Tassellazioni del piano

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie. Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà. Ampiezza degli angoli.	<u>Spazio e figure</u> Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Scienze

Contesto
Configurazioni geometriche nel piano.

L'attività viene proposta nel primo biennio, nella classe prima, e riguarda un'utilizzazione particolarmente significativa delle isometrie del piano in un contesto motivante quale quello delle configurazioni geometriche del piano.
Gli studenti devono conoscere la definizione di poligono regolare. Inizialmente si tratta di scoprire che il piano si può tassellare con tre tipi di poligoni regolari: il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare (Figura 1). Dato poi un triangolo qualsiasi come "piastrella", sarà facile scoprire che si può sempre piastrellare il piano con esso. Si proporrà poi il caso dei quadrilateri e successivamente quello di altri semplici poligoni. La tassellazione del piano mediante poligoni fornisce anche un esempio di problema che ha una facile formulazione, ma che può portare a molti approfondimenti. Su questo argomento, addirittura, ci sono ancora diversi problemi irrisolti nella ricerca matematica. È un esempio di attività in cui lo studente può usare concretamente le trasformazioni isometriche del piano e anche rendersi conto della loro importanza nella risoluzione di un problema. L'obiettivo è quello di scoprire proprietà invarianti in certe configurazioni geometriche. L'argomento si presta facilmente a un collegamento interdisciplinare con il Disegno, la Storia dell'arte e le Scienze e ha diversi legami con il mondo reale.

Descrizione dell'attività
<u>Fase 1</u>
Inizialmente si presenta il problema di tassellare il piano con un poligono regolare analizzando esempi tratti dal mondo reale: i favi delle api, i pavimenti delle case, ….
Si osserva che tutti gli elementi della tassellazione sono uguali, ogni elemento aderisce perfettamente all'altro senza lasciare neanche il più piccolo spazio e non c'è sovrapposizione tra gli elementi.
L'attività procede con un software di geometria in cui siano presenti gli "strumenti" traslazione, simmetria centrale, rotazione; in questo modo l'argomento assume un aspetto più costruttivo e la rapidità nell'esecuzione dei disegni è maggiore, oltre a poter esplorare in modo dinamico tantissime

situazioni concrete. In alcune tassellazioni occorre individuare le traslazioni (e quindi i vettori) che caratterizzano un fregio oppure le simmetrie centrali che caratterizzano una data composizione. In questo contesto si possono usare, con riferimento a situazioni concrete, alcune semplici nozioni riguardanti la somma di due vettori e il multiplo di un vettore.

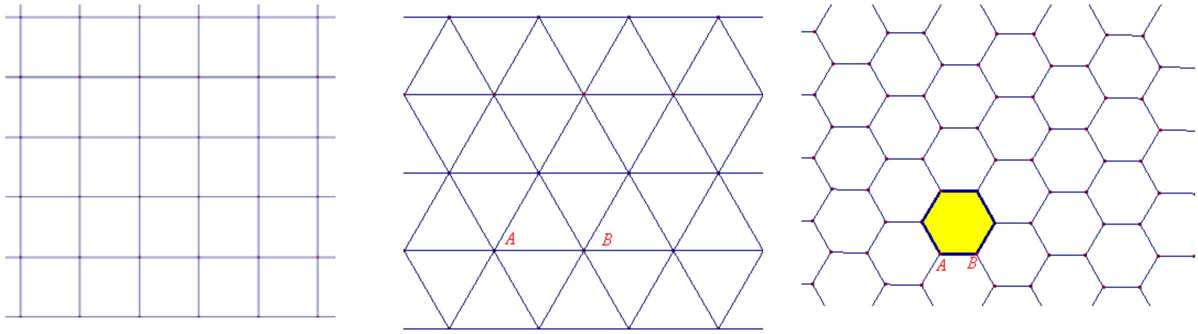

Figura 1

Fase 2

Si propongono inizialmente delle schede di lavoro guidato per gli studenti nelle quali si chiede di individuare le tassellazioni del piano tramite poligoni regolari, un solo tipo per volta, con l'obiettivo di far scoprire che le uniche tassellazioni possibili del tipo richiesto sono quelle fatte con il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare.

Successivamente si chiede se è possibile tassellare il piano con triangoli e quadrilateri qualunque. Si scoprirà che questa pavimentazione del piano è possibile con qualunque triangolo e con qualunque quadrilatero non intrecciato. Nella figura 2 è rappresentata una tassellazione del piano proposta agli allievi: si disegna un triangolo ABC e il punto medio di un lato, ad esempio BC. Si chiede agli allievi di procedere nel disegno dei primi passi della tassellazione e di descrivere il procedimento seguito.

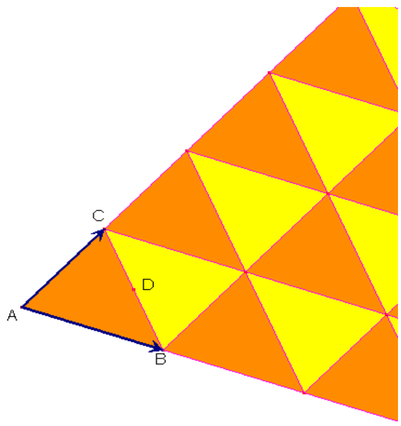

Figura 2

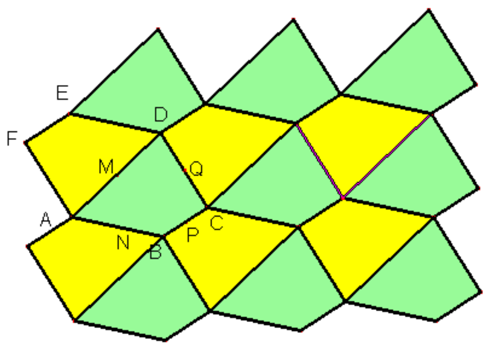

Figura 3 a

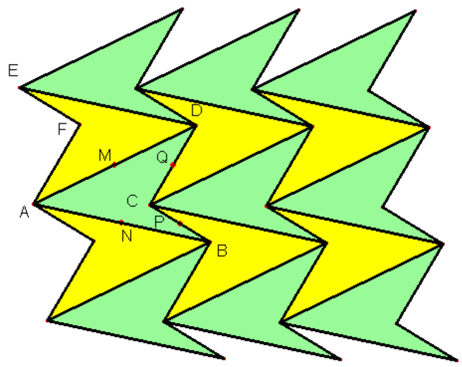

Figura 3 b

Nello stesso modo si scoprirà che anche con un quadrilatero, convesso o no, è sempre possibile tassellare il piano. Si disegna un quadrilatero ABCD convesso (Figura 3a) o concavo (Figura 3b) ma non intrecciato, e il quadrilatero simmetrico di ABCD rispetto al punto medio di uno dei lati. Si ottiene un esagono particolare, come quello in Figura 4, che pavimenta il piano tramite traslazioni. La tassellazione è generata dall'esagono ottenuto unendo ABCD con il suo simmetrico rispetto al punto O, punto medio di AB; si noti il parallelismo delle coppie di lati corrispondenti nella simmetria centrale. Quindi c'è un legame tra la pavimentazione ottenuta con un quadrilatero e quella realizzata con questi esagoni particolari, così come è stato scoperto lo stesso legame tra le tassellazioni ottenute con un triangolo e un parallelogramma. Si chiede agli studenti di individuare le trasformazioni (traslazioni, rotazioni) che servono per ottenere la tassellazione del piano (figura 4).

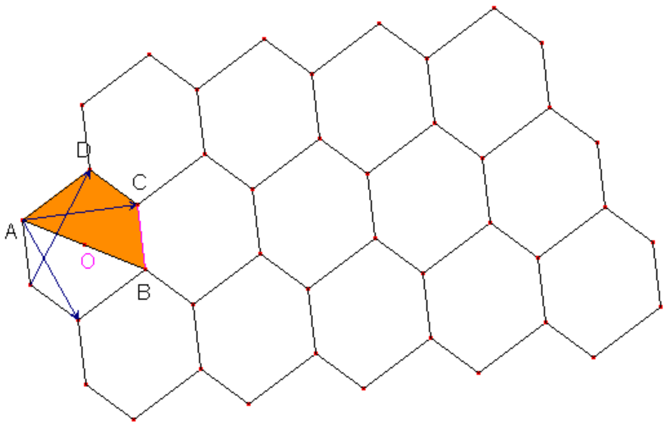

Figura 4

Fase 3

Nella fase 1 si è visto che non è possibile pavimentare il piano con pentagoni regolari tutti uguali. Si propone agli studenti di trovare un possibile ricoprimento usando, oltre al pentagono regolare, un altro poligono. Si può proporre agli studenti la Figura 5 e se ne chiede la descrizione oppure come approfondimento si può far realizzare la costruzione e scoprire le particolarità della tassellazione. Un'attività analoga si può realizzare a partire dall'ottagono regolare (Figura 6).

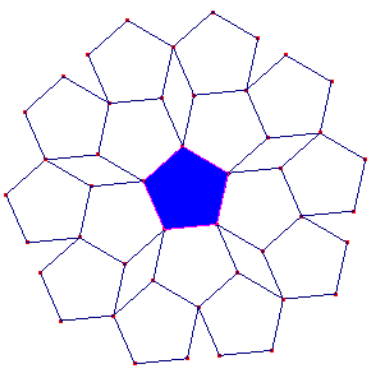

Figura 5

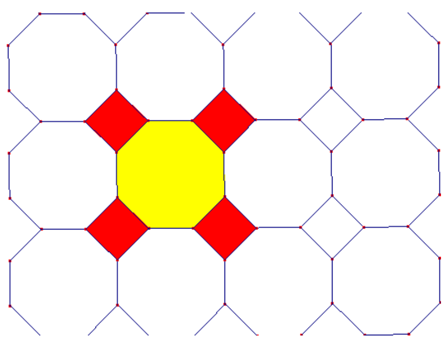

Figura 6

Possibili sviluppi

Inizialmente si è lavorato con un solo tipo di "mattonelle", tutte tra loro uguali. In questa fase si può proporre qualche semplice caso di pavimentazione ottenuta usando due o più tipi di mattonelle a forma di poligono regolare (queste pavimentazioni sono dette *semiregolari*; un esempio è quello della figura 6). L'obiettivo è sempre quello di riconoscere proprietà invarianti per trasformazioni isometriche nel piano.

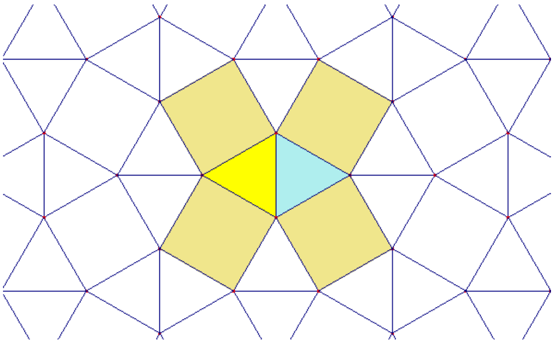

Figura 7

In momenti successivi si potranno proporre e illustrare delle tassellazioni ottenute da più tipi di mattonelle "regolari" e non, che si possono studiare con procedimenti analoghi a quelli utilizzati nelle precedenti fasi dell'attività didattica.
Nella figura 8, si mette in evidenza una particolare pavimentazione del piano ottenuta a partire da un pentagono che si ottiene dividendo in quattro parti uguali una croce greca.

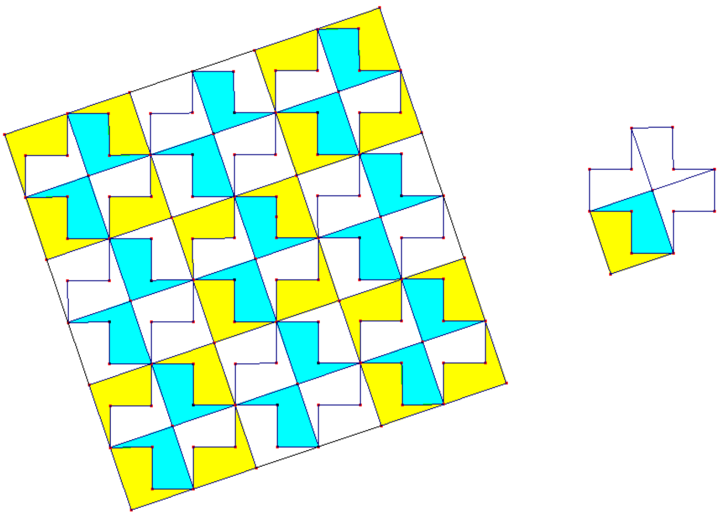

Figura 8

Alcuni esempi sono riportati nelle seguenti figure presenti nei disegni di M.C. Escher ispirati a pavimentazioni presenti nel palazzo dell'Alhambra di Granada (Spagna).

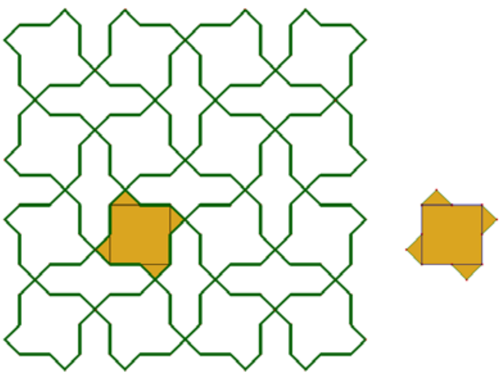

Figura 9

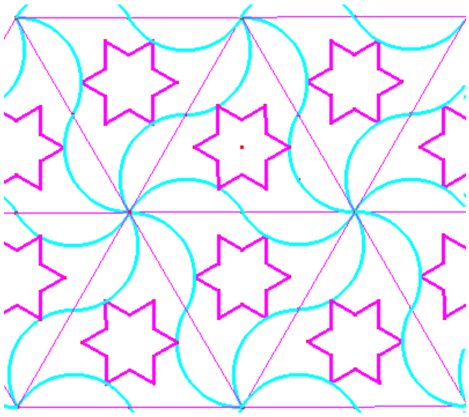

Figura 10

Elementi di prove di verifica

1. È possibile una tassellazione del piano formata da pentagoni regolari?
2. Si può realizzare una tassellazione del piano accostando dodecagoni regolari e triangoli equilateri?
3. Descrivere la pavimentazione del piano indicata nella Figura 11.

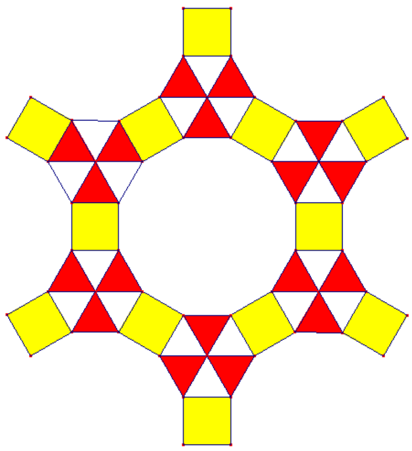

Figura 11

4. In alcune vetrate del XVI secolo si trovano esagoni regolari e parallelogrammi di cui due lati sono doppi degli altri due. Descrivere le proprietà dei parallelogrammi e la tassellazione ottenuta (Figura 12).

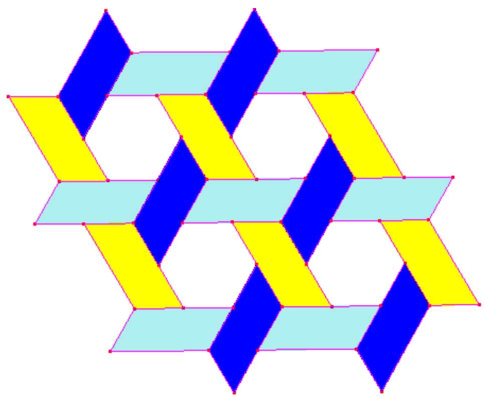

Figura 12

5. (Attività di gruppo in laboratorio di matematica). Costruire un pentagono convesso ABCDE che verifichi le seguenti condizioni: l'angolo in A è di 60°, gli angoli in B e in C sono di 120°, AB=AE e CB=CD (queste condizioni non determinano un pentagono unico, ma una famiglia di pentagoni). Con l'uso di un software di geometria, costruire la tassellazione del piano partendo da rotazioni di 60° del pentagono ottenuto attorno al punto A.