La traduzione” dei problemi: dal linguaggio naturale al linguaggio dell’algebra

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura. Risolvere, per via grafica e algebrica, problemi che si formalizzano con equazioni e disequazioni di primo grado.	Zeri e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un’incognita. Sistemi lineari. Interpretazione geometrica dei sistemi lineari a due incognite.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numero ed algoritmi Risolvere e porsi problemi Argomentare, congetturare, dimostrare	Lingua italiana

Contesto
Linguaggio naturale e linguaggio simbolico.

Questa attività può essere introdotta nella prima classe; è centrata sulla traduzione dal linguaggio naturale, in cui sono formulate le situazioni problematiche, a quello algebrico, che ne permette la matematizzazione e l’eventuale soluzione. Il contesto è prettamente linguistico: infatti, affronta le difficoltà che lo studente incontra nel passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico; sposta il fulcro dell’attenzione didattica dagli algoritmi risolutivi alla traduzione e messa in formula dei problemi. È qui che si concentrano le maggiori difficoltà degli studenti: la matematica viene da loro percepita come puro strumento operativo; si tratta, invece, di presentarla come strumento di pensiero, mettendo in luce anche gli aspetti concettuali; infatti la matematica può maggiormente contribuire a rispondere a questa esigenza se la si concepisce come arte del ragionamento e non come puro ricettario di calcolo.

Descrizione dell’attività
Con questa attività l’insegnante propone agli studenti di *tradurre*[1] problemi enunciati nella lingua italiana in equazioni, verificando se sono buoni traduttori di un testo dal linguaggio naturale a quello algebrico. Tale attività è fondamentale per la comprensione e l’utilizzo delle equazioni.

---

[1] La traduzione è un processo che parte da un testo (A), per arrivare a un altro testo (B).
Nella scuola la traduzione è percepita comunemente come un’operazione che riguarda le lingue, classiche e moderne; ad esempio nello studio delle lingue classiche (Greco e Latino) la traduzione costituisce la prova di verifica più frequente.
Invece la traduzione è utilizzata anche in ambito matematico; in particolare, è evidente la sua funzione nella costruzione di formule ed enunciati che rappresentano definizioni, proposizioni e teoremi.
Infatti tali enunciati devono possedere due elementi fondamentali: *tradurre* in *linguaggio specifico* il *linguaggio naturale* e *riassumere* la *natura*, la *forma* o altre *caratteristiche* e *proprietà* degli *oggetti* e *concetti* matematici a cui si applicano.

Per procedere con ordine nella traduzione si suggerisce di dividere la pagina in due colonne: a sinistra si scrive il problema in modo che risultino chiare le parti in cui il suo testo può essere suddiviso, a destra si scrivono le formule.
In tal modo si produce una prima rielaborazione del testo; è importante che si tratti di una rielaborazione fedele, altrimenti il problema può cambiare.
Dopo avere suddiviso il testo nelle sue varie parti, si passa alla seconda fase del lavoro: tradurre in linguaggio algebrico il testo scritto nella colonna di sinistra. Per fare questo si devono, naturalmente, individuare le variabili cui riferire il testo.
Si tratta di un compito particolarmente delicato: la buona individuazione dei dati, delle incognite e dei relativi legami è infatti determinante per ottenere una traduzione fedele e semplice del problema, in modo da poterlo risolvere usando opportunamente le regole dell'algebra. Si noti che il numero delle incognite non è predeterminato ma dipende dalla traduzione.
Una cattiva traduzione o una individuazione delle variabili meno immediata può infatti rendere faticoso il successivo lavoro algebrico e favorire gli errori.
Il compito richiesto in questa fase è quindi di comprensione di un testo e in questo senso occorre mobilitare le risorse!

Esempio 1: un'eredità

Un padre di tre figli morì lasciando in eredità 1600 monete d'oro. Il testamento precisava che il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo e che al secondo a sua volta spettavano 100 monete più dell'ultimo. Si domanda la quota di ciascuno.

Le fasi da seguire per ottenere una buona traduzione sono:

1. Comprensione
   - *Quali sono le incognite, cioè quello che si vuole sapere?*

   Ovviamente si tratta delle somme che spettano ai tre figli (ci sono quindi tre incognite: le somme che spettano al maggiore, al medio e al minore dei tre figli).
   - *Che cosa è dato?*

   La quantità di monete lasciata in eredità dal padre, cioè 1600 monete.
   - *Quali condizioni legano il dato alle incognite o le incognite tra di loro?*

   La prima incognita è la seconda aumentata di 200; la seconda è pari alla terza aumentata di 100.

A questo punto, si scrivono nella colonna di sinistra le parti in cui risulta diviso il testo del problema:

Incognite Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli	
Dati Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	
Condizioni Il testamento precisava che: ➢ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1^a condizione); ➢ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2^a condizione).	

Nella traduzione dal testo originale al testo in tabella che abbiamo scelto, compaiono nell'ordine: le incognite, i dati, e infine le condizioni, mentre, in italiano corrente, prima ci sono i dati, poi le condizioni e infine le incognite. Questo non deve stupire; capita spesso nelle traduzioni sia nella stessa lingua che da una lingua all'altra di non poter copiare passo passo il testo ma di doverlo in qualche modo adattare al contesto che si considera o alla lingua straniera. In questo caso la lingua straniera è il linguaggio algebrico della matematica.

Si passa ora alla traduzione vera e propria in "algebrichese".
La prima cosa da fare per riempire la colonna di destra è abolire le parole e passare alle formule.
Il linguaggio della matematica, in questo caso l'algebra, non è fatto di parole ma di simboli, o meglio, le parole della matematica non sono quelle della lingua italiana, ma segni che si combinano tra loro per costituire formule più o meno complicate secondo regole ben precise, quelle dell'algebra. Del resto ogni linguaggio tecnico usa termini specifici di cui si richiede la comprensione.
Iniziamo allora a riempire lo spazio delle incognite usando opportuni segni che possono essere arbitrari, ma che conviene scegliere in modo che siano facili da ricordare e riconoscere. Per le incognite utilizziamo qui le ultime lettere dell'alfabeto.
Consideriamo poi il dato che in questo caso semplicemente costituito dal numero 1600 (le monete d'oro).

<u>Incognite</u> Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli: quota del maggiore quota del medio quota del minore	<u>Incognite</u> x y z
<u>Dati</u> Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	<u>Dati</u> 1600
<u>Condizioni</u> Il testamento precisava che: ➢ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1ª condizione); ➢ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2ª condizione).	

2. Ricerca delle condizioni
Studiamo ora tutte le condizioni o relazioni che legano tra loro dati e incognite, notando che queste ultime sono numeri che soddisfano le condizioni del problema, quindi su esse si può operare allo stesso modo in cui si opera sui dati.
Apparirà allora naturale tradurre le frasi:

- "Il maggiore dei tre deve avere 200 monete più del secondo" nella formula algebrica: $x = 200 + y$
- "Al secondo spettano 100 monete più dell'ultimo" nella formula algebrica: $y = 100 + z$.

<u>Incognite</u> Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli: quota del maggiore quota del medio quota del minore	<u>Incognite</u> x y z
<u>Dati</u> Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d'oro	<u>Dati</u> 1600
<u>Condizioni</u> Il testamento precisava che: ➢ il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo (1ª condizione); ➢ al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo (2ª condizione).	<u>Condizioni</u> $x = 200 + y$ $y = 100 + z$

Si noti che il numero delle incognite non è determinato a priori. Ad esempio, per diminuirne il numero si può usare una traduzione diversa che tenga conto di una condizione e indicare la quota del medio direttamente con x-200.

A questo punto si osserva che si hanno relazioni che legano le incognite tra di loro, ma nessuna condizione che leghi il dato (1600) alle incognite.
In realtà è scontato che la somma delle tre quote spettanti ai figli sia di 1600 monete: ciò compare implicitamente nel problema, per il significato della parola eredità; ma non è stato tradotto nel linguaggio algebrico!
Basta considerare che è $x+y+z=1600$, condizione implicita nel testo italiano del problema, ma che va esplicitata quando si passa alla sua traduzione nel linguaggio algebrico.

3. Esplicitazione delle relazioni nascoste
Si passa quindi a formulare, secondo le modalità indicate nella seguente tabella, le condizioni già esplicite e quelle implicite nel testo:

<u>Incognite</u>	<u>Incognite</u>
Si domanda la quota che spetta a ciascuno dei tre figli:	
quota del maggiore	x
quota del medio	y
quota del minore	z
<u>Dati</u>	<u>Dati</u>
1600 monete d'oro	1600
<u>Condizioni</u>	<u>Condizioni</u>
Un padre di tre figli morì lasciando loro in eredità 1600 monete d’oro.	$x+y+z=1600$
Il testamento precisava che:	
➢ Il maggiore dei tre doveva avere 200 monete più del secondo	$x = 200 + y$
➢ Al secondo spettavano 100 monete più dell'ultimo	$y = 100 + z$

Nel testo originale del problema, le 1600 monete compaiono con un doppio significato, che viene esplicitato nella formulazione matematica:
1. Dato (è un dato che si parli di 1600 monete);
2. Condizione (le 1600 monete sono l’eredità per i tre figli: c’è quindi una relazione tra dati e incognite).

E’ tipico della matematica che i suoi segni significhino una sola cosa per volta e mai più di una cosa alla volta (come invece succede spesso in italiano). Del resto capita anche nelle traduzioni in una lingua straniera di dover esplicitare o ripetere parole (ad esempio pronomi) che in italiano non compaiono.

4. L’uso del linguaggio algebrico per risolvere il problema
Il lavoro di traduzione dalla lingua naturale al linguaggio algebrico non è sempre facilissimo.
Le regole date possono aiutare, ma solo la pratica rende bravi traduttori, così come la conoscenza delle regole grammaticali è di aiuto per fare traduzioni tra due lingue, ma da sola non basta.
Una volta che il problema è tradotto in linguaggio algebrico corretto, si possono utilizzare le regole di calcolo per determinare la soluzione, che in questo caso è: $x = 700$; $y = 500$; $z = 400$.

<u>Esempio 2</u>: Viaggio aereo
Le linee aeree permettono a ciascun passeggero di portare in franchigia (cioè senza costi aggiuntivi) un bagaglio non superiore ad un certo peso, oltre il quale deve pagare per il trasporto in ragione dei chilogrammi in eccedenza. Il sig. Carlo e sua moglie fanno un viaggio in aereo con un bagaglio che complessivamente pesa 54 kg e devono pagare € 21 per i chilogrammi oltre la franchigia. Il sig. Carlo pensa che se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli (suoi e della moglie) dovrebbe invece pagare € 51.
Si chiede qual è il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia.

Analogamente a quanto visto nel precedente esempio, impostiamo la seguente tabella:

Incognite	Incognite
Il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia	x
Dati	Dati
Il bagaglio complessivamente pesa 54 kg	54
devono pagare € 21 per i kg oltre la franchigia (insieme)	21
se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli dovrebbe pagare € 51	51
Condizioni	Condizioni
.	

E per le condizioni? Occorre esplicitare le relazioni nascoste.

Quando i viaggiatori sono due hanno diritto ad una franchigia di $2x$ (kg) e pagano per questo € 21; se il sig. Carlo fosse solo avrebbe diritto ad una franchigia di x kg e dovrebbe pagare € 51.
Se P è il prezzo che la compagnia aerea fa pagare per ogni chilogrammo di bagaglio oltre la franchigia, si possono scrivere le condizioni:

1. $P \cdot (54-2x) = 21$
2. $P \cdot (54-x) = 51$

Infatti, quando sono in due, i coniugi pagano solo per i chilogrammi oltre la franchigia, cioè per il peso 54- $2x$; quando il signor Carlo è solo, il bagaglio pesa sempre 54 kg, ma la franchigia è ridotta a x kg.
Possiamo allora scrivere:

Incognite	Incognite
Il peso che ciascun passeggero può portare in franchigia	x
Il prezzo per ogni chilogrammo di bagaglio oltre la franchigia	P
Dati	Dati
Il bagaglio complessivamente pesa 54 kg	54
devono pagare € 21 per i kg oltre la franchigia (insieme)	21
se viaggiasse da solo con gli stessi bagagli dovrebbe pagare € 51	51
Condizioni	Condizioni
Il prezzo quando sono in due è di € 21	$P \cdot (54-2x) = 21$
Il prezzo se il sig. Carlo è solo è di € 51.	$P \cdot (54-x) = 51$

Impostazione dell'equazione

Nell'ultima cella della seconda colonna il prezzo P compare due volte:

$$(1)\ P = \frac{21}{54-2x};$$

$$(2)\ P = \frac{51}{54-x}$$

Si possono allora eguagliare i secondi membri di (1) e (2); si ottiene l'equazione:

$$(3)\quad \frac{21}{54-2x}=\frac{51}{54-x}$$

L'equazione (3) viene trasformata nelle seguenti equazioni:

$$21(54-x)=51(54-2x)$$

$$1134-21x=2754-102x$$

$$102x-21x=2754-1134$$

$$81x=1620$$

$$x=20$$

La soluzione è 20 chilogrammi, volendo si può calcolare anche P(€ 3,50) ma non è richiesto dal problema.

Si sintetizzano nella tabella seguente le fasi fondamentali nel processo di traduzione di un problema:

1. Comprensione Cercare di capire bene: a) che cosa bisogna trovare (Incognita o Incognite) b) che cosa è dato o conosciuto (Dati) c) in che modo i dati e le incognite sono legati tra loro (Condizione o Condizioni)
2. Ricerca delle condizioni Esaminare ancora il problema nel modo più naturale, considerandolo risolto e cercando di vedere con chiarezza, in ordine conveniente, tutte le relazioni che devono intercorrere fra le incognite e i dati, in rapporto alle condizioni.
3. Esplicitazione delle relazioni nascoste In matematica, e in algebra in particolare, il linguaggio è più semplice di quello naturale: non sono ammessi i sottintesi. Occorre tradurre le parole in formule e cercare di esprimere una stessa quantità in due modi diversi, ottenendo così un'equazione.
4. Uso del linguaggio algebrico per risolvere il problema Usare le regole del calcolo algebrico per trasformare le equazioni date in altre ad esse equivalenti, ma in cui è immediato riconoscere la soluzione.

Elementi di prove di verifica

1. In pizzeria
In una pizzeria del centro il sabato la pizza margherita costa 1 Euro in più rispetto ai giorni infrasettimanali. Con la stessa somma il sabato si possono mangiare 5 pizze mentre nei giorni infrasettimanali se ne possono mangiare 6, quanto costa la pizza il sabato?
Prova a costruire problemi analoghi con l'acquisto di gelati: coni grandi o piccoli.

2. L'età di mia madre
La mia età è 11/16 di quella di mia madre e quattro anni fa ne era i 2/3. Quanti anni ha mia madre?
Prova a costruire un problema per far scoprire al tuo compagno di banco l'età di tua madre.

3. Euro
Marta e Claudio possiedono insieme la somma di x euro. Se Claudio dà a Marta y euro, la somma che gli rimane è i 2/3 di quella in possesso di Marta. Quanti euro aveva ciascuno di loro inizialmente?
Prova a costruire un problema analogo con gli euro che avete in tasca tu e una tua compagna.

4. Triangolo
Quanto misura il lato di un triangolo equilatero sapendo che la somma della base con l'altezza misura b?
Prova a pensare a un problema che chiede la misura di un lato di un triangolo che non sia equilatero, cosa succede? Puoi ancora calcolarne un lato conoscendo la somma della base e dell'altezza? Hai bisogno di altri dati? Come faresti se il triangolo fosse rettangolo isoscele?

5. Cerca il numero
Un numero supera di due il triplo di un altro. Trova almeno due numeri che soddisfano la condizione data.
Prova a pensare a problemi analoghi e a farli risolvere a un bambino che frequenta la scuola elementare.

6. Senza calcoli
Senza fare calcoli, spiega perché c'è un solo valore del coefficiente k per cui il sistema delle due equazioni $x - y = 2$, $x - ky = 0$, non ammette soluzioni.
Prova a costruire esempi concreti che non ammettono soluzioni