# Una regola pazza e geniale

**Livello scolare:** 2° biennio

| **Abilità interessate** | **Conoscenze** | **Nuclei coinvolti** | **Collegamenti esterni** |
|---|---|---|---|
| Utilizzare strutture più complesse: i vettori. | Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale, prodotto scalare. | <u>Numeri e algoritmi</u><br><br>Lo spazio e le figure<br><br>Argomentare, congetturare e dimostrare<br><br>Risolvere e porsi problemi | |

**Contesto**
Geometria analitica.

Nell'ambito del contesto indicato l'attività proposta presenta i vettori come "semplificatori di problemi geometrici", specialmente dal punto di vista del calcolo. Sottolinea, inoltre, la dualità tra le regole del calcolo letterale e le proprietà geometriche, indotta dalle coordinate cartesiane.

**Descrizione dell'attività**
Si risolvono dei problemi elementari nel piano cartesiano, con i vettori proposti come differenza tra lettere: punto medio di un segmento, baricentro di un triangolo, quarto vertice di un parallelogramma. Poi si propongono alcuni problemi nello spazio che con questa tecnica si risolvono agevolmente.

*"Se si indicano i punti con delle lettere e si fanno i calcoli con queste lettere secondo le regole dell'algebra classica, i risultati che si ottengono hanno un significato geometrico" (Grassmann)*

<u>Prima fase</u>

Nel piano il vettore $\overrightarrow{AB}$ è la differenza tra il vettore $\overrightarrow{OB}$ ed il vettore $\overrightarrow{OA}$: più semplicemente possiamo scrivere $B - A$.

- Cerchiamo le coordinate del punto medio del segmento $AB$.

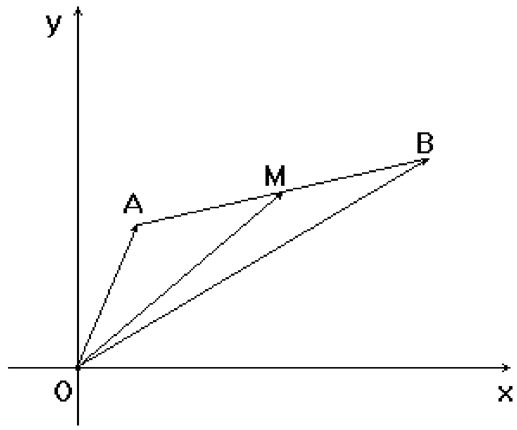


*Figura 1*

$B-O=M-O+\dfrac{B-A}{2}$ ; $B=M+\dfrac{B-A}{2}$ ; $M=B-\dfrac{B-A}{2}$ ; $M=\dfrac{2B-B+A}{2}$; $M=\dfrac{B+A}{2}$
che è la relazione tra le coordinate del punto medio e quelle degli estremi.

- Cerchiamo le coordinate del baricentro di un triangolo.

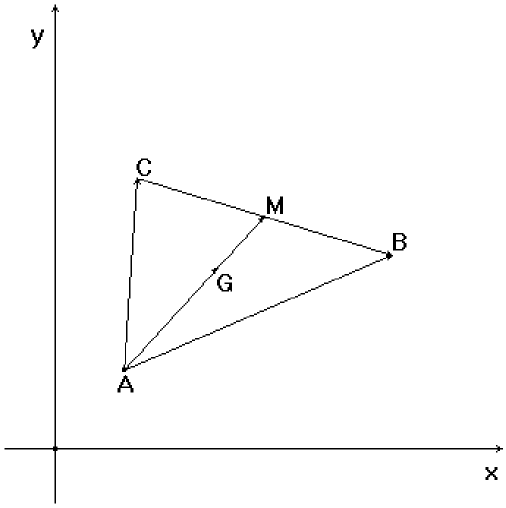

*Figura 2*

$G-A=\dfrac{2}{3}(M-A)=\dfrac{2}{3}(B-A-\dfrac{B-C}{2})$; $G=\dfrac{2}{3}(\dfrac{2B-2A-B+C}{2})+A$; $G=\dfrac{B-2A+C}{3}+A$;
$G=\dfrac{B-2A+C+3A}{3}$; $G=\dfrac{A+B+C}{3}$.
Quest'ultima uguaglianza fornisce la relazione tra le coordinate del baricentro e quelle dei vertici.

- Cerchiamo le coordinate del quarto vertice di un parallelogramma di cui sono note quelle dei primi tre.

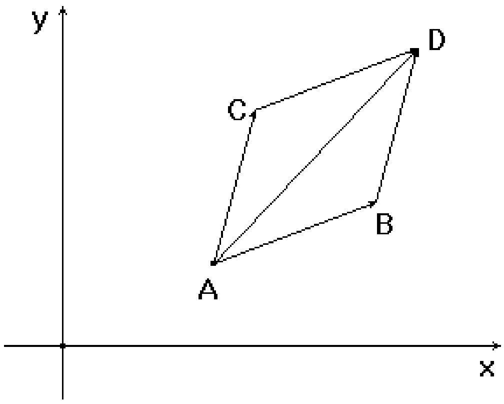

*Figura 3*

$B-A+C-A=D-A$ ; $B-A+C=D$.
Quest'ultima uguaglianza fornisce la relazione tra le coordinate del quarto vertice e quelle degli altri tre.

**Elementi di prove di verifica**

**1.** *OABCDE* è un prisma a base triangolare (vedi Figura 4) con:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

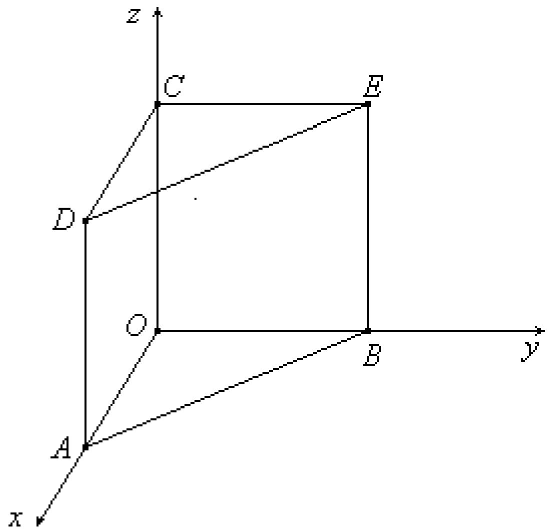


*Figura 4*

($a$) $i$) Determinare i vettori posizione dei punti $D$ ed $E$.
$ii$) Determinare i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$ e $\overrightarrow{DE}$.

($b$) Indicato con $M$ il punto medio del segmento $AB$ a con $N$ il punto medio del segmento $DE$:
*i)* Determinare i vettori posizione dei punti $M$ ed $N$.
*ii)* Determinare i vettori $\overrightarrow{AN}$ ed $\overrightarrow{ME}$.
*iii)* Spiegare cosa notate nei risultati ottenuti.

**Griglia di soluzione**

($a$) ($i$) $\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$ ($ii$) $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}$

($b$) ($i$) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ ($ii$) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 10 \end{bmatrix}$

($iii$) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ME}$, che è quanto ci si deve aspettare poiché $AN$ è parallelo a $ME$ e di uguale lunghezza.

**2.** *OABCDE* rappresenta il tetto di una casa (vedi Figura 5). *OABC* è un rettangolo con il lato *OA* di lunghezza 8 m e il lato *OC* di lunghezza 10 m. Lo spigolo *DE* è disposto in modo simmetrico 3 metri sopra il rettangolo.
($a$) Con gli assi disposti come in Figura 5, determinare i vettori posizione dei punti $A$, $B$, $C$, $D$ ed $E$.
($b$) Determinare i vettori $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{BE}$ e $\overrightarrow{CE}$, che rappresentano gli spigoli inclinati del tetto.
($c$) Dire qual è la lunghezza di uno spigolo inclinato.

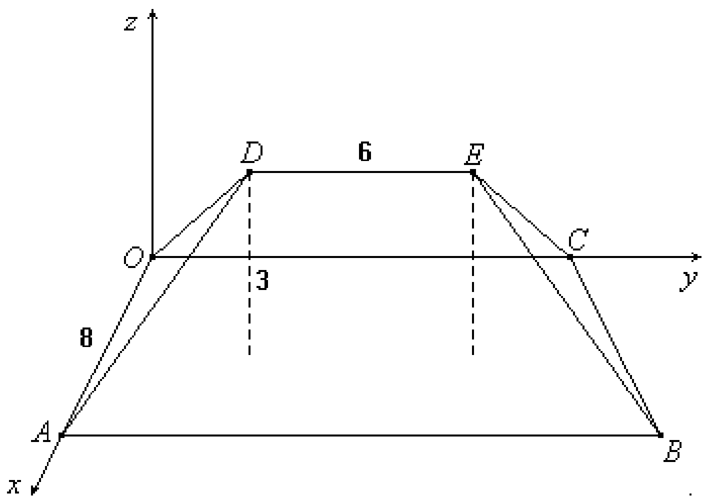


*Figura 5*

**3.** *OAB* è un triangolo le cui altezze condotte dai vertici *A* e *B* si intersecano in *H* come indicato in Figura 6. $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OH}$ si indicano con **a**, **b** e **h**.

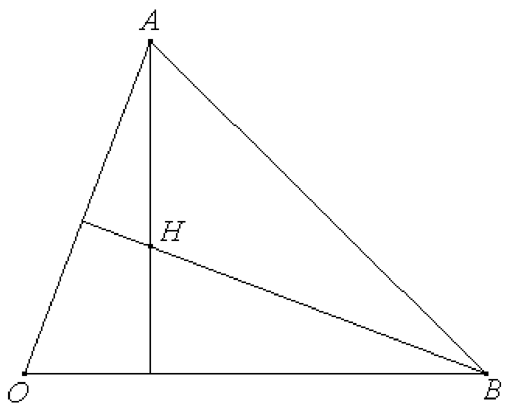


*Figura 6*

(*a*) Perché risulta $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{h}) = 0$?
(*b*) Scrivere un'equazione analoga che coinvolga $\mathbf{a}-\mathbf{h}$.
(*c*) Formalizzare il fatto che le altezze di un triangolo sono concorrenti.