Sciogliamo i nodi

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Data un'espressione numerica scrivere un grafo di calcolo ad essa equivalente e, viceversa, dato un grafo di calcolo, scrivere l'espressione numerica ad esso corrispondente. Usare consapevolmente le parentesi.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e razionali.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni	

Contesto
Calcolo algebrico.

Gli studenti non sempre riescono a raggiungere una soddisfacente competenza nel calcolo aritmetico e algebrico, nonstante il tempo che a esso è dedicato.
Le difficoltà incontrate dagli studenti si articolano sostanzialmente in due direzioni: l'aspetto computistico (il saper fare) e l'aspetto algoritmico (il saper organizzare). Mentre per l'ambito computistico è relativamente difficile aggiungere qualcosa di nuovo alle varie metodologie illustrate nei materiali didattici già esistenti, per l'aspetto algoritmico, invece, se preso in considerazione in maniera separata dal primo, si può prospettare un intervento didattico diverso e ipotizzare un percorso di apprendimento alternativo alle tradizionali metodologie di intervento.

Descrizione dell'attività
Tradizionalmente l'esecuzione di un'espressione algebrica è caratterizzata dalla risoluzione della stessa. Mediante una successione di operazioni (comunemente dette "passaggi"), si va da una forma descrittiva ampia, la traccia ("semplice" o "articolata"), ad una forma più sintetica, ma equivalente, che rappresenta il risultato.
Quest'attività, ai fini di un maggior coinvolgimento emotivo dello studente, pone l'attenzione sull'aspetto grafico, e rinvia il calcolo algebrico ad un secondo momento.

<u>Prima fase</u>
L'attività viene proposta in classe quando gli studenti devono affrontare espressioni algebriche più complesse e inizia con la costruzione verticale di un diagramma a forma di triangolo rovesciato. La stesura del diagramma, in seguito chiamata albero, inizia dalle operazioni indicate nella traccia e si articola in ramificazioni successive, sempre meno dense, terminanti all'ultimo nodo di chiusura. I nodi sono posti su vari livelli, in funzione delle regole di calcolo e dei criteri di svolgimento dell'esercizio.

Risoluzione grafica di espressione algebrica.

Esempio 1

$$\left\{(-2)^3+\left[2^2+(5+4\times 3)-4:2\right]\right\}+(-2)$$

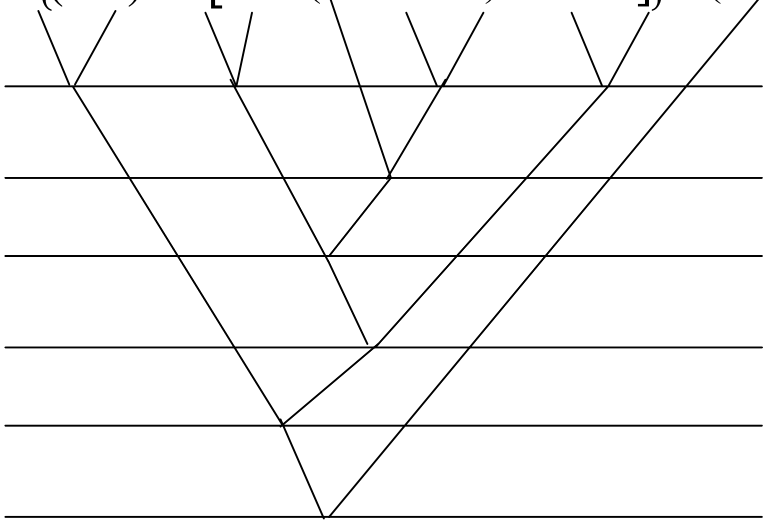


Figura 1

La risoluzione grafica di ogni espressione avviene seguendo queste fasi:

a) si tracciano delle linee orizzontali, man mano che servono: queste linee rappresentano i diversi livelli di risoluzione o di "scioglimento dell'espressione" necessari per la risoluzione della stessa;
b) rispettando le "regole algebriche", si tracciano per ciascuna operazione due linee oblique che confluiscono in un punto, detto nodo, terminanti sulla linea di livello corrispondente;
c) si ripetono le fasi precedenti, per tutte le operazioni e per i diversi livelli, fino all'esaurimento delle operazioni stesse e all'identificazione del nodo conclusivo;
d) le linee oblique di ciascuna operazione non si devono mai intrecciare: questa eventualità evidenzia una condizione di confusione o di disordine mentale (nell'esempio 2 che segue sono evidenziate in grassetto);
e) le linee oblique, quando confluiscono in un nodo, non devono attraversare più linee di livello: questa descrizione grafica evidenzia una modalità risolutiva elementare: "…un'operazione per volta …" (nell'esempio 3 sono evidenziate in grassetto);
f) le linee oblique, quando confluiscono in un nodo, non devono mai essere più di due: questa descrizione grafica evidenzia una modalità risolutiva complessa che può generare confusione se effettuata con scarsa consapevolezza (nell'esempio 3 sono evidenziate in grassetto).

Ogni espressione sarà, dunque, caratterizzata da un grafico e non da una sequenza di espressioni equivalenti: viene meno, dunque, il significato di uguaglianza ed è reso più evidente l'aspetto semantico della semplificazione.

Risoluzione grafica di espressioni contenenti errori.

Esempio 2

$$\{(-2)^3+[2^2+(5+4\times 3)-4:(-2)]\}+2$$

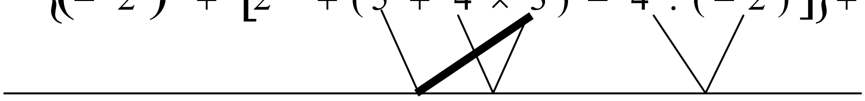


Figura 2

Esempio 3

$$\{(-2)^3+[2^2+(5+4\times 3)-4:2]\}+2$$

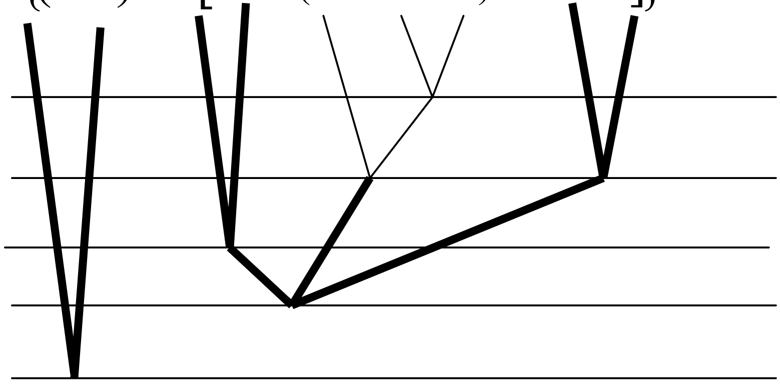


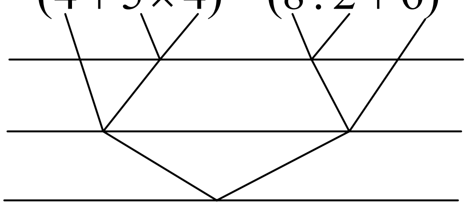
Figura 3

Dal punto di vista didattico la metodologia proposta presenta un'ulteriore vantaggio per l'insegnante e per lo studente: la possibilità di misurare oggettivamente la complessità di un esercizio.
Se per ogni linea di livello indichiamo il numero di nodi presenti (ossia le operazioni eseguite in quel momento) e lo confrontiamo con un altro valore di pari livello di un'altra espressione, conosceremo la diversa complessità delle due espressioni in un determinato momento risolutivo. Se questo risultato è moltiplicato per un peso avente solo un valore numerico e non qualitativo, ad esempio il numero ordinale del livello, si otterrà il peso dell'espressione relativo al livello, ossia la complessità relativa. In ultimo, se le considerazioni sono ripetute per tutta la risoluzione e sommate tra loro, si avrà, ovviamente, la misura o il peso della complessità globale dell'espressione.

Risoluzioni di espressioni algebriche con indicazione della complessità.

Esempio 4

$$(4+5\times 4)-(8:2+6)$$



$\boldsymbol{l \times n = c_{relativa}}$

$\mathbf{1 \times 2 = 2}$

$\mathbf{2 \times 2 = 4}$

$\mathbf{3 \times 1 = 3}$

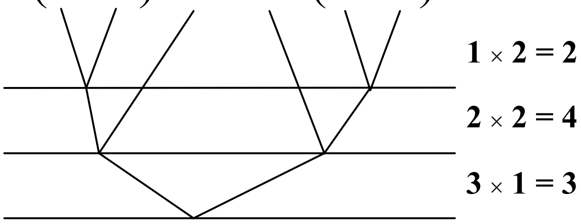
$\boldsymbol{c_{rel.} + \ldots + c_{rel.} = c_{glob.}}$

2+4+3 = 9

Figura 4

Esempio 5

$$(4+5)\times 4-8:(2+6)$$

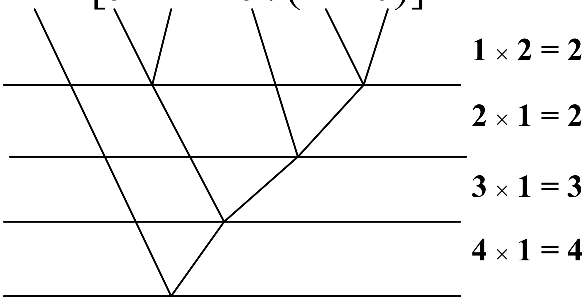


Complessità=9

Figura 5

Esempio 6

$$4+[5\times 4-8:(2+6)]$$

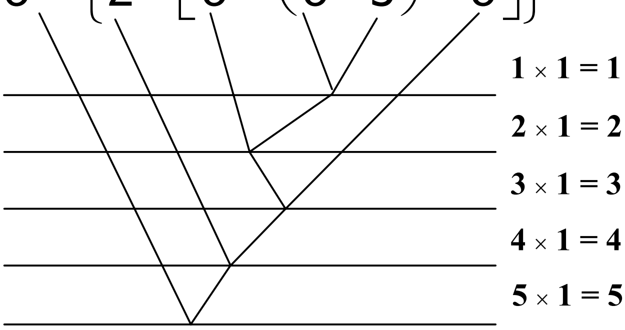


Complessità=11

Figura 6

Esempio 7

$$\frac{4}{3}+\left\{\frac{5}{2}\times\left[\frac{4}{3}-\left(\frac{8}{3}:\frac{2}{3}\right)+\frac{6}{5}\right]\right\}$$



Complessità=15

Figura 7

Alcune considerazioni

In questa prima fase l'azione dell'insegnante è favorita dalle seguenti considerazioni che nascono dai vantaggi e dalle valenze didattiche legate al metodo utilizzato.

1) Il grafico di calcolo (identificabile in un albero stilizzato) rappresenta la risoluzione di ogni espressione e permette di differenziarla meglio e/o di confrontarla più velocemente con altre risoluzioni presentate. Si può osservare come la modifica delle parentesi, negli esempi 4 e 5, ha variato il grafico e quindi la struttura risolutiva degli esercizi, pur mantenendo la stessa complessità.

2) Tradizionalmente lo studente é impegnato a confrontare solo il risultato finale di un'espressione, senza preoccuparsi dello sviluppo, anzi non accetta una "correzione" quando il risultato è corretto ma lo svolgimento è errato. Con questa metodologia egli pone tutta la sua attenzione al grafico e, quindi, al procedimento utilizzato.
3) Il metodo permette anche una "risoluzione modulare" dell'espressione, creando percorsi differenziati fra gli studenti e per lo stesso studente in uno stesso esercizio, in antitesi a quella più tradizionale che prevede sempre risoluzioni in sequenza (Figura 8).
   Con riferimento all'esempio 5:

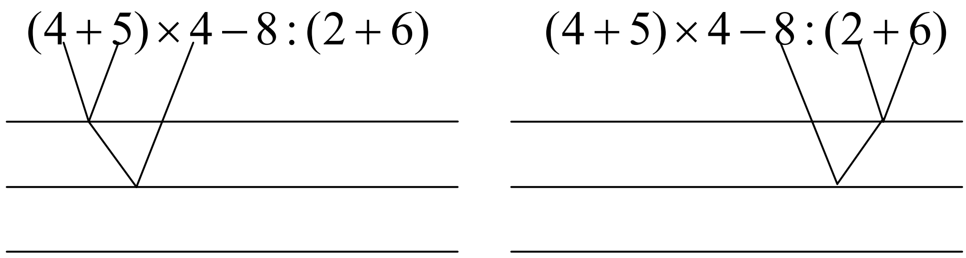


Figura 8

4) L'osservazione della struttura grafico-algoritmica permette una risoluzione mentale più immediata rispetto a quella numerico-computistica.
5) Un'ulteriore valenza didattica può essere riscontrata nella possibilità di identificare ogni espressione con alcuni parametri: il numero di livelli, la quantità di operazioni e la complessità globale. Negli esempi precedenti si può osservare, infatti, come tutte le espressioni sono formate dallo stesso numero di operazioni (è sufficiente contare i nodi di ciascun grafico) anche se distribuiti in diversi livelli e quindi con complessità differenti.
6) Un ulteriore arricchimento è fornito dalla possibilità di indicare, a fianco di ogni riga-livello, un numero intero progressivo (o peso) che, moltiplicato per il numero di operazioni presenti sulla riga corrispondente, fornisce la misura della complessità che le operazioni hanno nel processo risolutivo fino a quel momento.
   La somma di questi valori fornisce la misura della difficoltà complessiva di tutta l'espressione. Ad esempio nella prima espressione (Figura 4):
   - al 1° livello si trovano 2 operazioni e quindi il risultato è 2,
   - al 2° livello si trovano altre 2 operazioni e il risultato è 4,
   - al 3° livello si trova 1 operazione e il risultato è 3.

   Globalmente questa espressione ha una difficoltà, o complessità, di "9 punti" mentre, nell'ultimo esempio, la difficoltà complessiva, per la presenza delle parentesi e dei diversi livelli, risulta maggiore (Figura 7). Quest'opportunità permette all'insegnante di:
   a) programmare con più oggettività il proprio intervento nella classe,
   b) controllare meglio il livello di competenza raggiunto, globalmente o individualmente,
   c) differenziare il proprio intervento, nel tempo ed eventualmente anche tra gli studenti,
   d) operare in armonia con i colleghi dei corsi paralleli, nell'ambito della programmazione d'istituto.
7) L'aspetto computistico permette ad ogni studente di esprimere una valutazione assoluta della propria competenza acquisita: espressioni algebriche con diverse difficoltà o complessità si identificano con punteggi più elevati.
8) L'aspetto computistico permette a ogni studente di valutare la misura relativa della propria competenza, anche in caso di errore. In espressioni errate, infatti, egli è in grado di valutare il livello di competenza raggiunto, rapportando il valore totalizzato, prima dell'errore, al valore massimo indicato dall'insegnante. Una successiva "funzione punteggio" permetterà di trasformare questi valori grezzi in valori con base diversa o in valori percentuali, per permettere un confronto congruo con altre espressioni.

9) Il consolidamento della misura della competenza permette sia all’insegnante sia a ciascun studente di tenere sotto controllo, con opportuni indicatori statistici, la “performance” individuale e globale.
10) Gli studenti accettano più facilmente questo metodo perché più divertente e non oppongono alcuna resistenza all'apprendimento o al recupero.
11) La correzione, da parte dell'insegnante o da parte dello studente, risulta più agevole poiché non si ha la propagazione numerica dell'errore in tutta l'espressione, ma si può correggere la zona interessata, cancellando la linea errata e riscrivendo contestualmente quella esatta.

<u>Seconda fase</u>
L'attività viene proposta in classe quando gli studenti, dovendo completare la risoluzione di espressioni algebriche, partono dall'apprendimento globale dell'algoritmo per giungere all'apprendimento specifico computazionale.
Per trasformare il diagramma in espressione numerica si procede nel seguente modo. Si scrivono i risultati di ciascuna operazione in corrispondenza di ogni nodo e successivamente si ricopia la sequenza numerica e simbolica di ogni linea. In questo modo è possibile trasformare la rappresentazione grafica in una rappresentazione lineare dove i cosiddetti "passaggi" corrispondono ai vari livelli (Figura 9).
Con riferimento all'esempio n° 4 si ottiene:

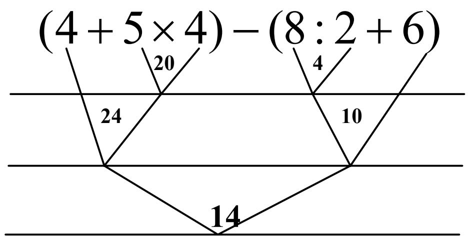


Figura 9

$$(4+20)-(4+6)$$

$$24-10$$

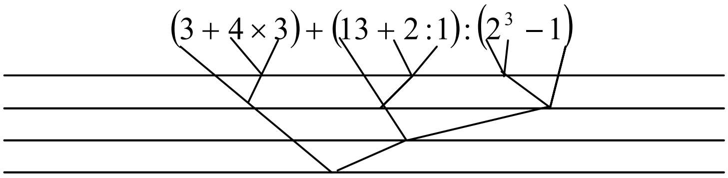
$$14$$

Elementi di prove di verifica

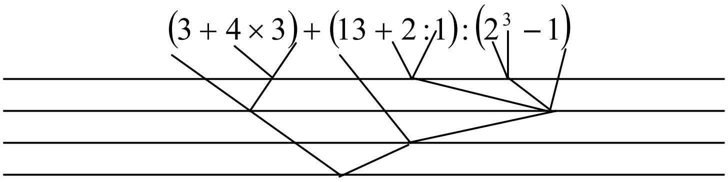
1. Indicare qual è l'esatta rappresentazione grafica della seguente espressione:

$$(3+4\times 3)+(13+2:1):(2^3-1)$$

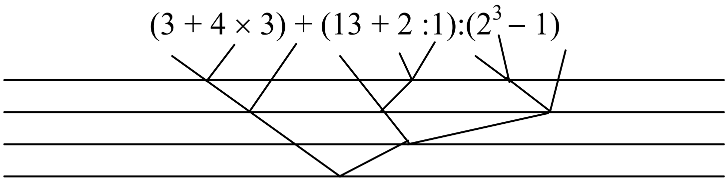
a)



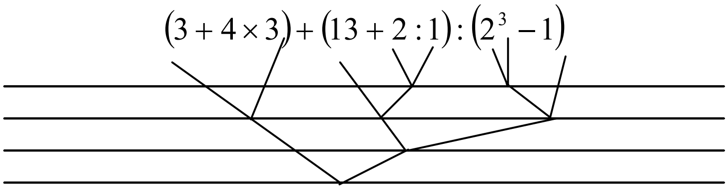
b)



c)



d)



e)

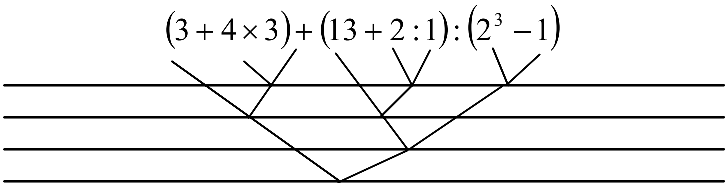


Figura 10

2, Indicare qual è la complessità relativa al 5° livello della seguente espressione:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$$

a) 7 *b)* 31 *c)* 13 *d)* 24 *e)* 6

3. Indicare qual è la complessità globale della seguente espressione:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$$

a) 8 *b)* 31 *c)* 13 *d)* 24 *e)* 6

4. Nella seguente espressione:

$$\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$$

uno studente ha eseguito correttamente la risoluzione algoritmica della stessa fino al 6° livello incluso. Indicare qual è la sua “performance” espressa in forma percentuale:

a) 89% *b)* 29% *c)* 58% *d)* 86% *e)* 77%

5. Con riferimento all'espressione precedente, indicare qual è l'esatta rappresentazione lineare della stessa a partire dal 3° livello incluso:

a) $\left\{\frac{5}{6}+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{3}{2}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

b) $\left\{\frac{25}{36}+\left[\frac{1}{2}\times\left[\frac{3}{2}\right]\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

c) $\left\{\frac{25}{36}+\left[\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

d) $\left\{\frac{25}{36}+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]\right\}+\frac{4}{5}$

e) $\left\{\frac{25}{36}\right\}+\frac{4}{5}$