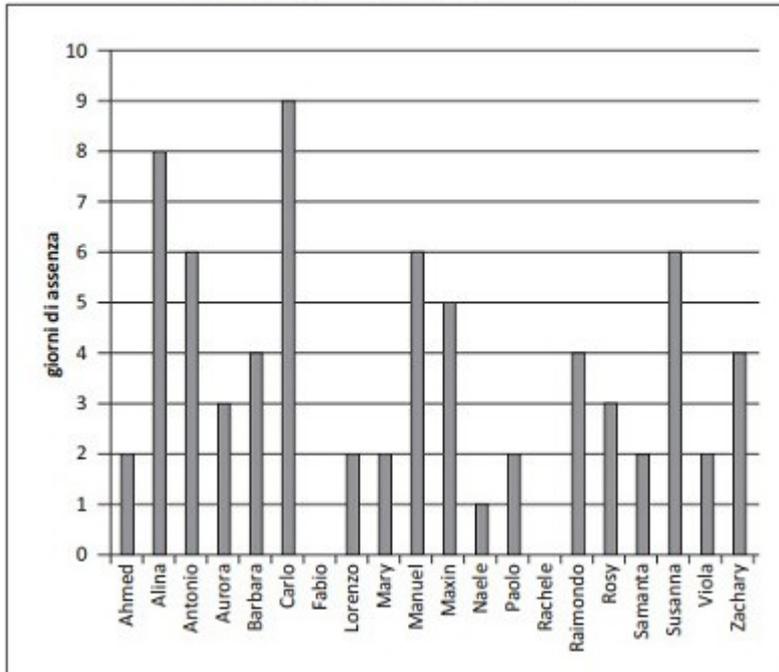
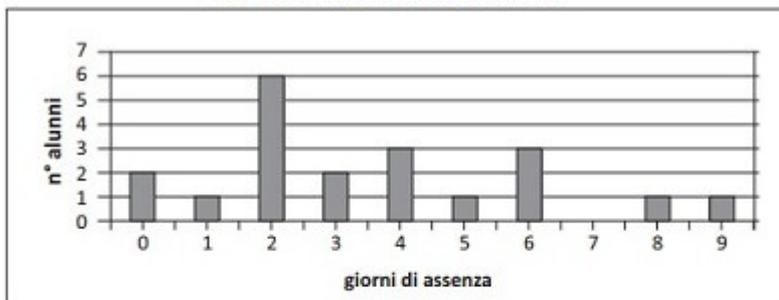


Grafico B: distribuzione delle assenze



a. Qual è la moda delle assenze?

Risposta: giorni

b. Se Lorenzo avesse fatto il doppio delle assenze, quali cambiamenti ci sarebbero nel Grafico B?

Per rispondere completa la frase che segue.

La colonna corrispondente a 4 assenze aumenta da a e la colonna corrispondente a assenze da a

Soluzione INVALSI:

D26_a: 2

D26_b: La colonna corrispondente a 4 assenze aumenta da 3 a 4 e la colonna corrispondente a 2 assenze diminuisce da 6 a 5.

Accettabili anche sinonimi di "diminuisce" come ad esempio "cala".

Per rispondere all'item a lo studente deve conoscere la definizione di moda e sulla base di questo scegliere fra i due grafici quello che fornisce questa informazione. Un errore comune potrebbe essere quello di considerare la colonna più alta del grafico 1 e rispondere 9.

Nell'item b lo studente deve saper mettere in relazione i due grafici e comprendere quali modifiche vanno apportate al secondo grafico in seguito alla variazione del primo.

Commento

Per rispondere all'**item a.**, lo studente deve ricordare il concetto di moda e, dopo aver osservato attentamente i due grafici, scegliere il secondo per ricavare la moda delle assenze. Nel grafico B, relativo alla distribuzione delle assenze del primo quadrimestre di una classe di 20 alunni, deve individuare che la moda delle assenze è uguale a 2, in quanto 2 è la modalità in corrispondenza della quale si è registrata la massima (6) frequenza. Operativamente, dopo aver individuato nel grafico B la colonna più alta, deve leggere la corrispondente modalità. Qualche studente, erroneamente, potrebbe considerare la colonna più alta del grafico A, relativo ai giorni di assenza degli alunni, e rispondere 9.

Per rispondere all'**item b.**, lo studente deve saper mettere in relazione i due grafici e comprendere quali modifiche apportare al secondo grafico in seguito alla variazione del primo. In particolare, lo studente deve riconoscere che, se Lorenzo avesse fatto il doppio ($2 \times 2 = 4$) delle assenze, nel grafico A, la colonna relativa ai giorni di assenza di Lorenzo sarebbe stata 4 e non 2, pertanto, nel grafico B si sarebbero dovute modificare le altezze delle colonne corrispondenti a 2 e a 4 giorni di assenze. In base a questo ragionamento, la risposta corretta è "*La colonna corrispondente a 4 assenze aumenta da 3 a 4 e la colonna corrispondente a 2 assenze diminuisce da 6 a 5*".

a.s. 2008/2009 - Domanda D1

Scuola secondaria di I grado - Classe III

D1. Qual è l'unità di misura più appropriata per esprimere il peso di un uovo di gallina?

- A. milligrammi
- B. decigrammi
- C. grammi
- D. ettogrammi

Soluzione INVALSI: C

Lo studente deve stimare il peso individuando l'unità di misura più appropriata.

Commento

Per rispondere al quesito, lo studente deve stimare il peso di un uovo di gallina e individuare l'unità di misura più appropriata.

Il peso di un uovo di gallina di medie dimensioni è compreso tra i 50 e i 70 grammi, pertanto, se la stima del peso dell'uovo fatta dallo studente non si discosta in modo significativo dal peso reale, lo studente riconoscerà che la risposta corretta è la C.

a.s. 2008/2009 - Domanda D9

Scuola secondaria di I grado - Classe III

D9. Un insieme di dati è costituito dai seguenti quattro valori:

20 ; 30 ; 50 ; 60

A questi dati ne viene aggiunto un altro e si calcola la media aritmetica dei cinque valori, che risulta essere 50. Qual è il valore del dato aggiunto?

- A. 10
- B. 40
- C. 50
- D. 90

Soluzione INVALSI:D

Il quesito chiede di individuare un dato mancante conoscendo la media aritmetica. È stato risolto correttamente solo dal 65,8% degli studenti. Il 18,3% ha scelto l'opzione B come se il dato mancante fosse quello della sequenza numerica.

Commento

Per rispondere al quesito, lo studente, dopo aver ricordato che in un insieme di dati la media aritmetica è quel valore che sostituito ai singoli ne lascia immutata la somma, deve individuare il valore del dato mancante in modo che la media aritmetica, calcolata sui cinque valori, sia 50.

In base alla definizione di media aritmetica, deve riconoscere che la somma dei cinque valori è uguale al quintuplo della media aritmetica, cioè a $50 \times 5 = 250$.

Infatti: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = M + M + M + M + M$

da cui: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5M$

Inoltre, lo studente, conoscendo quattro dei cinque valori su cui è calcolata la media, con una semplice operazione, può calcolare la loro somma: $20 + 30 + 50 + 60 = 160$. Allora, se la somma dei cinque valori è 250 e la somma dei quattro valori noti è 160, può individuare il valore del dato mancante con la differenza $250 - 160 = 90$. Quindi,

considerato che la media aritmetica su cinque valori è $M = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$

il dato mancante può essere ricavato utilizzando la formula inversa $x_5 = 5M - x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

a.s. 2011/2012 - Domanda E10

Scuola secondaria di I grado - Classe III

E10. Tempo fa si è disputata la partita di pallacanestro B. Pozzo di Gotto - Brescia, finita con il punteggio di 92 - 94.

La seguente tabella riassume le statistiche di tale partita per la squadra di Brescia.

Numero del giocatore	Giocatore	Minuti giocati	Tiri a Canestro			PUNTI
			Tiri da 2	Tiri da 3	Tiri liberi	
7	Bushati Franko	25	0	0	2	2
18	Busma Deividas	23	4	0	1	9
10	Farioli Massimo	20	2	0	0	4
13	Gergati Lorenzo	36	2	1	7	14
14	Ghersetti Mario Jose	37	3	1	1	10
9	Goldwire Leemire	30	9	1	8	29
11	Scanzi Andrea	9	0	1	2	5
5	Stojkov Stevan	15	0	1	0	3
15	Thompson Ryan	30	6	0	6	18
Totale			26	5	27	94

a. Quanti sono i giocatori che hanno realizzato un numero di punti superiore alla media?

Risposta:

b. Quale tra i seguenti giocatori ha realizzato un numero di punti pari alla mediana?

- A. Il numero 7, Bushati Franko
- B. Il numero 13, Gergati Lorenzo
- C. Il numero 14, Ghersetti Mario Jose
- D. Il numero 18, Busma Deividas

Soluzione INVALSI:

E10_a: "3" o "tre"; oppure "14, 29 e 18"; oppure "Gergati, Goldwire, Thompson"; oppure "13, 9, 15;...

E10_b: D

Nell'item a lo studente doveva calcolare la media aritmetica (il totale punti era dato nella tabella) e hanno risposto correttamente più della metà degli studenti del campione. **Nell'item b** la domanda riguardava il significato di mediana, il 42% degli studenti ha scelto il distrattore C che rappresentava il numero del giocatore che si trovava nel mezzo dimostrando di non avere ben compreso come si trova la mediana: ordinare i punteggi e individuare quello di mezzo (il numero dei giocatori era dispari).

Commento

Per rispondere all'**item a.**, lo studente deve leggere nella tabella il totale dei punti (94) realizzati dai giocatori della squadra di pallacanestro di Brescia durante la partita B. Pozzo di Gotto-Brescia, individuare il numero (9) dei giocatori che hanno realizzato i canestri e, applicando la procedura per il calcolo della media aritmetica, calcolare il rapporto $94 \div 9 = 10,4\bar{4}$. Poi, deve procedere al confronto tra i punti realizzati dai singoli giocatori, calcolati nell'ultima colonna della tabella, e la media aritmetica per individuare quanti giocatori hanno realizzato un numero di punti superiore alla media, ovvero almeno 11 punti. Poiché solo i giocatori Gergati Lorenzo, Goldwire Leemire e Tompson Ryan, hanno realizzato rispettivamente 14, 29 e 18 punti, la risposta corretta è tre.

Per rispondere all'**item a.**, lo studente deve ricordare che, in una serie ordinata di N valori, la mediana è quella modalità che occupa la posizione centrale. Lo studente deve ordinare in modo non decrescente (o non crescente) il numero di punti realizzati dai giocatori della squadra di pallacanestro di Brescia:

2, 3, 4, 5, 9, 10, 14, 18, 29.

Poi, considerato che il numero dei giocatori è 9 e che quando il numero N dei valori è

dispari vi è una sola la posizione centrale, la $\frac{N+1}{2}$ -esima, trovare che la posizione

della mediana è la quinta $(\frac{9+1}{2}=5)$

Quindi, lo studente, deve individuare la modalità che occupa la quinta posizione:

2, 3, 4, 5, **9**, 10, 14, 18, 29.

La mediana del numero di punti realizzati dai giocatori della squadra di pallacanestro di Brescia durante la partita B. Pozzo di Gotto-Brescia è 9 punti e poiché solo il giocatore Busma Deividias ha realizzato 9 punti, la risposta corretta è la D.

Descrizione attività

Problema

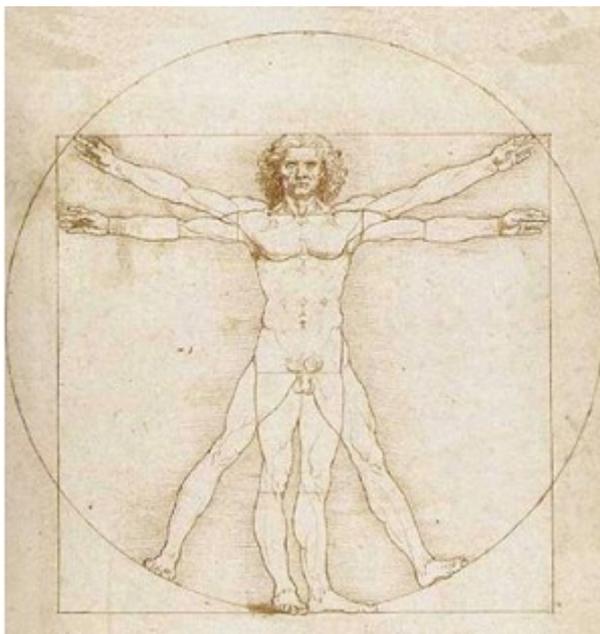
L'insegnante, in collaborazione con il docente di Scienze Motorie, prendendo spunto dalle lezioni riguardanti gli aspetti morfologici del corpo umano, propone agli studenti una situazione problematica centrata su un famoso disegno di Leonardo da Vinci: L'Uomo vitruviano (secondo Vitruvio, un uomo ben proporzionato potrebbe essere inscritto in uno schema rotondo e in un quadrato).

Chiede agli allievi di verificare le congetture di Leonardo da Vinci secondo cui mediante una ricerca scientifica e li invita a rilevare misure, ad organizzarle in tabelle e grafici, ad interpretarle e a trarre conclusioni in base alle indicazioni fornite dal grande scienziato nello scritto che accompagna il disegno stesso.

Fase 1- Riflessioni sul problema

L'insegnante invita gli alunni a riflettere sulla situazione problematica, conduce una conversazione guidata¹ e sistematizza gli interventi degli alunni.

Successivamente, presenta l'immagine dell'Uomo vitruviano tramite LIM (Lavagna Interattiva Multimediale), proiettore, fotocopia, ... e pone le seguenti domande:



- Avete mai visto questa immagine?
- Dove?
- In caso affermativo, sapete chi è l'autore?
- A cosa vi fa pensare?
- Come la descrivereste a qualcuno che non può vedere l'immagine?

L'insegnante, quindi, sistematizza gli interventi degli alunni e li invita a portare, per la lezione successiva, matite, gomme, righe, colori o altro materiale il cui utilizzo può favorire l'attivazione di strategie risolutive al problema posto.

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

Gli alunni, opportunamente guidati, dovrebbero riconoscere di aver già visto l'immagine rappresentata sulla moneta da un euro. Strategie suggerite:

- *Coinvolgere gli alunni nella discussione attraverso sollecitazioni mirate;*
- *Proporre di osservare la moneta da un euro.*

Fase 2- Le affermazioni di Leonardo

L'insegnante divide poi la classe in piccoli gruppi eterogenei (in base alle capacità di comprensione di un testo), dà a ciascun alunno un foglio contenente l'immagine dell'Uomo di Vitruvio e le seguenti frasi scritte da Leonardo (che, nello stesso tempo, si potrebbero proiettare anche con la LIM):

"Tanto apre l'omo ne' le braccia, quanto è lla sua alteza"

"Dal di sotto del mento alla somità del capo è l'octavo dell'alteza de l'omo"

"Dal gomito alla punta della mano fia la quarta parte dell'omo"

"Dal disotto del pie al disotto del ginocchio fia la quarta parte dell'omo"

e chiede a ciascun gruppo di tradurle in italiano corrente, eventualmente con l'aiuto dell'insegnante di lettere. Invita i singoli gruppi ad osservare, leggere, analizzare ed interpretare l'immagine dell'Uomo di Vitruvio e le frasi; chiede agli studenti di scrivere le osservazioni e i commenti e di individuare il portavoce del gruppo.

In ogni caso, e soprattutto se l'attività è svolta in collaborazione con i colleghi di altre discipline, si possono integrare le informazioni utilizzando materiali e modalità che si ritengono più opportuni per realizzare il percorso pluridisciplinare programmato.

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

Il testo, forse più del disegno, potrebbe suscitare la curiosità dei ragazzi che commentano con vari interventi il tipo di linguaggio utilizzato da Leonardo. L'analisi nei gruppi stimola la discussione da parte di tutti gli alunni che danno un contributo con proprie argomentazioni.

Strategie suggerite per facilitare l'attività dei singoli gruppi:

1. Chiedere ad un membro del gruppo di leggere le frasi ad alta voce.
2. Invitare gli allievi ad evidenziare le diverse parti citate nelle frasi facendo uso dei pastelli colorati o di altro materiale.
3. Guidare i componenti del gruppo nella traduzione.
4. Mettere a disposizione dei singoli gruppi le frasi già tradotte; in questo caso vale comunque la pena di chiedere ad ogni partecipante del gruppo di riformulare le frasi, in modo da garantire la comprensione da parte di tutti.

In intergruppo dovrebbe emergere che il messaggio dell'autore mira a far cogliere le relazioni tra le varie parti del corpo.

Strategia suggerita:

- Se il messaggio di Leonardo non fosse chiaro, proporre un'osservazione guidata dell'immagine e, avvalendosi di domande stimolo, condurre gli alunni alla comprensione del messaggio.

Gli allievi si dimostrano interessati all'aspetto storico.

Strategie suggerite:

- Coinvolgere le altre discipline per avere un effetto positivo su quegli alunni che hanno "deciso" di "non essere capaci" in matematica, ma che sono invece aperti e interessati alle discipline percepite come più creative quali, ad esempio, arte e immagine ed italiano.

Fase 3- Il protocollo delle misurazioni

L'insegnante domanda agli alunni se, secondo loro, le affermazioni di Leonardo sono vere. Conduce una conversazione guidata in modo tale che, al di là delle singole risposte degli allievi, emerga la necessità di verificare sperimentalmente le ipotesi-affermazioni di Leonardo con una rilevazione che richiede un numero adeguato di unità statistiche affinché le si possa verificare. In particolare, l'insegnante guida gli studenti ad effettuare la rilevazione sugli alunni della classe e su quelli di almeno altre due classi parallele, così da avere un insieme di almeno 65-70 studenti (ogni studente è una **unità statistica**). Sarebbe auspicabile che l'attività fosse svolta contemporaneamente nelle tre (o più) classi coinvolte nella rilevazione, ma, in ogni caso, è sufficiente la collaborazione delle altre classi nella fase di rilevazione.

Nota per l'insegnante

*Poiché si vuol verificare una congettura, è bene che il numero di unità statistiche sia elevato. In effetti, la verifica di una congettura fa sì che l'insieme dei dati rilevati sia inteso come **campione** di una **popolazione** più ampia. Perché possa giocare la casualità campionaria, che consente di effettuare l'inferenza induttiva, è necessario che il campione sia grande. Per studi di questo genere un campione di 65-70 persone è adeguato; inoltre, l'ampio numero evita che gli studenti siano riconoscibili, fatto non sempre gradito quando si trattano caratteri antropometrici. L'insieme delle unità rilevate è una popolazione finché si rimane in ambito descrittivo (Fase 7 inclusa), ma si configura come campione nel momento in cui si passa alla verifica delle congetture di Leonardo. Si fa presente che spesso l'insegnante di Scienze Motorie esegue all'inizio dell'anno scolastico alcune misurazioni relative al corpo umano, per cui è possibile condividere la parte della rilevazione e chiedere al collega di effettuare anche le misure che occorrono nello specifico. In questa fase dello sviluppo alcuni alunni possono vivere come invasivo e ansiogeno un intervento di misurazione corporea. In questo caso possono essere lasciati liberi di partecipare o meno, in quanto la presenza di queste altre misure può rendere superflua una nuova misurazione (vale la pena*

notare come spesso questo semplice accorgimento ha l'effetto di ... convincere tutti a farsi misurare!)

Il docente concorda con gli alunni di verificare solo due delle quattro affermazioni di Leonardo; in particolare si consiglia di guidare gli allievi a scegliere le seguenti:

- La larghezza dell'apertura delle braccia è tanto quanto la sua altezza.
- La lunghezza tra il gomito e la punta della mano è la quarta parte dell'uomo.

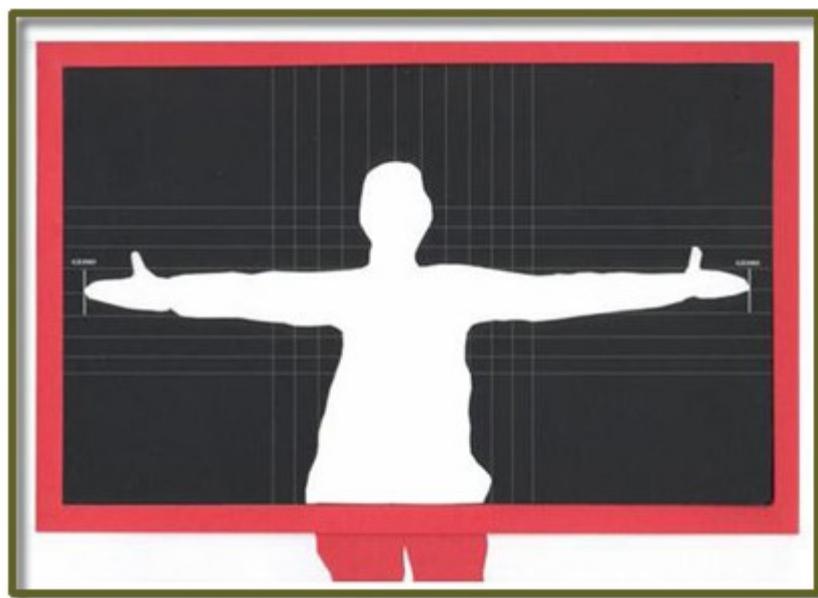
L'insegnante, dopo essersi assicurato che gli alunni condividono ciò che s'intende per larghezza dell'apertura delle braccia e per lunghezza tra il gomito e la punta della mano, conduce una conversazione guidata sugli strumenti di misura da utilizzare nella rilevazione, sull'unità di misura da scegliere, sulla necessità di arrotondare le misure rilevate e sugli errori che si possono commettere.

Vai al sito: Censimento a scuola - Guida per i docenti delle medie, pagg. 11 - 13
<https://www.istat.it/it/censimenti/popolazione-e-abitazioni/censimento-a-scuola>

Il docente fa riflettere gli allievi sul grado di accuratezza con il quale si possono effettuare delle misure. La statura è una grandezza soggetta a misura e misurare è diverso dall'individuare una numerosità (ad esempio la numerosità di una famiglia, alla cui determinazione si perviene attraverso un conteggio). L'insegnante, quindi, fa osservare ai ragazzi che nel metro, usato per rilevare la statura, ogni centimetro è ulteriormente diviso in dieci parti. Se si deve fornire una risposta in centimetri, quali misure espresse in decimi di centimetro verranno definite pari a 140 cm? Inoltre, quali valori devono essere attribuiti, in centimetri, alle misure 139,5 cm e 140,5 cm? Occorre fissare un criterio; per esempio, a 139,5 cm va attribuito il valore 140 cm e, invece, a 140,5 cm il valore 141 cm; inoltre, tutte le stature che, in decimi di centimetro, sono comprese fra 139,5 cm incluso e 140,5 cm escluso sono convenzionalmente poste uguali a 140 cm.

Si concorda che le misurazioni siano espresse in cm, con le regole di approssimazione stabilite e che siano raccolte tenendo conto del genere (maschio/femmina). Poiché i ragazzi sono in età evolutiva e le misure antropometriche sono condizionate dall'età, si decide che i ragazzi oggetto di misurazione siano tutti dello stesso anno di nascita. Per mantenere viva l'attenzione e la partecipazione di coloro che hanno un'età differente, si possono affidare loro compiti specifici nella rilevazione. L'insegnante stabilisce una data per la rilevazione delle misure e invita i ragazzi a portare gli strumenti scelti per effettuare le misurazioni nel giorno fissato. Le misurazioni sugli alunni assenti saranno effettuate al loro rientro. Per rilevare l'altezza, si consiglia di utilizzare una bilancia pesa persone con misuratore d'altezza e di invitare gli alunni a salirvi senza scarpe. La misura dell'apertura delle braccia e la lunghezza dalla punta della mano al gomito, ma anche la stessa altezza, possono essere rilevate utilizzando la lavagna d'ardesia (se non è mobile). Per facilitare la postura da assumere per la rilevazione e la stessa misurazione, si consiglia di disegnare una griglia in cui le linee

(orizzontali e verticali) abbiano distanza costante, di far appoggiare, così come evidenziato dal seguente disegno stilizzato,



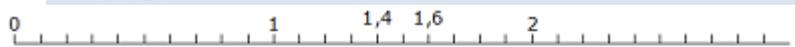
i singoli alunni alla lavagna e procedere effettuando le misurazioni (dopo aver segnato con un gesso sulla lavagna i punti necessari per indicare le distanze da misurare) con il metro da muratore, la rotella metrica, o altri strumenti ritenuti idonei (si consiglia, comunque, di evitare il metro da sarta). In alternativa, si può utilizzare un cartellone, appeso ad altezza uomo ad una parete, su cui siano stati precedentemente attaccati dei fogli di carta millimetrata.

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

Il concetto di approssimazione crea sempre qualche perplessità.

Strategia suggerita:

- Favorire la comprensione del concetto di approssimazione cercando di far osservare agli allievi, attraverso la rappresentazione di una scala graduata, come il valore 1,6 si avvicini più al 2 ed il valore 1,4 al contrario sia più vicino all'1.



Gli allievi ripetenti potrebbero essere ragazzi problematici che, però, adeguatamente motivati potrebbero assumersi la responsabilità di rilevare le misure. Anche i ragazzi con disagio cognitivo, in genere, affrontano la fase delle misurazioni con impegno e interesse.

Strategia suggerita:

- *Affidare ai ragazzi ripetenti o con disagio cognitivo la responsabilità di portare (se non si usa il misuratore d'altezza della scuola) gli strumenti opportuni, di preparare la lavagna o i fogli di carta millimetrata, di rilevare le misurazioni e di comunicarle ai compagni.*

Fase 4 – Misure e loro registrazione

L'insegnante conduce una conversazione guidata sul modo più conveniente di raccogliere e registrare le misure. Dalla discussione dovrebbe emergere che, per quanto riguarda la raccolta, le possibilità che si offrono sono diverse. Si può scegliere di:

- Rilevare tutti i caratteri su una stessa unità statistica (il singolo alunno), ovvero:
 - Il genere;
 - L'altezza;
 - L'apertura delle braccia;
 - La lunghezza gomito-punta mano;
 prima di procedere alla rilevazione degli stessi caratteri su un'altra unità statistica;
- Rilevare un carattere alla volta su tutte le unità statistiche, ovvero prima il genere su tutti gli alunni, poi l'altezza, l'apertura delle braccia ed infine la lunghezza gomito-punta mano.

Si consiglia, comunque, di effettuare le rilevazioni sulla singola unità in modo da misurare consecutivamente alunni che presentano modalità diverse di uno stesso carattere procedendo, ad esempio, secondo l'ordine alfabetico.

Vai al sito: Censimento a scuola - Guida per i docenti delle medie

<https://www.istat.it/it/censimenti/popolazione-e-abitazioni/censimento-a-scuola>

Per quanto riguarda l'organizzazione dei dati, è opportuno che l'insegnante guidi gli alunni alla costruzione di un prospetto opportunamente predisposto in cui inserire, man mano, i dati rilevati. In tal modo si perviene alla costruzione della **matrice dei dati**, una tabella in cui ogni riga si riferisce ad una unità statistica osservata ed alle **modalità** che essa presenta ed ogni colonna contiene la **distribuzione unitaria** (unità statistica per unità statistica) del carattere indicato nella prima riga.

Ad esempio, si propone la seguente matrice dei dati:

Matrice dei dati					
Unità statistica	Nome	Genere	Altezza in cm)	Apertura braccia (in cm)	Lunghezza gomito-punta mano (in cm)
1	Anna	F
2	Bernardo	M
3	Carlo
.....

La costruzione della matrice dei dati non dovrebbe comportare particolare difficoltà per gli alunni che hanno i prerequisiti (indicati nell'introduzione) e, comunque,

costituisce un'ottima attività di consolidamento degli apprendimenti. Inoltre, si configura come occasione per svolgere un'attività in laboratorio con un foglio di calcolo.

Scarica: [Matrice dei dati](#)

Costruita la matrice, l'insegnante chiede agli studenti: Qual è l'altezza dell'unità 2? Qual è l'apertura delle sue braccia? E la sua lunghezza gomito-punta mano? Se gli alunni dovessero tralasciare la marca, li correggerà. È importante che l'insegnante faccia agli studenti anche altre domande per accertarsi che sappiano leggere ed interpretare i dati tabulati.

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

In questa fase, la difficoltà maggiore è la costruzione della matrice. I ragazzi "svogliati" e gli allievi con difficoltà di tipo cognitivo e/o operativo, spesso, faticano ad utilizzare gli strumenti di disegno e, quindi, non riescono ad essere precisi.

Strategie suggerite:

- *Far svolgere il lavoro a coppie: un allievo con buona manualità costruisce la propria matrice ed aiuta il compagno con difficoltà a realizzare la sua;*
- *Far utilizzare subito il PC e realizzare la matrice con il foglio di calcolo (fornendo le indicazioni necessarie per l'uso dello strumento); l'uso del computer, generalmente, è particolarmente coinvolgente e, allo stesso tempo, si rivela molto utile per gli alunni con difficoltà di ordine o di gestione spaziale del foglio*

Fase 5 – Il diagramma ramo-foglia

In base alla matrice dei dati ottenuta, l'insegnante chiede agli alunni di costruire le distribuzioni unitarie delle altezze, quelle dell'apertura delle braccia e quelle della lunghezza gomito-punta mano in modo che le modalità siano ordinate in senso crescente.

Inoltre propone agli alunni di utilizzare il **diagramma ramo-foglia**, per passare da una **distribuzione unitaria** (in cui si conosce singolarmente quanto misura ciascuna unità) ad una **distribuzione in classi** (in cui si raggruppano tutte le unità che appartengono alla stessa classe), pur mantenendo le informazioni iniziali.

Vedi le attività: [Dai dati ai grafici e... ritorno](#)

[Anche in Statistica ci sono gli alberi](#)

L'insegnante conduce una conversazione guidata per ricordare i punti salienti del grafico. In particolare, se gli alunni hanno avuto modo di approfondire e sperimentare la costruzione del **diagramma ramo-foglia** (altrimenti, è l'occasione per presentare questo tipo di rappresentazione grafica), ricorda che i rami identificano gli intervalli numerici, di ampiezza costante, formati a partire dalle cifre più significative del numero che esprime le modalità, che le foglie, in corrispondenza biunivoca con i dati,

punta mano femmine) e la relativa rappresentazione mediante il diagramma ramo-foglia, i cui rami siano cinque.

In intergruppo, si socializzano e si commentano i singoli grafici rispetto alle loro forme, alle eventuali simmetrie esistenti, al numero dei rami, ai rami particolarmente lunghi o corti, evidenziando il significato statistico.

Successivamente, si procede al confronto dei grafici rispetto ai due generi e si verifica se i due grafici presentano delle differenze rispetto al numero dei rami e alla lunghezza dei rami corrispondenti.

Ad esempio, i grafici ramo-foglia relativi alle distribuzioni unitarie dell'altezza degli alunni (maschi) e delle alunne (femmine) delle classi 3A, 3B e 3C, nati nel 1996, dell'Istituto Comprensivo di Valmorea (CO) nell'anno scolastico 2009-2010, sono i seguenti:

Altezze maschi (nati nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C I.C. Valmorea (CO) - A.S. 2009-2010		Altezze femmine (nate nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C I.C. Valmorea (CO) - A.S. 2009-2010	
ramo 5 cm	foglia cm	ramo 5 cm	foglia cm
14	8 8	14	5 7 9
15	0 0 1 3 4	15	
15	5 5 6 6 9 9	15	5 5 5 6 6 7 7 8
16	0 0 0 1 1 1 2 2 2 3 4	16	0 1 1 2 2 2 2 3 3 4 4
16	5 6 6 7 8 8 8 8 9	16	7 7 9
17	1 2 2	17	1 1 1
17	6 7	17	

Cosa si osserva?

- Il differente numero di rami dei due generi;
- La difformità della lunghezza dei rami dei due generi;
- Diversi valori minimi e massimi delle altezze per i due generi;
- ...

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

In questa fase, la difficoltà maggiore è la costruzione del diagramma ramo-foglia. I ragazzi "svogliati" e quelli con disagio di tipo cognitivo e/o operativo, spesso, non accettano di verbalizzare e rappresentare le fasi propedeutiche (come l'ordinamento crescente) perché lo considerano superfluo, in quanto, poi, quello che serve all'analisi è il risultato grafico che fornisce il diagramma. Al contrario, come ben si sa, l'ordinamento è un aspetto molto importante al fine di comprendere molti concetti matematici.

Strategie suggerite:

- *Far svolgere il lavoro a coppie: un allievo invita il compagno a leggere i dati e a dettarli in ordine crescente mentre li riporta sul foglio; lo stesso aiuta il compagno a realizzare operativamente il grafico;*

- Far utilizzare subito il PC e realizzare il diagramma ramo-foglia con il foglio di calcolo (nell'esempio riportato è stato realizzato con tale modalità) con le seguenti procedure: evidenziare nella matrice la colonna dei dati, ordinarli con la funzione specifica e procedere alla costruzione del diagramma ramo-foglia (nell'esempio le colonne hanno larghezza impostata sul 2 per ottenere la quadrettatura).

Altezze alunni (nati nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C
 I.C. Valmorea (CO) - A.S. 2009-2010

ramo 10 cm	foglia cm																																			
14	5	7	8	8	9																															
15	0	0	1	3	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	7	7	8	9	9																
16	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	6	6	7	7	7	8	8	8	8	9	9		
17	1	1	1	1	2	2	6	7																												

Gli allievi in difficoltà, generalmente, colgono le caratteristiche che possono essere rilevate dall'analisi dei grafici.

Strategie suggerite:

- Quando si invitano gli alunni a verbalizzare le loro osservazioni, sollecitare dapprima i ragazzi "deboli" affinché possano sentirsi gratificati dando il loro contributo.

Fase 6 – Dal discreto al continuo

A questo punto, l'insegnante invita gli alunni a costruire, a partire dai grafici ramo-foglia e raggruppando i dati negli intervalli individuati, le **distribuzioni di frequenze** dei caratteri rilevati. Partendo dalla considerazione che i rami rappresentano una cinquina di numeri interi consecutivi, si sostituisce ad ogni ramo l'intervallo corrispondente, ad esempio ai valori: 145, 146, 147, 148, 149 si sostituisce l'intervallo 145 \sqcup 149 e ad esso si associa il numero delle foglie, che è pari a 5. 145 \sqcup 149 è una classe di **modalità del carattere** statura; 5 la sua **frequenza**.

Tutti i risultati così ottenuti si raccolgono in una tabella a due colonne, quella di sinistra contiene le classi di modalità, quella di destra le frequenze.

Vedi l'attività: [Dai dati ai grafici e... ritorno](#)

Ad esempio, la distribuzione di frequenze delle altezze degli alunni, nati nel 1996, delle classi 3A, 3B e 3C dell'I.C. di Valmorea (CO), nell' A.S. 2009-2010 è contenuta nella tabella 1.

Tabella 1	
Distribuzione di frequenze delle altezze degli alunni (nati nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C dell'I.C. Valmorea (CO) - A.S. 2009-2010	
Classi 5 cm	Frequenze assolute
145 \sqcup 149	5
150 \sqcup 154	5

155 \bar{H} 159	14
160 \bar{H} 164	22
165 \bar{H} 169	12
170 \bar{H} 174	6
175 \bar{H} 179	2
Totale	66

L'insegnante fa osservare che a questo punto occorre ricordarsi di quanto si è detto sulla statura, sulla sua misura e sui problemi di errore ed arrotondamento che la misura della statura comporta. Le misure, infatti, sono sempre approssimate ed è una convenzione dettata dalla necessità affermare, ad esempio, che l'altezza di un alunno è 145 cm, quando sarebbe più corretto affermare che la sua altezza è compresa tra 144,5 cm e 145,5 cm. Tenere conto di ciò, vuol dire ammettere che la statura è di fatto un carattere continuo, che appare discreto solo per la limitatezza nel misurare. Quindi, quando si afferma che l'altezza degli alunni misurati varia fra 145 cm e 179 cm, in effetti s'intende che un alunno può avere una altezza uguale ad uno qualsiasi degli infiniti numeri compresi fra 144,5 cm e 179,5 cm. Questo numero infinito di numeri si può rappresentare su una retta mediante il segmento che ha come estremo inferiore 144,5 cm e come estremo superiore 179,5 cm.

Nota per l'insegnante

Il passaggio delicato dalla matematica del discreto alla matematica del continuo è molto importante e l'insegnante può scegliere di sottolinearlo e approfondirlo a seconda del livello della classe. Si segnala, tuttavia, che i ragazzi arrivano all'università senza averlo ben presente.

Per evidenziare la continuità del carattere altezza, l'insegnante può proporre agli alunni di costruire una distribuzione di frequenze le cui modalità, piuttosto che essere un intervallo chiuso, ad esempio 145 \bar{H} 149 cm, siano intervalli chiusi a sinistra, ad esempio $144,5 \leq x < 149,5$ cm e così via. Ciò, tra l'altro, consente di non creare fratture sulla retta sulla quale si rappresentano le stature. Se si desidera tener conto della continuità, la precedente distribuzione di frequenze si può scrivere come nella seguente Tabella 2:

Tabella 2	
Distribuzione di frequenze delle altezze degli alunni (nati nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C dell'I.C. Valmorea (CO) - A.S. 2009-2010	
Classi 5 cm	Frequenze assolute
$144,5 \leq x < 149,5$	5
$149,5 \leq x < 154,5$	5
$154,5 \leq x < 159,5$	14
$159,5 \leq x < 164,5$	22

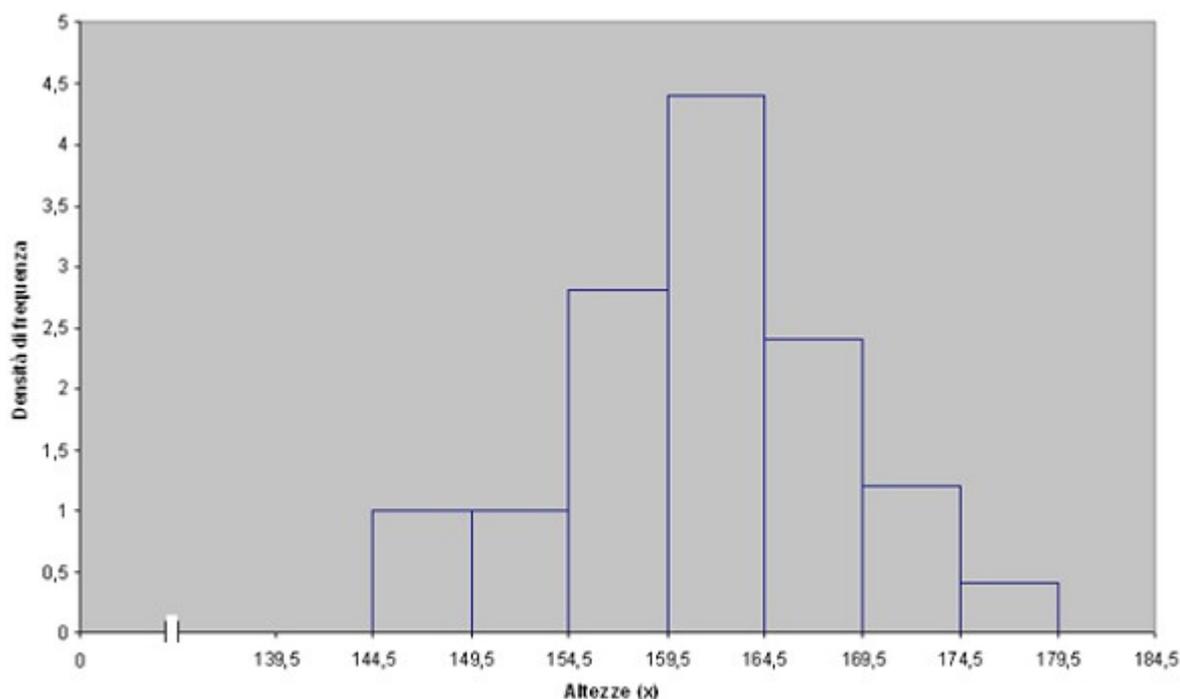
$164,5 \leq x < 169,5$	12
$169,5 \leq x < 174,5$	6
$174,5 \leq x < 179,5$	2
Totale	66

L'insegnante conduce una conversazione guidata sul tipo di grafico da utilizzare per rappresentare graficamente le distribuzioni di frequenze; chiede agli alunni se ricordano la convenzione secondo la quale è possibile rappresentare su un grafico nel piano cartesiano la coppia (intervallo; frequenza) e rammenta loro che per fare ciò è necessario rappresentare la frequenza mediante un rettangolo avente per base l'ampiezza dell'intervallo. Quale altezza deve avere il rettangolo, quando se ne conosce l'area e la base? Ricordato il concetto di **densità di frequenza** come rapporto fra la frequenza e l'ampiezza dell'intervallo, i cui calcoli sono riportati, in Tabella 3, si procede alla costruzione di un istogramma di frequenze.

Tabella 3				
Distribuzione di frequenze di densità delle altezze degli alunni (nati nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C dell'I.C. Valmorea (CO) - A.S. 2009-2010				
Xinf	Xsup	Frequenza	Ampiezza intervallo	Densità di frequenza
144,5	149,5	5	5	1,0
149,5	154,5	5	5	1,0
154,5	159,5	14	5	2,8
159,5	164,5	22	5	4,4
164,5	169,5	12	5	2,4
169,5	174,5	6	5	1,2
174,5	179,5	2	5	0,4

Ad esempio, l'istogramma relativo alla distribuzione di frequenze assolute delle altezze (in cm) degli alunni, nati nel 1996, delle classi 3A, 3B e 3C dell'I.C. di Valmorea (CO) nell'A.S. 2009-2010, è:

Istogramma delle altezze degli alunni (nati nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C dell'I. C. Valmorea (CO) A. S. 2009 - 2010



L'insegnante può proporre agli alunni di aggiungere alla distribuzione delle **frequenze assolute** due colonne per calcolare le **frequenze relative**, date dal rapporto tra le frequenze assolute e il numero totale delle osservazioni, e le **frequenze percentuali**, ottenute moltiplicando per cento le frequenze relative. Inoltre può proporre di rappresentare graficamente la distribuzione delle frequenze percentuali mediante un istogramma che ha per basi le classi di altezza e per altezze le corrispondenti densità rispetto alle percentuali.

Vedi l'attività: [Dai dati ai grafici e... ritorno](#)

Nota per l'insegnante

*Se il livello della classe lo consente, l'insegnante può far costruire agli alunni sia le tabelle che gli istogrammi con il **foglio elettronico**. Si fa presente che Excel denomina istogramma il grafico più correttamente chiamato diagramma a colonne, per cui è necessario spiegare agli allievi la diversità e quindi operare affinché possano superare questo "misconcelto".*

Scarica: [Costruzione istogramma](#)

Vedi l'attività:

[I grafici... questi sconosciuti](#)

[Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà](#)

Fase 7 – Confronto fra la distribuzione delle altezze dei maschi e quella delle femmine

Per confrontare per genere le stature rilevate, l'insegnante suggerisce agli alunni di costruire un nuovo grafico ramo-foglio, giustapponendo i rami e rappresentando a destra le foglie relative ai maschi e a sinistra quelle delle femmine.

Ad esempio, considerando i grafici ramo-foglia relativi alle altezze degli alunni, nati nel 1996, delle classi 3A, 3B e 3C dell'I.C. di Valmorea (CO) A.S. 2009-2010 si ottiene:

Altezze alunni (nati nel 1996) delle classi 3A, 3B e 3C
I.C. Valmorea (CO) - A.S. 2009-2010

		Femmine			Maschi		
		foglia cm			ramo 5 cm		
		9	7	5	14	8	8
					15	0	0 1 3 4
	8 7 7 6 6 5 5 5				15	5	5 6 6 9 9
4 4 3 3 2 2 2 2	1 1 0				16	0	0 0 1 1 1 2 2 2 3 4
	9 7 7				16	5	6 6 7 8 8 8 8 9
	1 1 1				17	1	2 2
					17	6	7

L'insegnante chiede: qual è il **valore minimo** dell'altezza dei maschi? E il **valore massimo**? E per le femmine quali sono questi valori? Ci sono rami senza foglie? Dove? Cosa significa? È possibile concludere che, anche se tutti gli alunni sono nati nello stesso anno e sono alunni di terza nella nostra scuola, per quanto riguarda l'altezza invece sono diversi e che la statura assume modalità diverse nel collettivo studiato? L'insegnante precisa che ciò, in termini statistici, vuole dire che nella distribuzione delle stature esiste variabilità; c'è una variabilità nella distribuzione dei maschi e questa è diversa dalla variabilità della distribuzione delle femmine. L'insegnante chiede agli alunni se, ed eventualmente come, sia possibile stabilire se varino di più le altezze dei maschi o quelle delle femmine. Dalla discussione dovrebbe emergere che, dopo avere individuato il massimo e il minimo dell'altezza, potrebbe essere sufficiente calcolare, per genere, la differenza tra il valore massimo e quello minimo (**campo di variazione**) e confrontare i valori ottenuti. A questo punto l'insegnante guida gli alunni a riconoscere che, per il confronto di due distribuzioni dello stesso carattere, anche i **valori medi** si possono rivelare utili. Quindi invita gli alunni ad individuare la **moda** delle altezze dei maschi e quella delle altezze delle femmine (ossia la modalità più frequente in ciascuna distribuzione) e a calcolare, per genere, le **medie aritmetiche** delle rispettive altezze.

Vedi le attività:

Di media non ce n'è una sola 1

Di media non ce n'è una sola 2

Per visualizzare rapidamente i risultati, potrebbe essere utile costruire una tabella riassuntiva come la seguente:

Carattere	N. Unità statistiche	Valore massimo (cm)	Valore minimo (cm)	Media aritmetica (cm)	Moda (cm)
Altezza					

Maschi	38	177	148	162	168
Femmine	28	171	145	160	162

Successivamente, l'insegnante chiede agli alunni di costruire, anche per i caratteri apertura delle braccia e lunghezza punta della mano-gomito, individualmente o in piccoli gruppi, i grafici ramo-foglia, di calcolare, per genere, la moda e la media, di osservare attentamente, confrontare e commentare grafici e valori medi ottenuti.

In intergruppo dovrebbe emergere che:

- Vi sono differenze tra maschi e femmine rispetto ai caratteri rilevati;
- Vi potrebbe essere una particolare relazione tra l'apertura media delle braccia e l'altezza media per gli alunni di uno stesso genere;
- Vi potrebbe essere una particolare relazione tra la lunghezza media dalla punta della mano al gomito e l'altezza media, per ciascun genere.

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

Il confronto fra i diagrammi ramo-foglia, generalmente, si rivela semplice sia per i ragazzi poco motivati sia per quelli in difficoltà; più complesso, invece, risulta, il calcolo degli indici statistici.

Strategie suggerite:

- *Se si utilizza la calcolatrice, è necessario organizzare gruppi in cui vi siano più allievi che affianchino l'alunno in difficoltà e che lo invitino ad usare lo strumento e controllino che l'inserimento dei dati avvenga in modo corretto;*
- *Se la matrice è costruita col foglio elettronico, si possono calcolare la media aritmetica, la moda ed il campo di variazione utilizzando le funzioni specifiche del foglio di calcolo;*
- *Far svolgere il lavoro a coppie per la costruzione della tabella riassuntiva: un allievo con buona manualità costruisce la propria tabella ed aiuta il compagno a realizzare la sua, in alternativa, far realizzare la tabella riassuntiva con il foglio di calcolo;*
- *Far utilizzare il PC e realizzare la tabella riassuntiva con il foglio di calcolo.*

Fase 8 - Confronto numerico fra altezza e apertura delle braccia

L'insegnante fa rileggere agli alunni le affermazioni di Leonardo:

"La larghezza dell'apertura delle braccia è tanto quanto la sua altezza"

"La lunghezza tra il gomito e la punta della mano è la quarta parte dell'uomo" e li guida a comprendere che tali affermazioni non riguardano le misure di un individuo, ma i **rapporti** fra queste misure ed inoltre, ancora più importante, che le relazioni tra le parti del corpo di cui parla Leonardo si riferiscono alla popolazione nel suo insieme e non al singolo individuo. L'insegnante suggerisce allora agli alunni di calcolare, per ogni studente sul quale si sono effettuate le rilevazioni, il rapporto apertura braccia/altezza e poi di trovare la media dei rapporti per verificare se l'ipotesi di Leonardo è plausibile rispetto all'insieme dei dati rilevati nella scuola.

Per calcolare i rapporti richiesti e, successivamente, la loro media aritmetica, occorre avvalersi della matrice dei dati.

Ad esempio, se si utilizzano i dati delle classi 3A, 3B e 3C relativi ai nati nell'anno 1996 dell'Istituto Comprensivo di Valmorea nell'A.S. 2009-2010 si ottiene la seguente matrice:

Matrice dei dati			
Alunno	Genere	Altezza in cm	Apertura braccia in cm
1	F	162	158
2	F	155	153
3	M	163	159
4	M	161	167
5	M	156	153
6

L'insegnante invita gli alunni ad aggiungere alla matrice dei dati due colonne in cui inserire i risultati dei rapporti apertura braccia/altezza e lunghezza punta mano-gomito/altezza (nell'esempio qui elaborato vi è solo la colonna del rapporto apertura braccia/altezza; per la matrice completa si veda il file *MatriceRapporti.xsl*) e ad esaminare la colonna dei rapporti. Per quanto riguarda il rapporto apertura braccia/altezza, nessuno di questi è uguale ad uno, alcuni sono leggermente più grandi ed altri leggermente più piccoli.

Scarica: [Matrice rapporti](#)

Matrice dei dati				
Alunno	Genere	Altezza in cm	Apertura braccia in cm	Rapporto apertura braccia/altezza
1	F	162	158	0,98
2	F	155	153	0,99
3	M	163	159	0,98
4	M	161	167	1,04
5	M	156	153	0,98
6

A quanto è uguale la loro **media aritmetica**?

I dati rilevati nelle classi 3A, 3B e 3C, relativi ai nati nell'anno 1996 dell'Istituto Comprensivo di Valmorea nell'A.S. 2009-2010, confermano che, in media, le

affermazioni relative alle relazioni tra i rapporti tra le parti del corpo di cui parla Leonardo sono confermate. Infatti, la media dei rapporti apertura-braccia/statura è pari a 1,0036, cioè circa 1,00. Anche la media del rapporto lunghezza punta mano-gomito/altezza ha un valore di circa 0,25, cioè un quarto. Ciascuno studente, a questo punto, può ricavare dalla matrice quanto variano i propri valori rispetto alle singole medie e rispetto ai valori indicati da Leonardo. Se lo si ritiene opportuno, divisi in piccoli gruppi, l'insegnante può fare esaminare agli studenti il comportamento dei rapporti per le distribuzioni dei maschi e per quella delle femmine.

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

In questa fase gli alunni devono completare la matrice dei dati e calcolare i rapporti e le loro medie con l'ausilio della calcolatrice e/o del foglio di calcolo, pertanto, è possibile avvalersi dei suggerimenti indicati nelle fasi precedenti. Si consiglia, inoltre, di proporre attività in coppie e/o in piccoli gruppi e di guidare gli alunni nell'analisi dei risultati e nella stesura delle conclusioni.

Indicazioni metodologiche

La modalità didattica proposta privilegia l'attività **pratico-operativa**, consente il coinvolgimento attivo degli studenti e può intervenire positivamente sulla loro motivazione e sul loro processo di apprendimento. La **discussione** e la **conversazione clinica**² (rilevazioni delle conoscenze spontanee degli alunni) favoriscono il confronto delle idee e rendono più efficace la comunicazione all'interno del gruppo classe. I **lavori di gruppo** si rivelano funzionali alla cooperazione e alla collaborazione tra gli studenti.

Se la scuola è dotata di un **laboratorio multimediale** oppure in classe vi è una **LIM** (lavagna interattiva multimediale) e gli allievi possono lavorare con i personal computer, si consiglia di utilizzare il foglio di calcolo. Si evidenzia che per la costruzione della matrice dei dati, per il calcolo dei rapporti e delle loro medie l'uso di Excel è semplice, mentre per l'istogramma potrebbe essere necessario svolgere un'attività di approfondimento.

Vedi le attività:

[I grafici... questi sconosciuti](#)

[Siamo vincoli o sparpagliati?](#)

Per gli alunni particolarmente deboli si consiglia di proporre un particolare lavoro in coppie, il "**Pair check**", che prevede la rielaborazione in coppie e, nel momento di difficoltà o non accordo, il coinvolgimento di un'altra coppia. Nel Pair check, l'insegnante ha funzione di supervisore dei vari confronti fra coppie.

Tra le modalità di recupero, dopo una verifica, si consiglia di avvalersi del **Peer Tutoring** con coppie non omogenee e in ciascuna delle quali ci sia un possibile "tutor" in grado di condurre il compagno ad un opportuno modo di procedere.

In ogni caso si ritiene fondamentale l'attività di guida e mediazione dell'insegnante tra i materiali proposti e i soggetti in formazione.

[Scheda Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà](#)

² Damiano E., (a cura di) *Insegnare con i concetti (Un modello didattico tra scienza e insegnamento)*, SEI, Torino, 1994.

Spunti per un approfondimento disciplinare

Verifica empirica della relazione tra altezza e apertura delle braccia L'insegnante chiede agli alunni se, secondo loro, esiste una **relazione** tra apertura delle braccia e altezza.

Mediante una conversazione clinica li guida a comprendere che, in generale, per verificare empiricamente l'esistenza di un'eventuale relazione tra due **caratteri quantitativi o variabili**, un primo passo può essere quello di rappresentare congiuntamente i due caratteri. Dato che di ogni unità statistica (alunno) si conosce la coppia ordinata di misure (altezza; apertura delle braccia), gli studenti non avranno difficoltà ad individuare nel piano cartesiano la rappresentazione grafica più adatta allo scopo.

L'insegnante concorda con gli alunni di utilizzare un foglio di carta millimetrata e di rappresentare sull'asse delle ascisse l'altezza (x) e su quello delle ordinate le aperture delle braccia (y). Graficamente, quindi, un punto rappresenta una **coppia ordinata** di misure che individuano un alunno. Se due o più alunni dovessero avere gli stessi valori di altezza e apertura braccia, per evidenziare che lo stesso punto si riferisce a più unità statistiche, si può scegliere di rappresentarlo segnandolo con una dimensione maggiore (un po' più grosso!) rispetto agli altri (in alternativa, si può scegliere di rappresentarlo con colori differenti, facendo attenzione a ciò che potrebbe verificarsi nel caso di molte coppie con frequenze multiple diverse!!!).

Rappresentando la matrice dei dati con il grafico cartesiano si ottiene il **diagramma a dispersione**, anche noto come **nuvola di punti**, ossia l'insieme dei punti-unità nel piano.

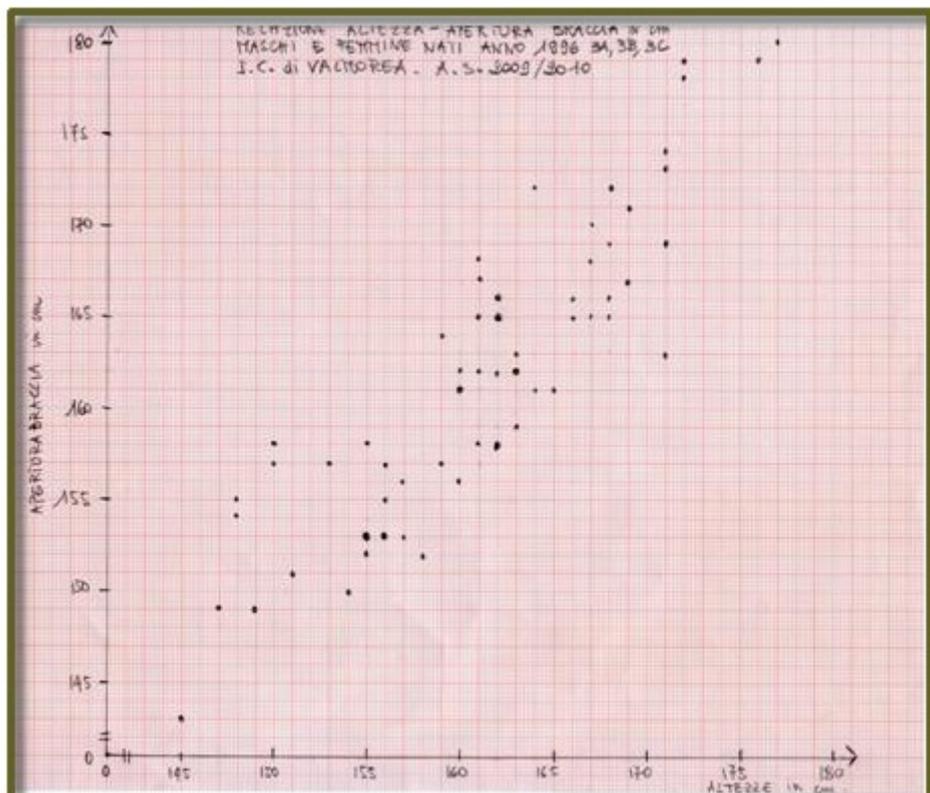


Figura 1 - Nuvola dei punti (altezze; apertura braccia)

Se già non l'hanno fatto, l'insegnante invita gli alunni a calcolare la media aritmetica delle altezze e quella delle aperture delle braccia, a rappresentare sul grafico il punto di coordinate (altezza media; apertura media delle braccia) ed a disegnare le parallele ai due assi che passano da questo punto. Cosa si ottiene? Si è diviso il primo quadrante in 4 nuove parti. È come aver creato 4 nuovi quadranti.

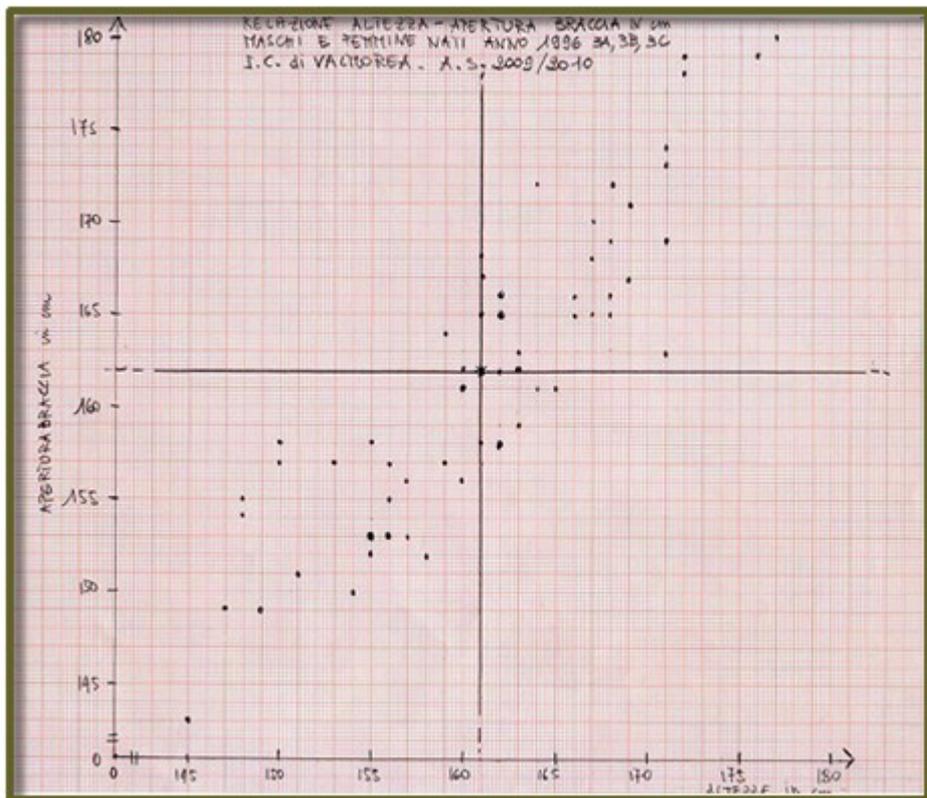


Figura 2 - Nuvola dei punti (altezze; apertura braccia) tenuto conto dell'altezza media e dell'apertura media delle braccia

L'insegnante chiede: dove si trovano i punti rispetto ai due nuovi assi? Quanti punti si trovano nel primo quadrante e quanti nel terzo? E quanti nel secondo e nel quarto? Gli alunni, opportunamente guidati, dovrebbero essere in grado di riconoscere che gli eventuali punti nel quadrante in alto a sinistra (secondo quadrante) si riferiscono ad alunni non alti ma con braccia lunghe, mentre quelli nel quadrante in basso a destra (quarto quadrante) si riferiscono ad alunni alti con braccia non lunghe.

Quali informazioni si possono dedurre dai grafici? Dalla discussione dovrebbe emergere che i punti nel loro insieme formano una nuvola che mostra una tendenza a crescere, ossia al crescere dell'altezza tende a crescere in generale anche l'apertura delle braccia. Le due variabili manifestano nell'insieme una **relazione crescente**.

Se altezza e apertura delle braccia fossero esattamente uguali in ogni individuo, come sarebbero disposti i punti? Che caratteristiche avrebbero? L'insegnante propone agli studenti di indicare l'altezza con x e l'apertura delle braccia con y . E chiede come si potrebbe tradurre in linguaggio simbolico la frase di Leonardo:

"Tanto apre l'omo ne' le braccia, quanto è lla sua alteza".

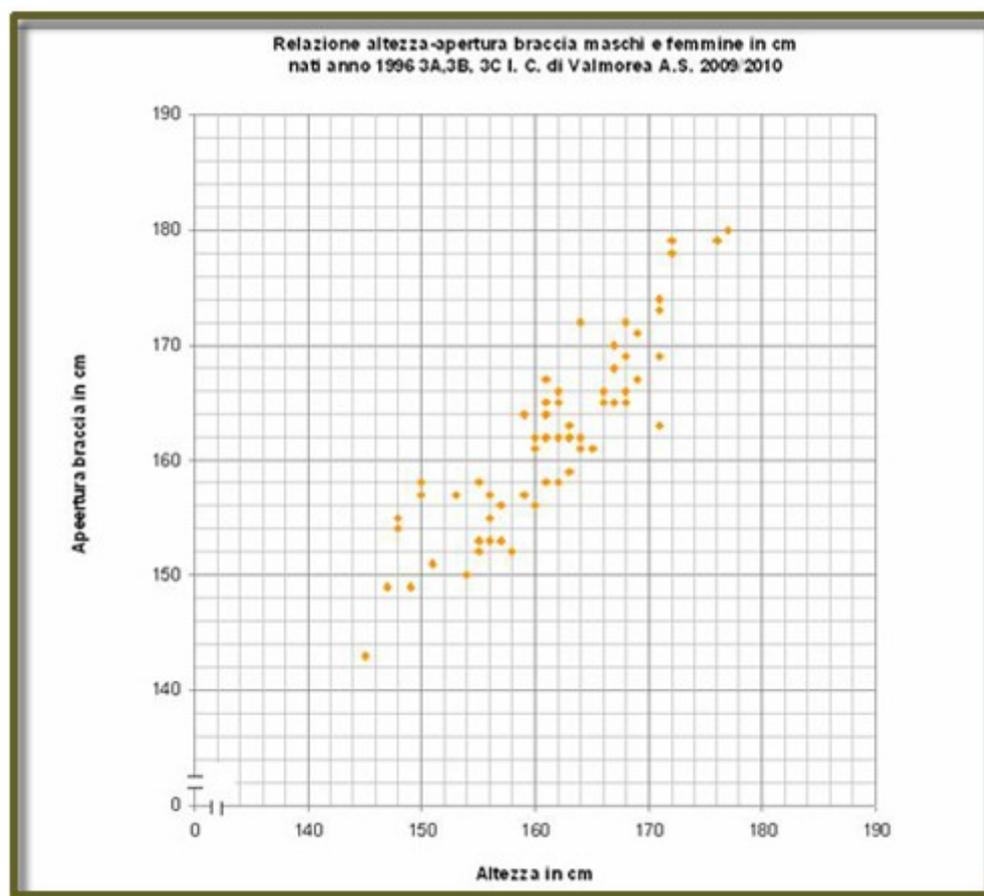
L'insegnante guida gli studenti alla risposta $y=x$ e chiede cosa rappresenta la relazione scritta. Gli studenti, opportunamente guidati, dovrebbero riconoscere nella relazione $y=x$ la **bisettrice** del primo quadrante in Figura 1.

L'insegnante può anche proporre agli studenti di verificare, avvalendosi della stessa procedura, la relazione tra la lunghezza punta mano-gomito e l'altezza. In questo caso, se in ogni individuo la lunghezza punta mano-gomito (y) e l'altezza (x) fossero esattamente come indicato da Leonardo, si otterrebbe la **retta** di equazione $y = 1/4 x$.

Ad integrazione della costruzione manuale del grafico, è possibile costruire lo **scatter plot** dei dati, ovvero la "nuvola di punti" di coordinate $(x;y)$, mediante il **grafico a dispersione** o a **punti di Excel**.

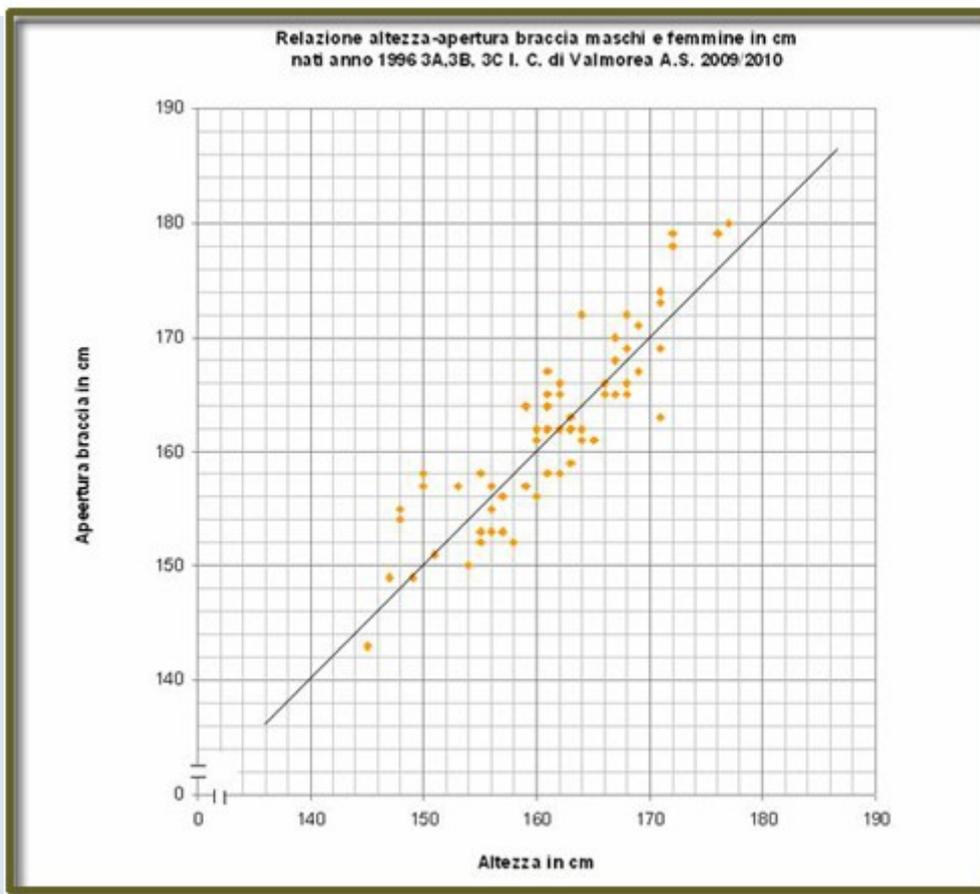
Scarica: [Grafici a dispersione](#)

Ad esempio, utilizzando la matrice dei dati rispetto all'altezza e all'apertura delle braccia, si è ottenuto il seguente grafico:



Questo grafico è più preciso di quello costruito manualmente. L'insegnante incoraggia gli studenti a rappresentare su di esso la retta $y=x$ e domanda loro quanti punti si

trovano sopra la retta, quanti sotto e quanti esattamente sulla retta. Chiede, infine, agli studenti, divisi in gruppetti di quattro-cinque elementi, di argomentare con le loro parole la frase di Leonardo e il percorso fatto per verificarla. Ogni gruppetto presenterà le proprie conclusioni.



Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

Verifica empirica della relazione tra altezza e apertura delle braccia

La rappresentazione della "nuvola dei punti" sul piano cartesiano costituisce uno stimolo positivo anche per i cosiddetti ragazzi "deboli", in modo particolare se si usa il foglio di calcolo (vedi scheda di riferimento per la costruzione del grafico col foglio di calcolo). L'insegnante, nei casi in cui lo ritenesse opportuno e formativo a seconda della classe e della presenza degli allievi in difficoltà, può proporre l'approfondimento.

Scarica: [Grafico a dispersione](#)

Elementi per prove di verifica

Prova di autoverifica

Nell'Istituto Comprensivo di Valmorea (CO), nell'anno scolastico 2009-2010, gli alunni della 3C, per verificare la seguente frase di Leonardo:

“La magiore largheza delle spalli contiene in sé la quarta parte dell'omo”

hanno rilevato, oltre alle altezze degli alunni nati nel 1996 delle classi 3A, 3B e 3C, anche la larghezza delle spalle.

La matrice dei primi 30 dati è la seguente:

u.s	genere	altezza cm	larghezza spalle cm
1	F	162	40
2	F	155	37
3	M	163	39
4	M	161	42
5	M	156	40
6	F	156	40
7	M	159	34
8	M	164	39
9	F	167	35
10	F	157	36
11	M	162	40
12	M	168	43
13	M	162	42
14	M	160	47
15	F	164	38
16	M	176	45
17	M	166	38
18	F	155	38
19	M	168	42
20	M	177	47
21	M	168	40
22	F	167	42
23	M	167	41
24	M	150	42
25	F	158	32
26	F	163	46
27	M	153	38
28	M	162	41
29	M	160	42
30	M	172	42

Calcola:

- il rapporto larghezza spalle-altezza per ogni studente;
- la moda, la media, il minimo, il massimo ed il campo di variazione per la distribuzione delle altezze, per quella delle larghezze delle spalle e per quella dei rapporti e raccogli in modo opportuno le informazioni.

Costruisci:

- Il diagramma ramo-foglia delle altezze dei 30 alunni;
- La distribuzione di frequenze assolute e percentuali delle altezze dei 30 alunni;
- L'istogramma delle altezze dei 30 alunni;
- Il diagramma ramo-foglia delle larghezze delle spalle dei 30 alunni;
- La distribuzione di frequenze assolute e percentuali delle larghezze delle spalle dei 30 alunni;
- L'istogramma delle larghezze delle spalle dei 30 alunni.

Secondo te, i ragazzi di Valmorea hanno confermato o meno l'ipotesi di Leonardo?

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

L'insegnante può sottoporre l'autoverifica all'alunno in difficoltà considerando i seguenti suggerimenti:

- Fornire la traduzione in italiano corrente della seguente frase di Leonardo: "La maggiore larghezza delle spalle contiene in sé la quarta parte dell'uomo" che significa:
"La larghezza delle spalle (misurata da spalla a spalla con le braccia distese lungo il corpo) è pari alla quarta parte dell'altezza dell'uomo"
- Controllare che tutti gli alunni abbiano compreso cosa significa "larghezza delle spalle" attraverso una simulazione sul corpo degli allievi;
- Formulare, se necessario, i quesiti in modo più dettagliato affinché tutti gli alunni possano comprenderne meglio la consegna;
- Eliminare alcune richieste come per esempio quelle relative alle altezze;
- Leggere ad alta voce i quesiti;
- Permettere agli allievi in difficoltà di utilizzare il PC come facilitatore.

Nel caso ci fossero allievi con difficoltà di tipo cognitivo, l'insegnante può formare coppie di tipo eterogeneo e permettere che l'autoverifica venga svolta dal ragazzo in difficoltà con l'aiuto di un compagno con il ruolo di "tutor".

Scarica:

[La versione cartacea della prova di autoverifica](#)

[I risultati della prova di autoverifica](#)

Prova di verifica

Dopo aver rilevato su 10 atleti il peso (in kg) e l'altezza (in cm) e indicato con x il peso e con y l'altezza, si è costruita la seguente tabella:

ATLETI	Peso (X)	Altezza (Y)
Mario	66	174
Paolo	64	168
Luca	65	171
Giorgio	71	178
Sandro	64	169
Francesco	70	174
Alberto	71	180
Oreste	62	172
Bruno	60	169
Ettore	69	179

Esempio a fini didattici dell'Istat - Servizi Studenti - Il valore dei dati

1. Rispondi alle seguenti domande:

- a. Di quale tabella si tratta?
- b. Quali caratteri sono stati rilevati?
- c. Quali unità di misura sono state scelte per misurare i caratteri?
- d. Quante e quali sono le unità statistiche?
- e. Chi pesa meno?
- f. Chi è il più alto?
- g. Qual è l'altezza più bassa rilevata?
- h. Qual è il peso più alto rilevato?
- i. Qual è il campo di variazione del peso degli atleti?
- j. Qual è il campo di variazione dell'altezza degli atleti?

2. In base alla matrice dei dati, costruisci:

- a. la distribuzione unitaria dei pesi degli atleti, in modo che le modalità siano ordinate in senso crescente;
- b. La distribuzione unitaria delle altezze degli atleti, in modo che le modalità siano ordinate in senso crescente;
- c. Il diagramma ramo-foglia dei pesi degli atleti, i cui rami siano di ampiezza costante e pari a 5 Kg;
- d. Il diagramma ramo-foglia delle altezze degli atleti, i cui rami siano di ampiezza costante e pari a 5 cm.

3. A partire dai grafici ramo-foglia, costruisci:
 - a. La distribuzione di frequenze dei pesi degli atleti;
 - b. La distribuzione di frequenze delle altezze degli atleti;
 - c. L'istogramma dei pesi degli atleti;
 - d. L'istogramma delle altezze degli atleti.

4. In base alle distribuzioni unitarie, calcola:
 - a. La media dei pesi degli atleti;
 - b. La media delle altezze degli atleti.

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

La prova di verifica proposta è stata volutamente formulata considerando un numero limitato di dati e solo due caratteri: il peso e l'altezza di 10 atleti.

In base alla situazione specifica, l'insegnante può decidere se:

- Assegnare la stessa verifica a tutti;
- Limitare le richieste (per esempio chiedere di svolgere i punti relativi al peso) per i ragazzi più "deboli";
- Permettere l'uso del foglio di calcolo e/o fornire supporti cartacei (tabella già strutturata e istogramma in parte predisposto) per gli allievi con difficoltà di tipo operativo e/o cognitivo;
- Assegnare ai ragazzi più abili anche l'esercizio di approfondimento come prova di comprensione mentre gli alunni in difficoltà completano quella precedente;
- Assegnare a tutti l'esercizio di approfondimento con l'eventuale ricorso al metodo cooperativo (un alunno come "tutor");
- Assegnare altri esercizi a seconda della tipologia della classe e degli allievi...

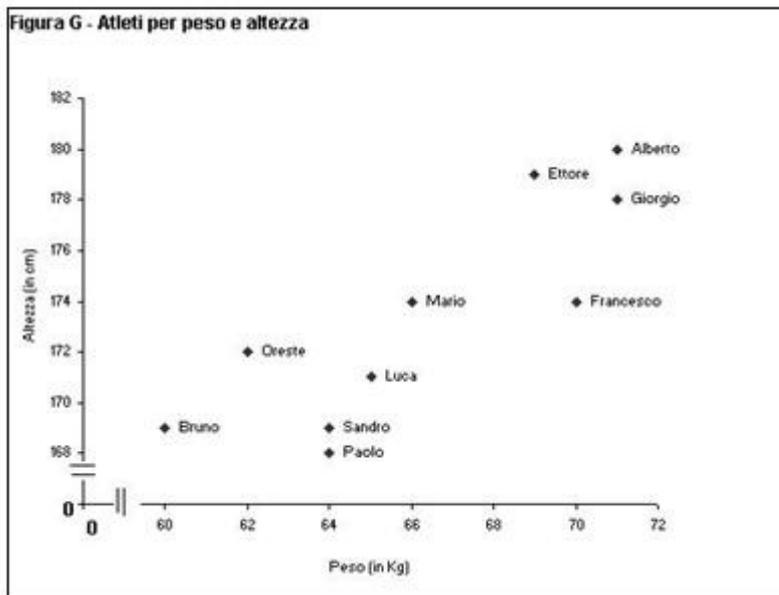
Scarica:

[La versione cartacea della prova di verifica](#)

[I risultati della prova di verifica](#)

Esercizio di approfondimento

Dopo aver osservato attentamente il seguente grafico,



Esempio a fini didattici da sito Istat - Servizi Studenti

Rispondi alle domande:

- Qual è il nome del grafico rappresentato?
- Quale carattere è rappresentato nell'asse delle ascisse?
- Quale carattere è rappresentato nell'asse delle ordinate?
- Come sono rappresentate le unità statistiche?
- Come si chiama l'insieme dei punti-unità nel piano?
- Come tendono a disporsi i punti?
- La disposizione dei punti sul piano permette di identificare eventuali relazioni esistenti fra le due variabili peso e altezza?
- Cosa succede quando i valori del peso crescono?

Indicazioni didattiche per alunni in difficoltà

Se si decide di somministrare l'esercizio di approfondimento a tutti gli alunni e se per gli allievi in difficoltà non si desidera avvalersi del metodo cooperativo (un alunno come "tutor"), si suggerisce di proporre loro domande con risposte multiple invece di quelle aperte.

Scarica:

[La versione cartacea dell'esercizio di approfondimento](#)

[I risultati dell'esercizio di approfondimento](#)

Spunti per altre attività con gli studenti

Confrontare i rapporti di Leonardo con il rapporto aureo in anatomia e quindi effettuare una riflessione sui rapporti.

Vai al sito: [La favola della sezione aurea](#)

Scarica il pdf: [Sezione aurea](#).

Analizzare l'aspetto storico su Leonardo attraverso i testi e/o Internet (web-quest).
Analizzare l'opera "L'uomo di Vitruvio" di Leonardo con il docente di Arte e Immagine.
Individuare rapporti sulle statue classiche con il docente di Arte e Immagine.

Documentazione e materiali

Siti visitati nel mese di febbraio dell'anno 2015

1. Sito del Museo Galileo - Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze
[Vai al sito >>>](#)
2. L'uomo nel cerchio e nel quadrato, Video animazioni da Leonardo da Vinci, Gallerie dell'Accademia, Venezia, n.228 Laboratorio multimediale IMSS. La prima animazione visualizza il rapporto del corpo umano con il cerchio e con il quadrato, secondo la soluzione tramandata dall'architetto romano Vitruvio, che Leonardo ripropone. Il secondo filmato visualizza la serie dei rapporti proporzionali del corpo umano utilizzati da Leonardo nel disegno dell'Uomo vitruviano.
[Vai al sito >>>](#)
3. Costruzione geometrica, Video animazione da Leonardo da Vinci, Gallerie dell'Accademia, Venezia, n.228 Laboratorio multimediale IMSS. Visualizzazione di due diverse interpretazioni della relazione tra il cerchio e il quadrato, nei quali è inserita la figura umana. La prima si basa su un procedimento geometrico nel quale svolge un ruolo centrale la sezione aurea. Nella seconda, la relazione tra il cerchio e il quadrato è mediata dall'ettagono (poligono regolare di sette lati).
[Vai al sito >>>](#)
4. Silvia Gramigna Lo straordinario messaggio di Leonardo nel disegno dell'Uomo vitruviano, custodito alle Gallerie dell'Accademia di Venezia
[Vai al sito >>>](#)
5. A misura d'uomo: Leonardo e l'uomo vitruviano
[Vai al sito >>>](#)

6. Misure del corpo

[Vai al sito >>>](#)

7. Collegamento con sezione aurea

[Vai al sito >>>](#)

Pdf [Sezione aurea](#) (dal sito www.matematica.unimi.it)

8. GAP Speciali - Arte e scienza nel Rinascimento: l'Uomo di Leonardo

[Vai al sito >>>](#)

E molti altri basta digitare su un motore di ricerca la frase "Uomo vitruviano".

Bibliografia

AAVV, *Matematica 2001. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Scuola Primaria e Scuola Secondaria di primo grado*, MIUR, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica, 2001.

AAVV, *Matematica 2003. La Matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. Ciclo secondario*, MIUR, Unione Matematica Italiana, Società Italiana di Statistica, 2003.

OCSE (a cura di), *PISA 2003 Valutazione dei quindicenni*, Roma, Armando Armando, 2004.

Batanero, C., Burrill, G., Reading, C. (editors) (2011), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education*, Dordrecht, Springer, New ICMI Study Series, Volume 14.

Brunelli L. e altri, *Un'indagine in classe per apprendere la statistica*, Induzioni, 21, 2000, pp. 3-110.

Ianes D., Macchia V., *La didattica per i Bisogni Educativi Speciali*, Edizioni Erickson, Trento, 2008.

Lombardo E., Rossi C., *Dati statistici in diversi contesti*, Induzioni, 26, 2003, pp. 73-90.

Lombardo E., Zuliani A., *Statistica per esempi*, Firenze, La Nuova Italia, 1988.

Ottaviani M. G., *Strumenti per l'analisi dei dati*, Induzioni, 23, 2001, pp. 33-81.

Pereira Mendoza L., A. Dunkels, *Diagrammi ramo foglia nella scuola elementare*, ristampato in *Induzioni*, 36, 2008.

Perelli D'Argenzio M.P., *La statistica nella società e nella scuola. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol.28 n.5, pp. 429-450 ; vol 30 n.3 pp.251-270; n.5, pp.591-602; vol 31 n.3,pp. 251-270.

Perelli D'Argenzio M.P., *La statistica nella società e nella scuola: le rappresentazioni grafiche dei dati statistici-seconda parte. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol 30° n°5, settembre 2007, pp. 591-602.

Perelli M.P., Moncecchi G., *Didattica per concetti e insegnamento della statistica*, *Induzioni*, n.29, 2004, pp. 33-50.

Sandri P., *La matematica per l'integrazione degli allievi disabili*, In Canevaro A. (a cura di), *L'integrazione scolastica degli alunni con disabilità. Trent'anni di inclusione nella scuola italiana*, Trento, Erickson, 2007, pp. 267-286.

Sitografia

Siti visitati a febbraio 2015

[Unione Matematica Italiana - Unione Matematica Italiana](#)

[AAVV, *Matematica 2001*](#)

[AAVV, *Matematica 2003*](#)

[Invalsi - Ocse Pisa 2006](#)

[Censimento a scuola - Guida per i docenti delle medie](#)

[Siamo "vincoli o sparpagliati"?](#)

[Dai dati ai grafici e ... ritorno](#)

[I grafici... questi sconosciuti 1](#)

[I grafici... questi sconosciuti 2](#)

Proposta di attività per il corsista

Da condividere e discutere in rete.

Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:

- individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.
- Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.

Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;

- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe): l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà. Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.