Se si insiste…*non* si vince

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi indipendenti e non. Valutare criticamente le informazioni fornite dai media relative ai giochi di sorte.	Significato della probabilità e sue valutazioni. Semplici distribuzioni di probabilità. Il concetto di gioco equo.	Dati e previsioni Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Giochi Previsioni

Contesto
Giochi, probabilità.

Questa attività può essere introdotta nel secondo biennio, dopo aver introdotto le definizioni di probabilità e dopo aver trattato i principali valori medi e le principali misure di dispersione.
Per la simulazione al computer sono necessari alcuni prerequisiti di conoscenza del foglio elettronico: come si inseriscono i dati, come si inserisce una formula, come si copia una formula, riferimenti relativi e assoluti alle celle, come si crea un grafico. Le funzioni "Casuale( )" e "Se( )" possono essere introdotte anche in questo contesto.

Descrizione dell'attività
L'attività costituisce un primo approccio alla distribuzione binomiale e ha come obiettivo quello di far capire, fugando una credenza diffusa, che è negativa la risposta alla domanda: lanciando molte volte una moneta (bilanciata) il numero delle teste tende ad essere uguale al numero delle croci?
Per risolvere il problema conviene partire da semplici considerazioni.
Se si lancia una moneta si può ottenere testa o croce con probabilità rispettivamente $p = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.
Quale sarà la frequenza relativa di testa in 100 lanci di una moneta?
Per rispondere l'insegnante propone di simulare l'esperimento con il foglio elettronico usando la funzione "Casuale( )".
Questa funzione genera un numero compreso tra zero e uno. Si può associare ad un numero minore di 0,5 l'uscita di Testa e ad un numero maggiore o uguale di 0,5 l'uscita di Croce. Oppure si moltiplica la funzione "Casuale( )" per 2 (così si ottengono numeri compresi tra 0 e 2) e poi se ne prende la parte intera (funzione "Int( )"). Si ottiene 1 (Testa) o 0 (Croce).
Il foglio elettronico, di cui la Figura 1 mostra la parte iniziale, è stato costruito riportando: nella colonna D le sequenze di 0 e 1 ottenute tramite la funzione "Casuale( )", calcolata nella colonna C; nella colonna A il numero progressivo di lanci; nella B gli esiti dell'esperimento simulato, ossia le uscite di Testa (1) le uscite di Croce (0). Per ottenere la sequenza di T e C si usa la funzione "Se( )" che ha la seguente sintassi "=SE(condizione; azione nel caso sia vera la condizione; azione nel caso la condizione sia falsa)". In questo caso è stata digitata la formula "=SE(D2 = 1;"T";"C")". Il calcolo per il numero di teste (colonna E) si può fare in maniera agevole incrementando ogni volta il contenuto della cella in cui si trova la somma delle Teste e usando la funzione "Copia formula" e i riferimenti relativi alle celle. In questo caso si è inserita nella prima cella della colonna E (E2) il contenuto della prima cella della colonna D (D2), poi è stata digitata la formula E3 = E2+D3 per la cella successiva e infine si è copiato il comando nelle altre celle attive.

Nella colonna F sono riportate le frequenze relative di testa.

B7 = =SE(D7=1;"T";"C")

	A	B	C	D	E	F
1	**LANCI**	**MONETA**			n° **T**	FREQ.**T**
2	1	C	0,82011	0	0	0,00
3	2	C	0,543162	0	0	0,00
4	3	T	1,665016	1	1	0,33
5	4	C	0,085047	0	1	0,25
6	5	T	1,204324	1	2	0,40
7	6	T	1,876874	1	3	0,50
8	7	T	1,06786	1	4	0,57
9	8	T	1,662015	1	5	0,63
10	9	T	1,38247	1	6	0,67
11	10	C	0,990017	0	6	0,60
12	11	T	1,256956	1	7	0,64
13	12	C	0,14895	0	7	0,58
14	13	C	0,848766	0	7	0,54
15	14	C	0,09596	0	7	0,50
16	15	T	1,888573	1	8	0,53
17	16	T	1,354797	1	9	0,56
18	17	T	1,464304	1	10	0,59

Schema di Testa e Croce

Figura 1

Può essere interessante far ripetere più volte l'esperimento (basta premere un tasto!) e osservare come variano i grafici.
Si nota facilmente nella Figura 2 che, al crescere del numero dei lanci, la frequenza relativa oscilla, arrivando a stabilizzarsi attorno a 0,5; dunque la frequenza relativa "tende" alla probabilità, cioè a 0,5 (Legge dei grandi numeri).

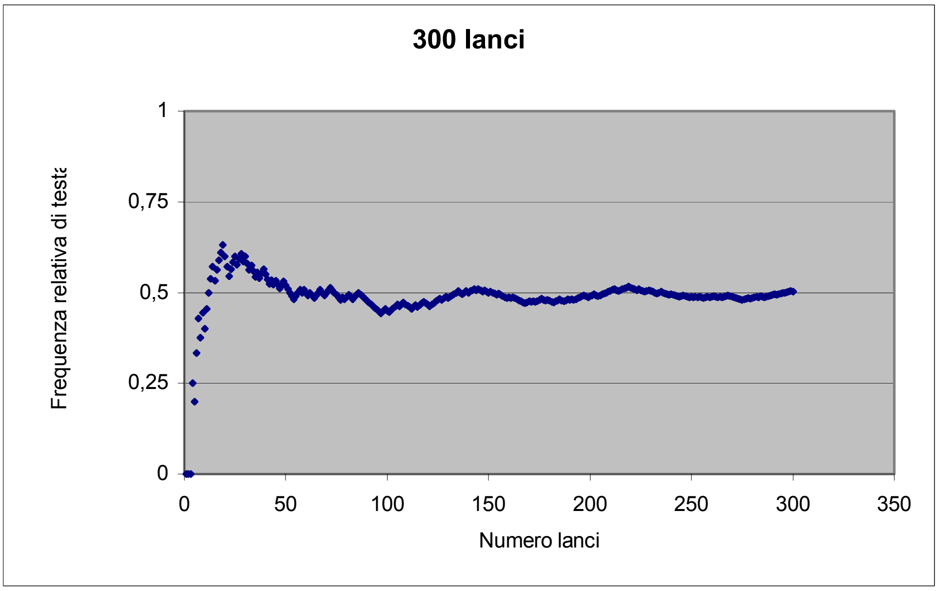

Figura 2

L'insegnante pone allora la seguente domanda: in un gran numero di lanci ci si può attendere che il numero delle teste sia uguale al numero delle croci?
In altre parole ci si può attendere che la differenza tra il numero delle teste e il numero delle croci tenda a zero al crescere del numero dei lanci?

Per aiutare gli studenti a rispondere, l'insegnante chiede se è importante sapere quale sia maggiore fra il numero delle teste e quello delle croci. Quando dal dibattito emerge che ciò che interessa è il modulo della differenza, l'insegnante propone di usare la simulazione con il foglio elettronico e di aggiungere un'altra colonna (colonna G) in cui si pone la differenza in valore assoluto tra il numero delle teste e il numero delle croci:

$$|T\text{-}C| = |\ T-(n\text{-}T)\ | = |\ 2T\text{-}n\ |$$

Nel foglio la formula è "=Ass(2*E2-A2)" che viene, come al solito, copiata in tutte le celle attive. L'insegnante invita gli studenti a costruire il grafico corrispondente.

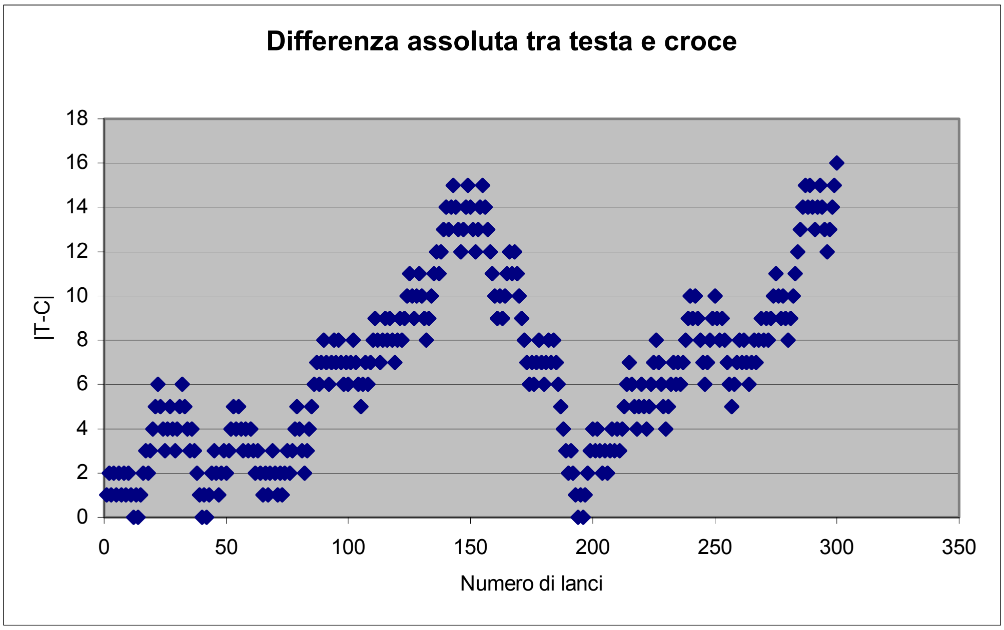

Figura 3

Il grafico in Figura 3 mostra che la differenza tra le teste e le croci tende ad aumentare.
Può essere interessante far ripetere più volte l'esperimento (basta premere un tasto!) e si osserva che la differenza non solo non si stabilizza attorno allo zero, ma anzi aumenta…
Perché?
Se gli studenti conoscono già la media e lo scarto quadratico medio per una distribuzione statistica, si possono introdurre questi concetti per la distribuzione di probabilità nel caso di Testa e Croce (distribuzione binomiale).

Nota: L'insegnante fa notare la caratteristica del foglio Excel di rappresentare le frazioni improprie, separando la parte intera dalla frazione propria. Così, ad esempio, 1 1/2 = 3/2.

Partendo dallo schema:

		C **T**		
2 monete	**CC**	**CT**	**TT**	
n° teste	0	1	2	
Probabilità	1/4	1/2	1/4	media = ½ ·**2**
3 monete	**CCC**	**CCT** **CTT**	**TTT**	
n° teste	0	1 2	3	
	1/8	3/8 3/8	1/8	media = ½ ·**3**
4 monete	**CCCC** **CCCT**	**CCTT**	**CTTT** **TTTT**	
n° teste	0 1	2	3 4	
Probabilità	1/16 4/16	6/16	4/16 1/16	media = ½ ·**4**

si arriva per gradi alle formule:

la media del numero di Teste in n lanci è $\dfrac{n}{2}$, la varianza è $\dfrac{n}{4}$ e $\sigma = \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

L'insegnante può guidare la classe ad approfondire ulteriormente la comprensione di come n e p (parametri) "governano" la distribuzione binomiale, proponendo, ad esempio, lo schema seguente.

2 monete	n. teste (xi)	Prob. P(xi)	xi*P(xi)	xi^2	xi^2*P(xi)
CC	0	1/4	0	0	0
CT	1	1/2	1/2	1	1/2
TT	2	1/4	1/2	4	1
			1		1 1/2

n	2
p	1/2
q	1/2

Media	1

varianza	1/2

media 1 = n*p
varianza 1/2 = n*p*q

3 monete	n. teste (xi)	Prob. P(xi)	xi*P(xi)	xi^2	xi^2*P(xi)
CCC	0	1/8	0	0	0
CCT	1	3/8	3/8	1	3/8
CTT	2	3/8	3/4	4	1 1/2
TTT	3	1/8	3/8	9	1 1/8
			1 1/2		3

n	3
p	1/2
q	1/2

media	1 1/2

varianza	3/4

media 1 1/2 = n*p
varianza 3/4 = n*p*q

4 monete	n. teste (xi)	Prob. P(xi)	xi*P(xi)	xi^2	xi^2*P(xi)
CCCC	0	1/16	0	0	0
CCCT	1	4/16	4/16	1	4/16
CCTT	2	6/16	12/16	4	1 8/16
CTTT	3	4/16	12/16	9	2 4/16
TTTT	4	1/16	4/16	16	1
			2		5

n	4
p	1/2
q	1/2

media	2

varianza	1

media 2 = n*p
varianza 1 =n*p*q

Tornando al problema del numero aleatorio $|2T\text{-}n|$ va tenuto presente che la varianza del numero aleatorio $(2T\text{-}n)$ è $4\cdot\frac{n}{4}$ e lo scarto quadratico medio è $\sigma = \sqrt{n}$. Quest'ultima quantità è una misura per eccesso della media del numero aleatorio $|2T\text{-}n|$ (cfr.: Barra, 2000).
Dunque, contrariamente a quello che si poteva pensare, la differenza in modulo tra il numero delle teste e il numero delle croci non tende a zero ma cresce come $\sqrt{n}$, perciò, per esempio, su 100 lanci ci si può aspettare in media che tale differenza assuma il valore della radice di 100, cioè 10; così su 400 lanci possiamo aspettarci in media che tale differenza assuma il valore 20. Questo dipende dal fatto che stiamo considerando le frequenze assolute e non quelle relative.
Se non si ritiene opportuno introdurre i concetti di media e scarto quadratico per questa distribuzione si può dare una spiegazione intuitiva del fatto che dopo un eccesso di teste non è necessario un recupero delle croci; si tratta infatti di eventi indipendenti, la moneta non ha memoria!
Se si gioca a Testa e Croce con una scommessa alla pari il gioco è equo, ma ciò non significa che dopo 100 partite si possa essere certi di non aver perso né guadagnato nulla; infatti la probabilità che su 100 lanci vi siano esattamente 50 Teste e 50 Croci è:

$$p_{50} = \binom{100}{50}\cdot\frac{1}{2^{100}} \cong 0{,}08$$

cioè un numero molto piccolo! In caso generale di fronte a $n = 2m$ prove si otterrà sempre un risultato del tipo $\frac{1}{\sqrt{\pi m}}$ [1] e dunque più prove si fanno e minore è la probabilità di avere metà successi e metà fallimenti.
Può essere questa l'opportunità di introdurre il concetto di gioco equo.

Da questa attività dovrebbe emergere il concetto espresso dalla seguente frase:

"*Giocare poche volte a Testa e Croce non è più ma meno rischioso che giocare molte volte…La legge dei grandi numeri non giustifica alcuna speranza che chi è in perdita debba "rifarsi". L'illusorietà e perniciosità di tale fiducia nel"rifarsi"appare sancita anche in una battuta popolare (sembra siciliana), notevole perché in generale le preferenze popolari sembra vadano alla tesi sbagliata. Si tratta della risposta di una donna ad un'amica che le aveva chiesto se era vero che suo figlio aveva perduto una forte somma al gioco: <<Sì, ma questo è niente: il peggio è che vuole rifarsi>>(cfr.:* de Finetti, 1970, vol. 1, pag.384).

[1] Tale risultato si ottiene considerando che, per l'approssimazione di De Moivre – Stirling, è circa $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$