La probabilità condizionata

Si è detto spesso (ed a ragione) che la valutazione di probabilità dipende essenzialmente dallo stato d'informazione, quindi la probabilità di un evento può variare subordinatamente al verificarsi di un altro evento, ad esso "collegato".

Facciamo un **Esempio**:

Carlo deve avere un compito scritto fra 4 giorni e si sente "abbastanza preparato e confidente sul buon esito dell'esame" (evento E). Ma l'esame è sempre una cosa da prendere con le molle e quindi non esclude l'evento E^c "l'esame non andrà bene". Pensa però che se facesse un colloquio con suo zio Harold, professore di un altro Liceo, si sentirebbe forse più confortato. Vediamo perchè: lui ha valutato, in qualche modo, $\mathbb{P}(E)$ ovvero la probabilità che l'esame vada bene. Se, dopo aver fatto il colloquio con lo zio, lo zio gli dice: "complimenti mi sembri ben preparato", allora $\mathbb{P}(E)$ è.... aumentata. Ma non è più la valutazione di probabilità precedente perchè abbiamo fatto una valutazione (di probabilità) in periodo di tempo diverso, ovvero in possesso di una ulteriore informazione.

In questo caso si può parlare di **probabilità condizionata** ad un altro evento ovvero ad un'altra informazione.

Facciamo un altro Esempio, questo tratto dal classico gioco dei dadi.

Nel lancio di un dado, la probabilità che esca il 2 è $\dfrac{1}{6}$. Se si sapesse, prima di vedere il risultato del lancio, che è *uscito un numero pari*, la probabilità che sia 2 "sale " a $\frac{1}{3}$, mentre se l'informazione fosse che è uscito un numero inferiore a 4, la probabilità sarebbe adesso $\frac{1}{4}$.

Definizione: Si definisce probabilità di un evento E condizionata (o subordinata) all'evento H, e si indica con $\mathbb{P}(E/H)$, la probabilità del verificarsi di E nell'ipotesi che H si sia verificato. Se H non si verifica, l'evento E/H non viene definito.

Nota Esempio sportivo. Sia E l'evento " l'Italia vince gli Europei contro la Spagna."

Allora $\mathbb{P}(E)$ aveva una valutazione (e gli scommettitori lo hanno dimostrato) ben precisa il giorno prima della partita (o due o tre giorni prima anche se subordinata all'ipotesi, ritenuta trascurabile, del fatto "se la la partita avesse avuto luogo"). Ma era del tutto subordinata ai risultati di due semifinali (Spagna Portogallo e Italia Germani) cinque giorni prima ed al risultato della seconda semifinale quattro giorni prima.

Facciamo notare che per valutare $\mathbb{P}(E))$ si è preso in considerazione l'universo S dei casi possibili (nell'impostazione classica); adesso, per ulteriori informazioni o per effetto di scelta, l'universo S si riduce al suo sottoinsieme H e quindi è in H che si debbono considerare i casi possibili.

Praticamente anche prima si valutava una probabilità subordinata ma subordinata all'evento certo S !

L'informazione restringe l'universo S a un suo sottoinsieme H.

Più esattamente, ogni evento può essere considerato condizionato. Se $H \neq \emptyset$, si può definire E/H come

- vero se, essendo vero H, è vero E;
- falso se, essendo vero H, è falso E;
- indefinito se H è falso.

Secondo l'impostazione classica si vede facilmente che se h sono i casi favorevoli al verificarsi dell'evento H, e k sono quelli favorevoli al verificarsi di $E \subset H$, la probabilità di E condizionato ad H risulta: $\frac{h}{k} = \mathbb{P}(E/H) = \frac{\mathbb{P}(E \cap H)}{\mathbb{P}(H)}$.

NOTA: Nel caso di uno spazio campionario finito e di eventi tutti equiprobabili, è facile verificare che la formula in oggetto discende dalla regola $\dfrac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}$, applicata agli eventi contenuti nel "nuovo" spazio campionario B.

Si pu dimostrare, che la $\mathbb{P}(E/H)$, appena definita, soddisfa alle regole di una probabilità.

Osserviamo che $\mathbb{P}(E/H)$ può essere minore, eguale, maggiore di $\mathbb{P}(E)$. Analogamente si può calcolare la probabilità di H condizionata ad E:

Importante è il caso in cui vale l'eguaglianza; precisamente si ha la seguente definizione:

Due eventi E e H si dicono **stocasticamente indipendenti** (ossia indipendenti dal punto di vista del calcolo delle probabilit), se: $\mathbb{P}(E \cap H) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(H)$.

Se questa relazione è vera, si deduce, con alcuni passaggi, che risulta pure $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H/E)$. La relazione d'indipendenza stocastica è simmetrica , cio se E è indipendente da H, anche H è indipendente da E.

Ovviamente le considerazioni fatte sopra perdono di senso qualora $\mathbb{P}(H) = 0$. Questo va d'accordo con l'intuizione: se si verifica un evento che aveva probabilità nulla, allora "può succedere di tutto".

Nota Il concetto di indipendenza stocastica è un concetto molto delicato e non coincidente con l'usuale concetto di indipendenza.

Ad es. gli eventi $A =$ " Carlo ha gli occhiali" e $B =$ " la mamma di Carlo gioca a scacchi" sono concetti "indipendenti" nel linguaggio comune. Nel linguaggio probabilistico dovremmo verificare che vale la relazione sopra descritta

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

I giocatori a carte della domenica pomeriggio possono facilmente verificare che gli eventi $A =$ " essere carta di Picche" e $B =$ "essere Asso" sono indipendenti se si gioca a bridge ma non lo sono se si gioca a canasta !

Esempio Si estraggono 2 carte da un mazzo da 40 senza restituzione. Qual è la $\mathbb{P}\{$ entrambe le carte siano Re $\}$. ?

Siano $H = \{$ prima carta Re $\}$ e $E = \{$ seconda carta Re $\}$. Allora $\mathbb{P}(H \cap E) = \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(E/H) = \frac{1}{10}\frac{3}{39} = \frac{1}{130}$ (avendo supposto l'equiprobabilità !)

Esempio Gli eventi A/B e B/A possono essere molto diversi. Ad es. poniamo $A = \{$ essere un abitante di Firenze (nel 2006) $\}$, $B = \{$ essere capocannoniere della Serie A di calcio (nel 2006) $\}$.

Allora si vede che $\mathbb{P}(A/B) \approx 1$, $\mathbb{P}(B/A) \approx 0$.

NOTA: Tale formula può essere utilmente, per altre applicazioni, letta anche come: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(B/A)$.

Esempio Si lanciano contemporaneamente due dadi. Consideriamo i seguenti eventi: $E = \{$ i due numeri sono diversi tra di loro $\}$ ed $H = \{$ i due numeri sono entrambi pari $\}$, calcolare le probabilità $\mathbb{P}(E/H)$ e $\mathbb{P}(H/E)$.

Innanzitutto abbiamo : $\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(E^c) = 1 - \dfrac{6}{36} = \dfrac{5}{6}$.

$\mathbb{P}(H) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4} \quad \mathbb{P}(E \cap H) = \mathbb{P}(H \cap E) = \dfrac{1}{6}$. Pertanto: $\mathbb{P}(E/H) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap H)}{\mathbb{P}(H)} = \dfrac{2}{3}$. $\mathbb{P}(H/E) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap H)}{\mathbb{P}(E)} = \dfrac{1}{5}$.

FORMULA DI BAYES

La formula seguente è quella più nota nell'ambito della probabilità condizionata.

Da $H = H \cap \Omega = H \cap (E \cup E^c) = (H \cap E) \cup (H \cap E^c)$ segue:

$\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(H \cap \ E) + \mathbb{P}(H \cap E^c) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(H/E) + \mathbb{P}(E^c)\mathbb{P}(H/E^c)$.

La formula $\mathbb{P}(E/H) = \frac{\mathbb{P}(E \cap H)}{\mathbb{P}(H)}$ diventa:

$$\mathbb{P}(E/H) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(H/E)}{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(H/E) + \mathbb{P}(E^c)\mathbb{P}(H/E^c)}$$

(formula o **teorema di Bayes**).

Esempio

Sia $E = \{$ lancio 6 volte una moneta ed ottengo sempre Testa $\}$ scegliendone una da un'urna con 10 monete, una delle quali con 2 Teste (evento H). Qual è la probabilità $\mathbb{P}(H/E)$, ovvero di avere pescato la moneta truccata ?

Si ha $\mathbb{P}(H/E) = \dfrac{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(E/H)}{\mathbb{P}(H)\mathbb{P}(E/H) + \mathbb{P}(H^c)\mathbb{P}(E/H^c)} =$

$$= \frac{1 \times \frac{1}{10}}{1 \times \frac{1}{10} + \frac{1}{2^6} \times \frac{9}{10}} = \frac{64}{73}.$$

NOTA : $\mathbb{P}(H) = \frac{1}{10}$ diventa $\mathbb{P}(H/E) = \frac{64}{73}$ in seguito all'informazione '6 Teste'.

Esempio È noto che 10 volte su 100 un lotto di 50 pezzi contiene o pezzi tutti difettosi (evento H) oppure un solo pezzo difettoso. Calcolare la probabilità che effettuando una sola estrazione si trovi un pezzo difettoso (evento D).

Dai dati del problema ricaviamo : $\mathbb{P}(H) = 0.1$ ed inoltre $\mathbb{P}(D/H) = \mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(D/H^c) = \dfrac{1}{50}$. Pertanto, applicando la formula di Bayes otteniamo : $\mathbb{P}(H/D) = \dfrac{\mathbb{P}(D/H)\mathbb{P}(H)}{\mathbb{P}(D/H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(D/H^c)\mathbb{P}(H^c)} = \dfrac{50}{59}$.