Superfici comode e scomode

Attività riadattata da Matematica 2001 e da Matematica 2003 da

Rosa Laura Ancona, Marina Dalè, Riccardo Ruganti, Luigi Tomasi

Introduzione

Si fa riferimento alle attività sull'area presenti in *Matematica 2001* per la scuola secondaria di I grado e all'attività sulle crescite lineari e quadratiche di aree, *Ognuno cresce a modo suo*, della scuola secondaria di II grado.
La misura di superfici viene introdotta a partire da esperienze di misura dirette, condotte per approssimazioni per eccesso e per difetto in modo da passare successivamente a misure indirette di aree di figure poligonali con l'uso di formule e "regole" di geometria.
L'attività si conclude ripercorrendo dal punto di vista didattico il procedimento di Archimede per il calcolo dell'area del cerchio.

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 57 del 15/07/2010, Direttiva n. 65 del 09/07/2010) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni Nazionali per i Licei

Linee generali e competenze
Elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio.

Obiettivi specifici di apprendimento - I biennio

Geometria
Conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano.

Linee Guida per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali

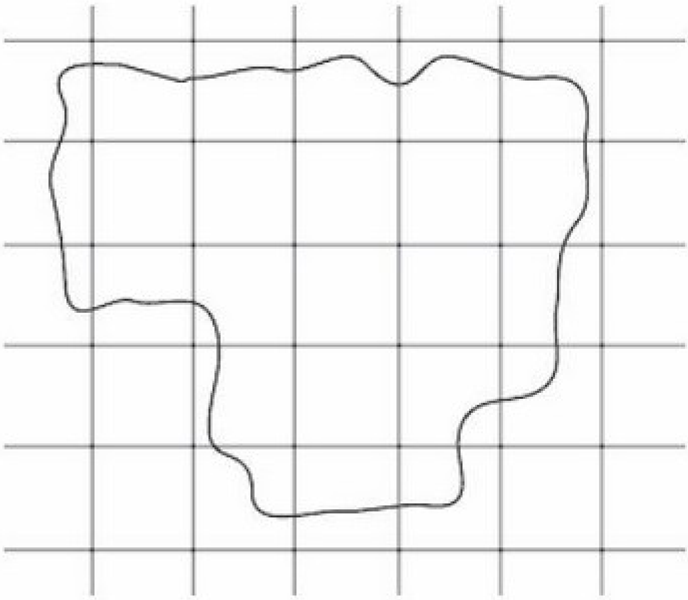
I biennio
Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio.

Prove Invalsi

a.s. 2009/2010 - Domanda D18

Scuola secondaria di I grado - Classe III (Prova Nazionale)

D18. Nella figura che vedi ogni quadretto ha il lato di 1 cm.



Quanto misura all'incirca l'area racchiusa dalla linea curva?

- ☐ A. Meno di 8 cm^2
- ☐ B. Più di 8 cm^2 e meno di 13 cm^2
- ☐ C. Più di 13 cm^2 e meno di 25 cm^2
- ☐ D. Più di 25 cm^2

Soluzione INVALSI: C

Commento

Domanda a risposta univoca (falsa aperta). Ambito: spazio e figure.

Questa domanda, pur essendo stata proposta nella classe III della Scuola secondaria di I grado rientra pienamente nel tema proposto in questa attività per il I biennio della Scuola secondaria di II grado.

Il quesito si presta ad essere risolto bene dagli allievi che hanno affrontato questa attività in classe perché è del tutto simile alla prima fase.

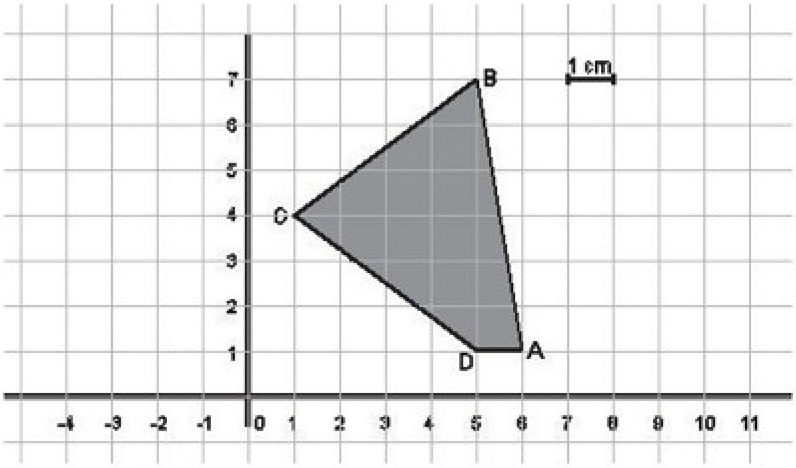
La competenza coinvolta nella domanda è quella di saper approssimare l'area di una figura curvilinea procedendo con approssimazioni per difetto e per eccesso.

Lo studente di solito impara delle regole stereotipe per determinare l'area di una figura piana. Questo tipo di domanda invece esplora un'abilità che va al di là di un apprendimento superficiale e ripetitivo.

Per rispondere adeguatamente si poteva dividere alcuni quadretti in due parti uguali oppure, meglio, in quattro parti uguali.

a.s. 2010/2011 - Domanda D18
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D18. L'unità di misura riportata sugli assi cartesiani rappresenta 1 cm.



Calcola l'area del quadrilatero ABCD.

Risposta: ………………………………… cm^2

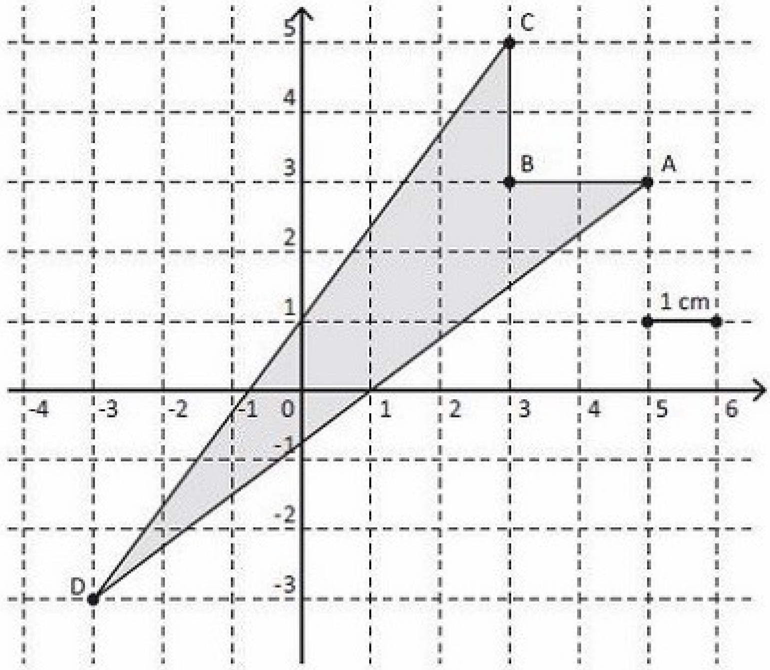
Soluzione INVALSI:

Risposta corretta: 15 cm².
Per rispondere è bene che lo studente conosca qualche cenno della teoria dell'equiscomponibilità.
Basta considerare la figura da calcolare come differenza tra il rettangolo di vertici M(1; 7), N(6;7), A(6; 1), P(1; 1) e i triangoli DPO, OMB e BNA. Si ottiene: (30 - 6 - 6 - 3) cm² = 15 cm².
Si potrebbe anche suddividere il quadrilatero ABCD in due triangoli ABD e BCD e calcolarne l'area: area (ABD) + area (BCD).
La loro somma (3 + 12 = 15) è l'area del quadrilatero.

Commento
Domanda a risposta univoca. Ambito prevalente della domanda: Spazio e Figure.
Processo prevalente della domanda: Sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo, …).
Si tratta di trovare l'area di una figura non stereotipata, usando l'equiscomponibilità per somma oppure per differenza.
Questo quesito è del tutto in linea con quanto è previsto dall'attività "Superfici comode e scomode".
L'allievo deve sapere analizzare una figura geometria e individuare una strategia per trovarne l'area.

a.s. 2011/2012 - Domanda D17
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D17. Calcola l'area del quadrilatero ABCD disegnato in figura.



Risposta: .... cm^2

Soluzione INVALSI:

Risposta corretta: 12. Il calcolo dell'area può essere determinato in diversi modi. Uno dei più agevoli può essere quello di riquadrare la figura con il rettangolo avente per vertici i punti di coordinate M (-3; 5), N (5; 5), P (5; -3) e D (-3; -3). A questo punto, per ottenere l'area richiesta è possibile sottrarre dall'area del rettangolo le aree dei triangoli rettangoli MDC e APD e del quadrato CBAN.

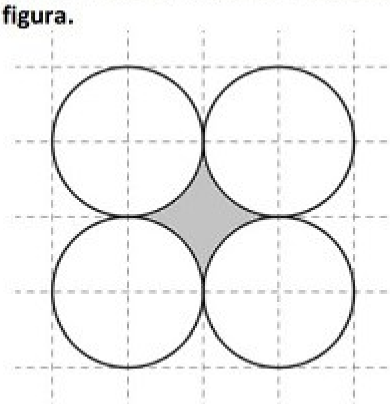
Commento
Il calcolo di aree mediante operazioni di composizione e scomposizione di figure, di cui sia semplice calcolare l'area, ompiti a cui si presta particolare attenzione nel primo ciclo scolastico. Questa domanda si presta quindi a stabilire un raccordo con la Scuola secondaria di I grado.
Si tratta di trovare l'area di una figura non stereotipata, usando l'equiscomponibilità per somma oppure per differenza.
Questo quesito è del tutto in linea con quanto è previsto dall'attività "Superfici comode e scomode".
L'allievo deve sapere analizzare una figura geometria e individuare una strategia per trovarne l'area.

Ambito prevalente della domanda: Spazio e figure.
Processo prevalente: Sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di

oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura.
Tipologia di domanda: a risposta univoca (falsa aperta).
Indicazioni nazionali e linee guida:
Uso del metodo delle coordinate cartesiane.
Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area.

a.s. 2012/2013 - Domanda D13
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D13. **Ricorda che la lunghezza di una circonferenza si calcola moltiplicando il suo diametro per π e che l'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del suo raggio per π. Quattro circonferenze, ciascuna con diametro 10 cm, sono tangenti a due a due come mostrato nella seguente figura.**



a. **Il perimetro della regione evidenziata in grigio misura in centimetri:**

A. ☐ 20π

B. ☐ 10π

C. ☐ 5π

D. ☐ 4π

b. **La superficie della regione evidenziata in grigio misura .... cm^2**

Soluzione INVALSI:

D13_a: B
D13_b: 100 - 25п, accettabile anche 21,5 oppure un qualunque numero decimale compreso tra 21,4 e 22,5 (estremi inclusi).

Commento
Si poteva rispondere all'item a) osservando che il perimetro della regione evidenziata in grigio è uguale alla lunghezza di una delle circonferenze di raggio 5 cm, quindi 10 п.
Analogamente, per rispondere all'item b) lo studente poteva notare che l'area della regione evidenziata in grigio può ottenersi come differenza fra l'area del quadrato di lato 10 cm e l'area del cerchio di raggio 5 cm, quindi 100 - 25п.

Ambito prevalente: Spazio e figure
Scopo della domanda:
a) Determinare un'adeguata strategia per individuare la misura del perimetro di una figura non standard.

b) Determinare un'adeguata strategia per individuare la misura della superficie di una figura non standard.

Processo prevalente:
a) Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi - numerico, geometrico, algebrico.
b) Riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze.

Descrizione dell'attività

Fase 1

Si consegnano agli studenti (individualmente o a gruppi) una cartina dell'isola d'Elba e alcuni fogli di carta da lucidi con 3 tipi di quadrettature diverse, in modo che gli studenti misurino la superficie dell'isola utilizzando le 3 quadrettature, contando (ed eventualmente colorando) i quadretti che sono completamente contenuti nell'isola e quelli che sono parzialmente nell'isola e parzialmente nel mare (questi ultimi devono essere aggiunti ai precedenti).
L'attività può anche essere svolta con l'intera classe utilizzando la LIM (Lavagna Interattiva Multimediale): è possibile proiettare una cartina dell'isola d'Elba e sovrapporre, come in quanto descritto sopra, tre diverse quadrettature.
Un esempio delle possibili "quadrettature" è riportato di seguito.

Figura 1 – Cartina dell'Isola d'Elba con il quadrettato 1

Figura 2 – Cartina dell’Isola d’Elba con il quadrettato 2

Visualizza l'immagine con Geogebra (file allegato figura2)

Figura 3 – Cartina dell’Isola d’Elba con il quadrettato 3

Il risultato delle tre misure sarà espresso in termini di quadretti completamente contenuti e quadretti sovrapposti all’isola anche parzialmente (che abbiano intersezione non vuota con la mappa dell’isola). Quindi per ognuna delle quadrettature ci saranno due “misure”: una per difetto e una per eccesso. Si raccolgono i dati dei vari gruppi di lavoro e si analizzano e discutono con tutta la classe.
Prendendo in considerazione le quadrettature completamente contenute nella mappa nei tre casi si può chiedere quale delle tre approssima meglio la superficie dell’isola. Si può poi condurre ad un’osservazione analoga con riferimento alle quadrettature che, nei tre casi, sono sovrapposte all’isola completamente o parzialmente. In ognuno dei tre casi contando il numero dei quadretti si hanno due “misure”, una per difetto e una

per eccesso, ma con riferimento a tre unità di misura diverse, quadrati tra loro diversi. Dopo aver condotto gli studenti a percepire la necessità di una unità di misura standard si può associare ad ogni quadrato la misura della sua area in cm^2 oppure in mm^2. Si conducono dunque gli studenti a notare come sia ora possibile confrontare le tre stime e scegliere quella più soddisfacente e, facendo leggere i dati relativi alla scala presenti sulla mappa proposta, a trasformare le loro stime in km^2.
Può infine essere interessante confrontare la stima migliore ottenuta con la misura letta su un atlante geografico o ottenuta con una ricerca in rete.

Visualizza l'immagine con Geogebra (file allegato figura3)

Fase 2
Si consegna agli studenti una scheda, preparata dall'insegnante, che consenta di misurare la superficie di alcune figure in modo diretto e che conduca a prendere in considerazione metodi più rapidi per determinare l'area di una superficie, come quello indiretto attraverso formule. Si può per esempio proporre la misura della superficie del pavimento dell'aula o altre attività simili. Si arriva quindi alla giustificazione della formula dell'area di un rettangolo tramite esempi in cui le misure della base e dell'altezza sono espresse da due numeri naturali rispetto alla stessa unità di misura. L'importante è sottolineare alla classe che ricorrere a una formula - ad esempio, la formula dell'area del rettangolo, A=bxh - equivale spesso a utilizzare un metodo indiretto di misura.

Fase 3
Si consegna agli studenti una scheda, preparata dall'insegnante, che consenta di misurare la superficie di alcune figure in modo diretto e che conduca a prendere in considerazione metodi più rapidi per determinare l'area di una superficie, come quello indiretto attraverso formule. Si può per esempio proporre la misura della superficie del pavimento dell'aula o altre attività simili. Si arriva quindi alla giustificazione della formula dell'area di un rettangolo tramite esempi in cui le misure della base e dell'altezza sono espresse da due numeri naturali rispetto alla stessa unità di misura. L'importante è sottolineare alla classe che ricorrere a una formula - ad esempio, la formula dell'area del rettangolo, A=bxh - equivale spesso a utilizzare un metodo indiretto di misura.

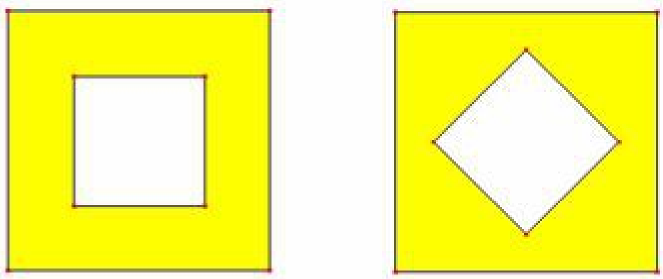


Figura 4

Visualizza l'immagine con Geogebra (file allegato figura4)

Si propongono agli allievi attività di laboratorio (con l'uso di un software di geometria) sull'equiscomponibilità dei poligoni per giustificare le principali formule per le aree. Ulteriori approfondimenti si possono proporre sulla determinazione dell'area per poligoni "non standard".

Fase 4

Prima di affrontare l'area del cerchio, è opportuno verificare che la classe conosca il valore del rapporto costante tra una circonferenza e il suo diametro, dato dal numero irrazionale π. Qualora non fosse noto agli studenti, occorre affrontare il concetto tramite una esperienza significativa. Per introdurre l'argomento l'insegnante propone agli studenti la lettura del seguente passo del libro L'uomo che sapeva contare di Malba Tahan, per porre il problema della misura della circonferenza.

…la domanda fu questa: "È possibile per un esperto geometra trovare l'esatto rapporto tra la circonferenza e il diametro del cerchio? Così rispose l'Uomo che Contava: "Non è possibile calcolare esattamente una circonferenza, pur conoscendone il diametro. Il rapporto tra le due misure è un numero ben determinato, ma non siamo in grado di conoscerne il vero valore. Gli antichi cultori dell'astrologia credevano che la circonferenza fosse tre volte il diametro, ma le cose non stanno così. Archimede il greco trovò che, se la misura della circonferenza è di 22 cubiti, il suo diametro deve misurarne circa 7. Ma i matematici indiani non sono d'accordo, e il grande al-Kwarizmi ha affermato che la regola di Archimede è ben lungi dall'essere esatta". E Beremiz, rivolgendosi al sapiente con il naso camuso, così concluse: "Questo numero è in realtà avvolto dal mistero, e Allah solo potrebbe svelarne le occulte qualità". da *Quadrature*, in L'uomo che sapeva contare, di Malba Tahan, pp. 82-84.

L'insegnante sottolinea come questo numero fondamentale abbia una storia di origine "costruttiva": quanto deve essere lungo il raggio per costruire la circonferenza di una data lunghezza?

Questo è il problema che probabilmente si pose l'abile artefice fenicio Chiram - di cui parla la *Bibbia* (*Primo libro dei Re*) - per edificare una grande vasca circolare di bronzo all'interno del Tempio di re Salomone.

"*Era dotato di grande capacità tecnica, di intelligenza e di talento, esperto in ogni genere di lavoro in bronzo. Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti.*" (Primo libro dei Re, 7, 23).

Per la *Bibbia*, dunque, π è uguale a 3: questa risulta essere la prima approssimazione del suo valore di cui abbiamo testimonianza. Per collocare da un punto di vista storico questa valutazione di π è opportuno che gli alunni sappiano che Salomone ha regnato dal 970 al 931 a.C. circa.

L'insegnante propone agli studenti, precedentemente divisi in piccoli gruppi, una fase operativa, di seguito riportata, perché attraverso l'esperienza concreta della misura possano constatare quali difficoltà si incontrano nel definire π.

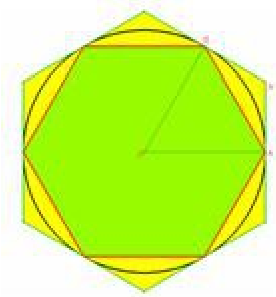
Si invitano gli studenti a misurare il diametro e la lunghezza della circonferenza di alcuni barattoli di dimensioni diverse e si chiede di completare le prime due colonne della seguente tabella.

d [cm]	circonferenza [cm]	
...	...	...
...	...	...
...	...	...
...	...	...

Il docente con opportune domande-stimolo deve orientare la discussione sulla ricerca di un rapporto significativo tra le due grandezze esaminate. Le domande stimolo potrebbero essere: cosa accade alla lunghezza della circonferenza quando la lunghezza del diametro aumenta? E quando diminuisce? Se si divide la lunghezza della circonferenza per la lunghezza del diametro quali valori si inseriscono nella terza colonna della tabella? Che cosa si osserva? Come variano i rapporti ottenuti? Che relazione c'è tra la circonferenza e il diametro? Le difficoltà legate al calcolo e alle inevitabili incertezze sperimentali possono essere discusse eventualmente proponendo di calcolare la media dei rapporti. Si propone di simulare la medesima esperienza mediante un software di geometria dinamica in cui si varia opportunamente il diametro di una circonferenza. Tuttavia, in questo caso, il software fornisce sempre lo stesso valore approssimato; si può comunque variare il numero di cifre visualizzate per tale rapporto. Si possono tabulare i valori e riportarli in un foglio elettronico visualizzando la dipendenza lineare.

Fase 5

In questa fase si propone agli studenti un'attività di laboratorio con l'uso di un software di geometria dinamica, in cui gioca un ruolo cruciale la costruzione dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza.



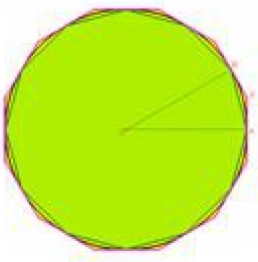


Figura 5 e Figura 6 – Dall'esagono regolare al dodecagono regolare.

Visualizza l'immagine con Geogebra (figura5)
Visualizza l'immagine con Geogebra (figura6)

Tali poligoni sono facilmente costruibili con un software, a partire dall'esagono regolare inscritto, per arrivare al poligono regolare di 96 lati, in modo da ripercorrere il procedimento di Archimede. Qualora non fosse possibile ottenere con la primitiva "Poligono regolare" (presente in tutti i software di geometria) questo numero di lati, se ne può comunque raddoppiare il numero.

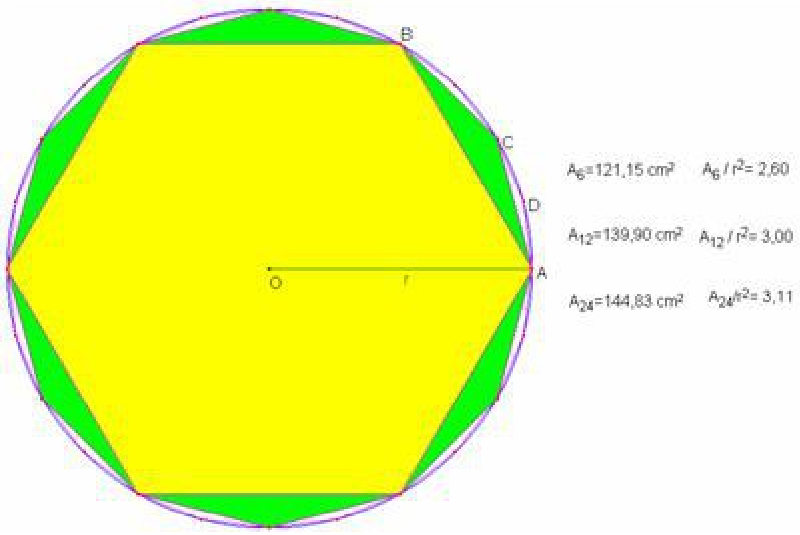


Figura 7 – I primi tre passi del procedimento di Archimede (n = 6, 12 e 24 lati)

La costruzione dell'asse di un lato del poligono regolare (ad es. di 24 lati) permette di raddoppiare il numero dei lati del poligono regolare e tale procedimento può essere iterato fino al numero voluto di lati (in Archimede, fino a 96 lati).

Figura 8 – Il passo successivo di Archimede (poligono regolare di 48 lati)

Ad ogni passo, si chiede di far calcolare al software i valori dell'area del poligono regolare An e l'area del quadrato di lato r, tabulando tali valori su tre colonne: il numero dei lati del poligono regolare, l'area del poligono regolare e r^2, quindi di determinare il rapporto A_n/r^2.

N	A_n	A_n/r^2
6		
12		
...		

L'obiettivo dell'attività è far intuire agli studenti che, all'aumentare del numero dei lati del poligono regolare, questo si avvicina sempre di più al cerchio, e inoltre il rapporto tra l'area An del poligono regolare e l'area del quadrato di lato r si avvicina al numero π.

Un modo intuitivo di presentare questa attività è quello di trasformare il cerchio in un triangolo, tramite un'esperienza percettiva che fa uso di materiale come: rotolo di carta per le calcolatrici, oppure stelle filanti di carnevale, oppure un nastro per serrande (come in figura 9). Si taglia il rotolo di carta lungo un raggio e si distendono gli archi su un piano, come nella figura. Che cosa si ottiene? La figura assomiglia ad un triangolo di base la circonferenza ed altezza il raggio.

Figura 9 - da Emma Castelnuovo, Laboratorio di Cenci

Tagliando lungo un raggio AO e distendendo le strisce di nastro in orizzontale, si ottiene un triangolo che ha per base la circonferenza e altezza il suo raggio. Quindi l'esperienza suggerisce che l'area del cerchio è data da

$$A = \frac{Circonferenza \cdot raggio}{2} = \frac{C \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

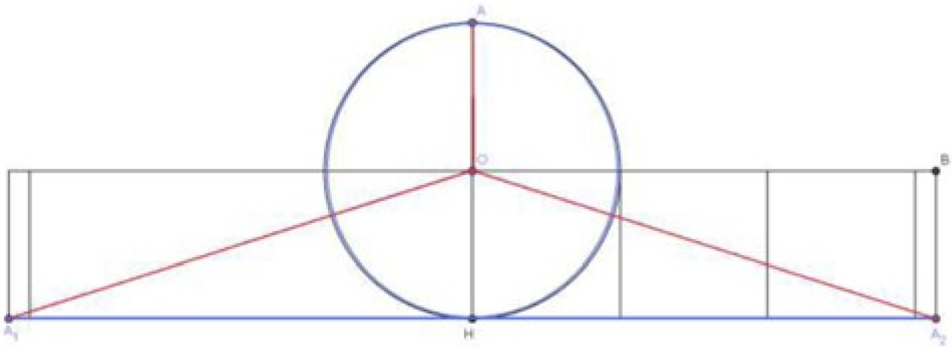


Figura 10

La stessa esperienza si può simulare con un software di geometria dinamica (figura 11).

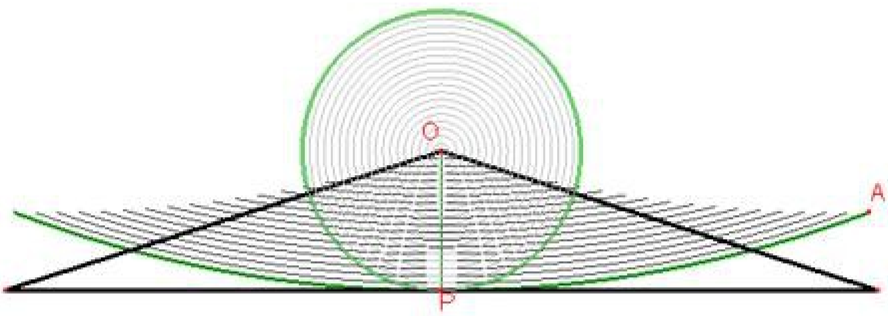


Figura 11 – Trasformazione del cerchio in un triangolo

Si può anche ricordare la Proposizione I dalla Misura del cerchio di Archimede, da *Opere di Archimede*, a cura di Attilio Frajese, UTET, Torino, 1974, pag. 225):
Ogni cerchio è uguale ad un triangolo rettangolo se ha il raggio uguale ad un cateto [del triangolo] e la circonferenza uguale alla base [=all'altro cateto].

Un altro modo di visualizzare la situazione e favorire l'intuizione geometria, è quello di usare un'animazione (creata con Cabri oppure GeoGebra).

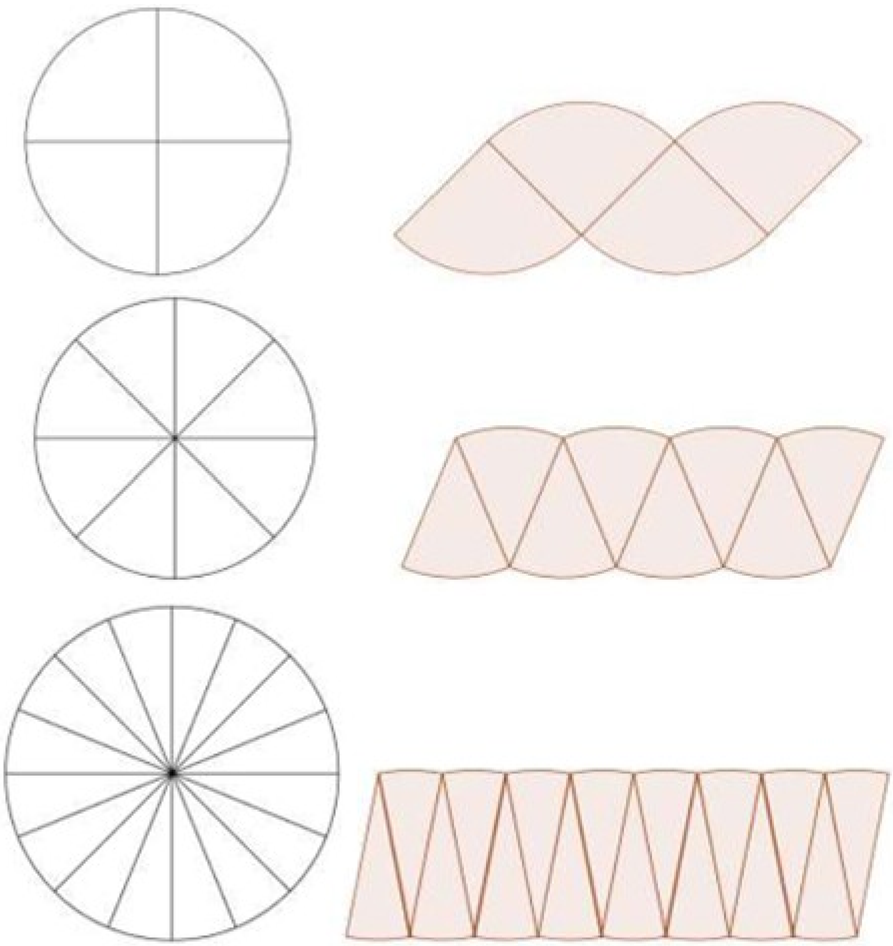


Figura 12 – Il cerchio "che si rettangola"

Tale "dimostrazione" si può anche realizzare materialmente con un disco di carta, tagliandolo in "fette" uguali (settori circolari non segmenti) secondo le potenze di 2 (si inizia con quattro parti uguali, poi otto, sedici, e così via).

Indicazioni metodologiche

Questa attività ripercorre in forma laboratoriale argomenti noti e non noti agli allievi allo scopo di consolidare nozioni già apprese - ma non sempre in modo percettivo-sperimentale - così da giustificare le note formule per il calcolo delle superfici dei poligoni.

L'approccio iniziale avviene tramite approssimazioni per eccesso e per difetto di aree non altrimenti calcolabili. L'attività di gruppo e in coppia può servire a comprendere l'efficacia del metodo e le difficoltà connesse alla misura. Questo diventa il "trampolino di lancio" per ripercorrere il metodo seguito da Archimede per determinare la sua ben nota approssimazione per l'area del cerchio, con l'uso di un software di geometria dinamica.

Durante il percorso eventualmente si recupera quanto gli allievi già conoscono sul numero π proponendo un approccio storico-sperimentale alla sua determinazione. L'attività può svolgere la duplice funzione di ripasso sperimentale di concetti noti e un primo approccio alla misura delle aree in modo non elementare. Particolare attenzione si può porre alla correttezza del linguaggio, precisando il differente significato dei due termini: superficie e area.

Eventuali difficoltà e suggerimenti

Fase 1

La scelta di calcolare l'area di un'isola, quale l'isola d'Elba, può risultare complessa e difficile da proporre con l'alto rischio di demotivare gli alunni. È evidente, che il punto di forza dell'attività è l'approccio diretto al calcolo dell'area che, basandosi sul significato di "misurare", ricerca operativamente la misura da associare a un'area in termini di "numero di quadrati necessari per ricoprirla" (*Dizionario di Matematica Elementare*, di Stella Baruk, ed. italiana a cura di F. Speranza e L. Grugnetti, Bologna, 1998, pp. 38-40). In tal senso un lavoro propedeutico a quello dell'Isola d'Elba può essere la misura dell'area di una superficie piana "più" regolare oltre che più vicina al vissuto della classe, come ad esempio l'area del giardino che circonda la scuola; tuttavia, non si può prescindere da un percorso di misurazione diretta come quello proposto, mediante l'uso di un regolo non convenzionale, quale il quadrato, per giungere gradualmente all'unità di misura convenzionale. A tal proposito, l'uso frequente e inconsapevole del metro quadrato come unità di misura di un'area comporta non poche difficoltà nel confronto con unità di misura differenti. In tal senso si consiglia di avviare semplici attività di lettura di carte geografiche che generalmente evidenziano una griglia, esattamente quella ottenuta mediante meridiani e paralleli. Ricercare le dimensioni di un quadrato del reticolato può risultare sufficiente a far emergere la frequente scelta del metro quadro come unità di misura e a giustificare la "necessità" di una unità di misura più "comoda". Il confronto con i dati ricavabili su una cartina può risultare difficile per gli studenti che non hanno ben assimilato i rapporti in scala e, quindi, le proporzioni. Può essere utile organizzare preliminarmente una serie di attività così da colmare eventuali lacune o semplicemente consolidare aspetti legati alla teoria delle proporzioni. Occorre scegliere contesti reali, concreti e familiari per intrecciare, se ancora non è evidente, le proporzioni alla realtà. A tal proposito si può proporre alla classe attività di semplice rilettura di modelli rispetto alla riduzione in scala assegnata come, ad esempio, la stessa mappa della classe esposta in tutte le classi per regolamento; oppure, altrettanto interessante potrebbe essere la costruzione di schede tecniche di alcuni oggetti presenti in classe quali librerie e scrivanie. L'idea è quella di riportare in classe un vissuto ormai molto frequente quale l'acquisto di complementi di arredo in esercizi commerciali che consentono all'utente di scegliere tra svariate combinazioni dei loro prodotti quella più adatta alle proprie esigenze basandosi su schede tecniche di "facile lettura". L'attività in coppie tutor-tutee può consentire un più facile intervento di recupero sul linguaggio. Per gli allievi in difficoltà questo approccio può essere più che sufficiente senza dover troppo forzare sulle proprietà delle proporzioni spesso applicabili solo in pochi contesti, a volte pretestuosi e poco legati alla realtà.

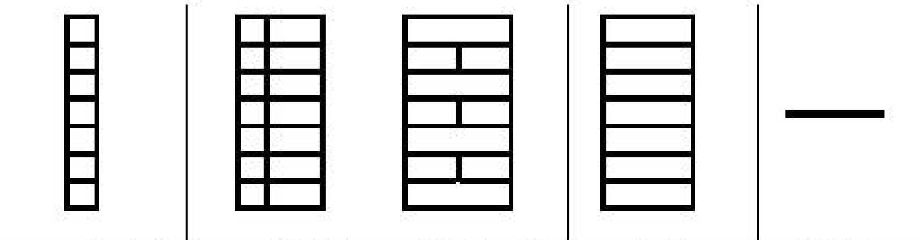
Fase 2

L'attività proposta potrebbe risultare difficile per gli studenti che hanno ancora difficoltà nel calcolo letterale non tanto rispetto alla semantica quanto rispetto alla sua sintassi. È evidente che l'attività si presta a differenti livelli di intervento. Rispetto a forti carenze sul perché "si usano lettere", occorrerebbe predisporre preliminarmente attività di lettura di depliant turistici, di schede esplicative di opportuni elettrodomestici in modo da dare significato, partendo dalla loro realtà, al linguaggio letterale. Si può anche ricorrere all'uso di un foglio elettronico, dato che questo "obbliga" in modo molto naturale a far riferimento a numeri mediante formule di tipo "letterale".

Ad esempio, si può presentare alla classe il listino prezzi di una libreria componibile con un preventivo (come in figura 13) chiedendo di interpretare i dati. Si può, quindi, chiedere ai ragazzi di costruire preventivi individuali o di gruppo consultando il listino e ideando combinazioni personalizzate. Sarà, in particolare, l'esposizione ai compagni dei vari preventivi a sottolineare la necessità di un linguaggio simbolico condiviso e "sintetico".

Listino prezzi Libreria **CATALIBR**

*Per **cata**logare i **libri** a modo tuo*



Cata flu Codice: **CL123** 40×250×25	**Cata big** Codice: **CL 220** 70×250×25	**Cata double** Codice: **CL 250** 100×250×25	**Cata large** Codice: **CL125** 70×250×25	**Cata linear** Codice: **CLM12** 70×5×25
Marrone-nero	Marrone-nero	Marrone-nero	Marrone-nero	Marrone-nero
€ 35 /pz.	€ 100/pz.	€ 110/pz.	€ 70/pz.	€ 10/pz.
Possibile anche bianco laccato Codice: **CL 124** Con aumento di €10	Possibile anche bianco laccato Codice: **CL 221** Con aumento di €25	Possibile anche bianco laccato Codice: **CL 251** Con aumento di €30	Possibile anche biancolaccato Codice: **CL 126** Con aumento di €25	

PREVENTIVO n. 239390523

Codice	Nome Articolo	Q.tà	Pr. Unit.	Cod. IVA	Prezzo
CL123	Cata Flu	2	35	0	70,00
CL251	Cata Double	1	110	0	140,00
CLM12	Cata Linear	2	10	0	20,00
				Totale Netto:	230,00
				IVA	0,00
				Totale	230,00

Figura 13

In un percorso già avviato sul calcolo letterale potrebbe fungere da utile strumento per verificare che vi sia un pieno equilibrio tra "la capacità di operare con formule algebriche" e "la capacità di utilizzare il linguaggio algebrico in differenti situazioni". Potrebbe essere utile lavorare con gruppi tutor-tutee per poter operare a livello meta cognitivo con i tutor e cognitivo con i tutee utilizzando un ulteriore mediatore che può essere il linguaggio informale del "compagno-insegnante". È evidente che l'attività consente di giustificare l'esistenza di formule algebriche quadratiche in termini di formule atte al calcolo indiretto di aree; risulterebbe, analogamente interessante avviare un'attività che permetta di giustificare in termini "geometrici" formule algebriche lineari collegandole al perimetro di figure piane permettendo una necessaria discussione sul significato di una semplice espressione lineare quale ad esempio 3x. Non si può prescindere da tale passaggio per evitare che si crei (o che continui a permanere) l'idea che ad ogni formula possa risultare la modellizzazione di una e una sola situazione reale.

Fase 3

L'equiestensione e l'equiscomponibilità sono centrali nell'attività proposta seppur risultino non di facile percezione per molti studenti. Si consiglia di non trascurare la manipolazione rispetto alla simulazione mediante comuni e validi software di geometria dinamica che può consentire una più immediata percezione delle principali conseguenze di questi due concetti. Si consiglia di analizzare un'altra attività presente in piattaforma con un percorso alternativo su tali concetti: *Dal tangram alle tassellazioni del piano*.

Fase 4

Il percorso descritto sul numero π è stato pensato esattamente in termini di "recupero" o di "costruzione attiva" di un concetto che per essere ben compreso richiede un livello di astrazione non trascurabile. L'attività laboratoriale proposta non appare difficile da un punto di vista cognitivo, tuttavia non è da sottovalutare l'uso stesso della calcolatrice che "filtrerà parzialmente" l'esito delle divisioni e proporrà agli studenti valori di π decisamente "inusuali", seppur corretti. L'approccio sperimentale del resto comporta la necessità di approfondire il significato di misura reale e, in tal caso, la necessità di operare con numeri reali. Inevitabilmente per proseguire con l'attività servirà esplicitare le regole di approssimazione e, a posteriori, di rilettura di un valore approssimato. Ulteriore aspetto che implicitamente sottende l'attività (e che diventa esplicito nella fase 5) riguarda il ruolo della circonferenza, e in particolare della circonferenza che "io ho disegnato". Inevitabilmente, quindi, le questioni legate alle similitudini e alle circonferenze simili, emergono e risultano fondamentali nel percorso intrapreso. In tal senso può essere utile analizzare un'altra attività proposta in piattaforma relativamente al cerchio per la Scuola Secondaria di I grado. Una accurata discussione collettiva, può essere in tal caso importante per riprendere il concetto di similitudine (noto sin dalle scuole secondarie di primo grado) evidenziandone alcune proprietà facendo opportunamente emergere possibili misconcetti.

Spunti per un approfondimento disciplinare

Come approfondimento, si propone un metodo per determinare l'area di un segmento parabolico.
Si chiede agli studenti di determinare la misura dell'area sottesa da un ramo di parabola nel piano cartesiano, con vertice sull'asse y e concavità verso il basso (di equazione $y= -x^2+c$). Ci si aspetta che gli allievi usino quadrettature o rettangoli inclusi e includenti. Tramite una discussione l'insegnante potrà veicolare l'utilizzo dei rettangoli.
Le misure con i rettangoli variano in funzione dell'ampiezza della loro base, diventando sempre più precise al diminuire di tale ampiezza. La stessa attività precedente, se svolta sfruttando le potenzialità del piano cartesiano, offre la possibilità di valutare l'area di un segmento parabolico non solo ripercorrendo procedimenti analoghi ai precedenti mediante quadrettature con i lati che via via si dimezzano, ma anche utilizzando opportuni rettangoli con le ampiezze delle basi sempre più piccole e con le altezze opportunamente calcolate con la funzione parabola. Obiettivo è di cambiare le basi dei rettangoli e ottenere approssimazioni per difetto e per eccesso via via migliori dell'area, osservando che due valutazioni relative a rettangoli con la stessa base differiscono sempre di meno al dimezzarsi delle basi dei rettangoli e che la valutazione dell'area tende a raggiungere i 2/3 dell'area del rettangolo in cui è inscritta. Per realizzare ciò si può ricorrere anche ad un foglio elettronico per agevolare i calcoli o direttamente a un programma di geometria dinamica (come ad esempio GeoGebra o Cabri). La seguente figura può indicare un esempio di come arrivare alla valutazione dell'area di un segmento parabolico.

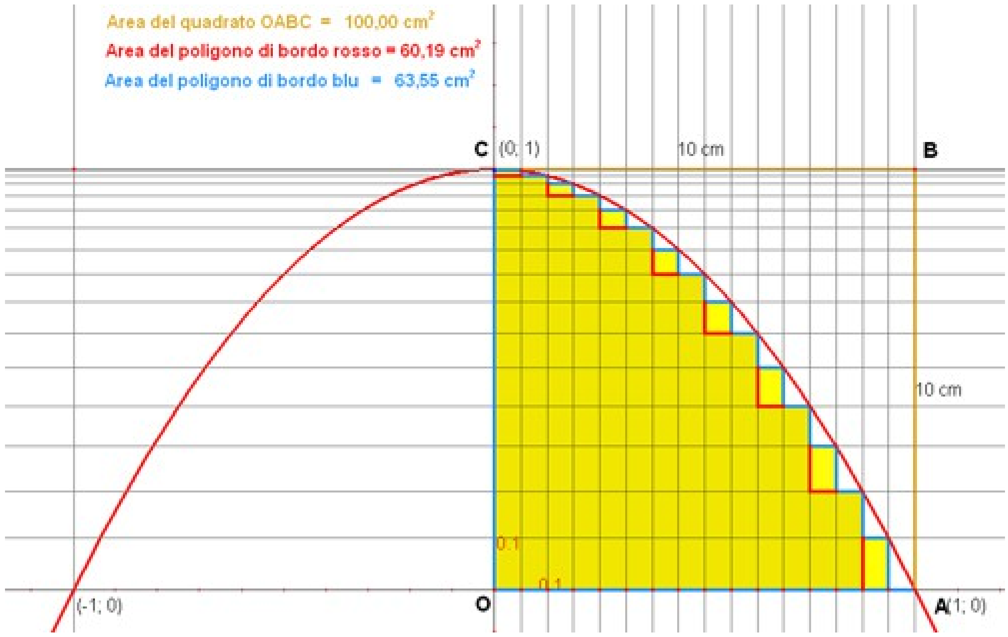
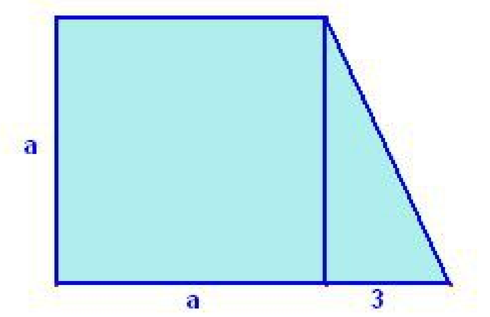


Figura 14

Tale risultato ha un fondamento storico nelle opere di Archimede (*Quadratura della parabola*, dalle Opere di Archimede, a cura di Attilio Frajese, UTET, Torino, 1974, pag. 471 e seguenti). Si può anche leggere in classe, su questo argomento, qualche passo dell'appassionante libro di Reviel Netz e William Noel, *Il codice perduto, La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici*, Milano, 2007 (si veda a pag. 210, dove è riportato in modo discorsivo il problema dell'area di un segmento parabolico). In classe si può quindi procedere a una "istituzionalizzazione" collettiva dei risultati trovati (docente e studenti) tramite una ricerca su libri e internet su: Archimede e l'area del segmento parabolico (contestualizzazione storica), equazione della parabola e invarianza del rapporto tra area del segmento parabolico e area del rettangolo in cui è inscritto (contestualizzazione epistemologica).

Elementi per le prove di verifica

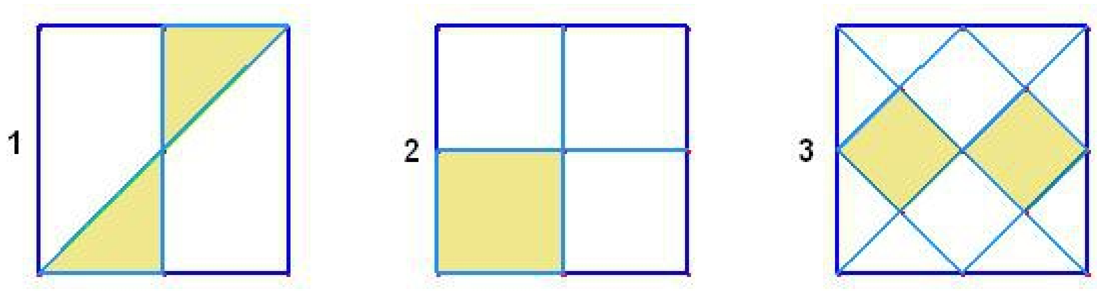
1. Prova di Matematica INVALSI 2009 (Esame di Stato Scuola secondaria di I grado) - Domanda 18.

Scrivi la formula che esprime come varia l'area A della figura qui a fianco, al variare della lunghezza a. A= _________________	

Visualizza l'immagine con Geogebra (es_figura1)

2. Giochi di Archimede - Gara del Biennio - 4 dicembre 1996 - Quesito 6.

I tre quadranti del disegno hanno lo stesso lato. In che rapporto stanno le aree delle tre figure ombreggiate?



(A) La prima area è maggiore delle altre due.
(B) La seconda area è maggiore delle altre due.
(C) La terza area è maggiore delle altre due.
(D) La prima area è uguale alla seconda ed entrambe sono maggiori della terza.
(E) Le tre aree sono uguali.

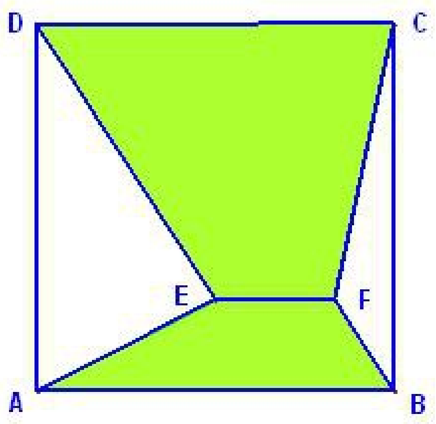
Visualizza l'immagine con Geogebra (es_figura2)

3. Giochi di Archimede - Gara del Biennio - 22 novembre 2006 - Quesito 11.

Dato un quadrato ABCD si uniscono i punti medi dei lati aventi un vertice in comune formando un nuovo quadrato EFGH. Ripetiamo la stessa operazione per EFGH e otteniamo un nuovo quadrato A'B'C'D'. Quanto vale il rapporto tra l'area di ABCD e l'area di A'B'D'C'?

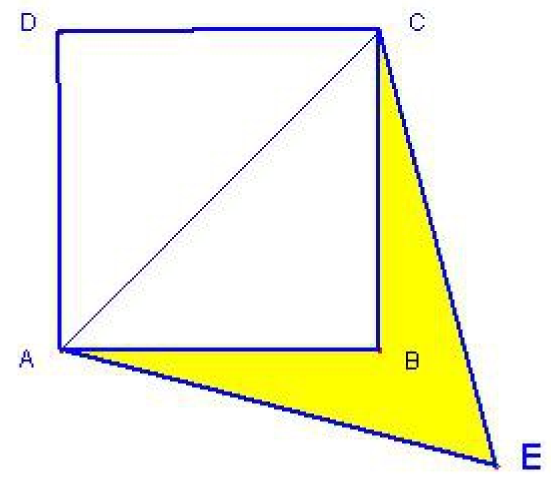
(A) 2   (B) $2\sqrt{2}$ (C) 4   (D) $4\sqrt{2}$ (E) 8

4. Giochi di Archimede - Gara del Biennio - 21 novembre 2007 - Quesito 11.

Il quadrato ABCD disegnato a fianco ha il lato lungo 3 m. Il segmento EF è lungo 1 m ed è parallelo ad AB. Quanto vale l'area dell'esagono ABFCDE? (A) $5m^2$ (B) $5{,}5m^2$ (C) $6m^2$ (D) $7m^2$ (E) $7{,}5m^2$	

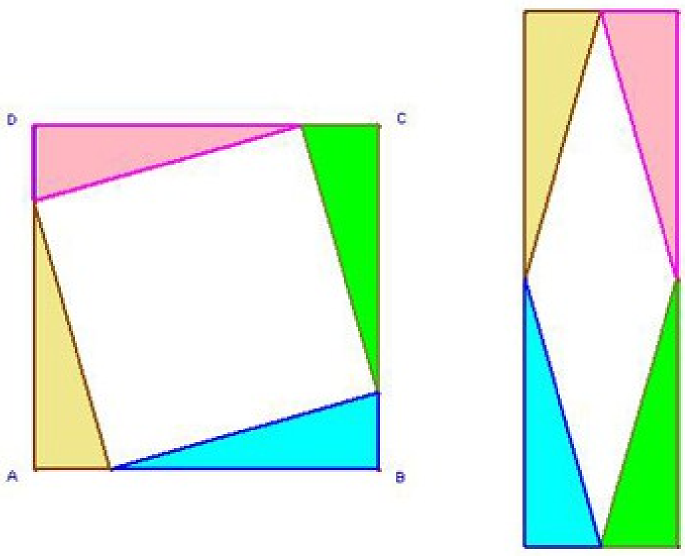
Visualizza l'immagine con Geogebra (es_figura4)

5. Giochi di Archimede - Gara del Biennio - 21 novembre 2007 - Quesito 15.

Nella figura a fianco ABCD è un quadrato avente la diagonale lunga 2 cm e AEC è equilatero. Quanto vale l'area del quadrilatero AECB? (A) $(\sqrt{2\sqrt{3}} - 2)$ cm² (B) $(\sqrt{3} - 1)$ cm² (C) $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$ cm² (D) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm² (E) $(2 + \sqrt{3})$ cm²	

Visualizza l'immagine con Geogebra (es_figura5)

6. Giochi di Archimede - Gara del Biennio - 21 novembre 2007 - Quesito 18.

Disponendo quattro triangoli rettangoli identici come nella figura di sinistra l'area del quadrato bianco è 17 m². Disponendoli invece come nella figura di destra, l'area del rombo bianco è 8 m². Quanto vale l'area del quadrato ABCD? (A) 19 m² (B) 24 m² (C) 25 m² (D) 32 m² (E) 36 m²	

Visualizza l'immagine con Geogebra (es_figura6)

Sito dell'INVALSI - Esempi di Prove PISA - Fascicolo 2-2009 - Domanda n. 52.

Figura 15 - La figura illustra una carta geografica dell'Antartide

Stima l'area dell'Antardide utilizzando la scala della carta geografica. Mostra il tuo lavoro e spiega come hai fatto la tua stima. (Puoi disegnare sulla carta se questo può aiutarti a fare la tua stima).

Scarica la versione cartacea degli esercizi (file allegato esercizi)

Altre attività con gli studenti

Uso di carte topografiche per determinare la superficie di un terreno, di una piazza, ecc. oppure della pianta dell'edificio scolastico per determinare la superficie dei vari locali.

Bibliografia

AA. VV., Matematica 2001. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola primaria. Scuola secondaria di I grado*.
AA. VV., Matematica 2003. *Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola secondaria di II grado*.
PISA 2003, *Valutazione dei quindicenni*, a cura dell'OCSE, Roma, Armando Armando, 2004. Stella Baruk, *Dizionario di Matematica Elementare*, ed. italiana a cura di F. Speranza e L. Grugnetti, Zanichelli, Bologna 1998.
Opere di Archimede, a cura di Attilio Frajese, UTET, Torino 1974 (si veda in particolare Misura del cerchio, pp. 213-231).
Reviel Netz, William Noel, *Il codice perduto, La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici*, Rizzoli, Milano, 2007 (si veda in particolare Rompicapi e numeri, p.88, Dimostrazione numero due. L'area di un segmento di parabola, ovvero il dominio della materia sulla mente, pp. 210-221).
Jean-Paul Delahaye, *L'affascinante numero π*, Ghisetti & Corvi Editori, Milano, 2003. David Wells, *Numeri memorabili. Dizionario dei numeri matematicamente curiosi*, Zanichelli, Bologna 1991.

Sitografia

Materiali UMI-CIIM

Invalsi – Ocse Pisa 2006

Invalsi – Ocse Pisa 2009

Proposta di attività

(da condividere e discutere in rete)
Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:
individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.
Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.
Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un diario di bordo (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà. Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.