Problemi di minimo nel piano

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, …). Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie. Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato.	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	Spazio e figure Numeri e algoritmi. Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Geometria sintetica e analitica.

L'attività può essere svolta nel primo biennio alla fine del primo anno oppure agli inizi del secondo anno.
Gli strumenti di cui ci si avvale sono la carta e la riga, un software di geometria dinamica e le calcolatrici grafico-simboliche.
Lo studente per affrontare questa attività deve avere una adeguata conoscenza delle simmetrie assiali, delle traslazione, del piano cartesiano, e inoltre deve sapere tabulare numericamente una relazione tra due grandezze. L'obiettivo è quello di utilizzare le proprietà della simmetria assiale e di applicarla in un contesto concreto.

Descrizione dell'attività
Prima fase
L'insegnante distribuisce un foglio su cui sono disegnati una retta e due punti A e B situati nello stesso semipiano rispetto alla retta data, come mostrato nella Figura 1, gli studenti disegnano e misurano con il righello, ordinano numeri.

Consegna 1
Disegnare sulla retta i punti D, E, F, G, misurare la lunghezza delle spezzata ADB, AEB, AFB, AEG con un righello, ordinare le misure effettuate in modo crescente.

Figura 1

Dopo aver raccolto e ordinato le misure, gli studenti osservano che la lunghezza delle spezzate dipende dalla posizione del punto sulla retta e che si può scegliere tra i punti disegnati quello che rende minima la lunghezza della spezzata.

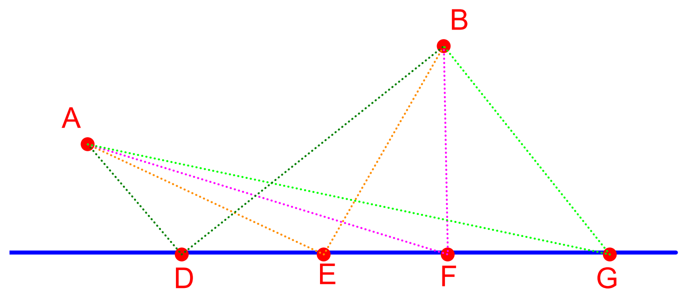
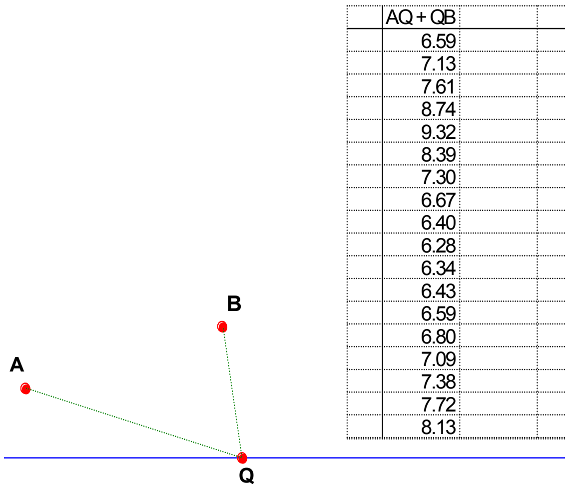


Figura 2

L'insegnante chiede a ognuno di comunicare il valore più piccolo trovato. I valori vengono scritti alla lavagna e si determina il valore più piccolo tra quelli comunicati.
Osservazioni. L'attività precedente permette agli studenti di riflettere sul significato di valore minimo, sulla possibilità di individuarlo tra gli elementi di un insieme finito e comprendere che il valore determinato può non essere quello cercato poiché i casi analizzati non esauriscono tutti i casi possibili.

<u>Seconda fase</u>
Gli studenti, divisi in gruppi, utilizzano tutti lo stesso disegno fatto con un software di geometria, tabulano i valori delle lunghezze dei percorsi sfruttando lo strumento "Tabella" del software di geometria oppure una calcolatrice grafico simbolica.
Consegna 2
Rappresentare i percorsi da A a B che toccano la retta nel punto Q, tabulare i valori trovati in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere quello che si osserva.
Gli studenti leggono la tabella per trarre informazioni (Figura 3), determinano il valore minimo tra quelli tabulati, inoltre, riescono a individuare graficamente la zona in cui il percorso ha lunghezza minima.
L'insegnante chiede agli studenti di rappresentare graficamente l'andamento della lunghezza dei percorsi.

Consegna 3
Costruire, con l'ausilio dello strumento "Luogo" del software di geometria, il grafico della variazione della lunghezza dei percorsi AQB in funzione della posizione del punto Q sulla retta. Descrivere quello che si osserva.
Gli studenti costruiscono il luogo di punti, imparano a interpretare le informazioni date dal grafico, congetturano che esiste almeno un punto Q, sulla retta, corrispondente al percorso di minima lunghezza (Figura 4).



	AQ+QB	
	6.59	
	7.13	
	7.61	
	8.74	
	9.32	
	8.39	
	7.30	
	6.67	
	6.40	
	6.28	
	6.34	
	6.43	
	6.59	
	6.80	
	7.09	
	7.38	
	7.72	
	8.13	

Figura 3

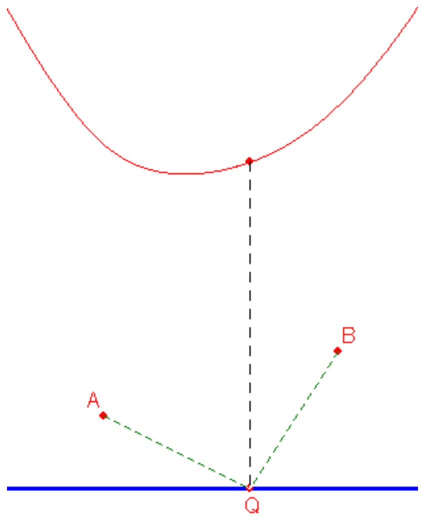


Figura 4

<u>Terza fase</u>

Realizzazione di un’esperienza concreta con gli specchi (per osservare la riflessione delle immagini sugli specchi piani e intuire la caratterizzazione geometrica del percorso di lunghezza minima).

Consegna 4

Analizzare con il software di geometria l’immagine che riproduce la riflessione di un foglio di carta sul quale sono disegnati due punti posto perpendicolarmente allo specchio. Tracciare e misurare i segmenti che uniscono i punti. Descrivere quello che si osserva.

Gli studenti osservano sulla riproduzione della foto quattro punti (Figura 5a), quelli disegnati sul foglio e quelli ottenuti come loro immagini nella riflessione.

Tracciano i segmenti che uniscono rispettivamente il punto A con il punto A’, riflesso del punto A, e con il punto B’, riflesso del punto B, e i segmenti che uniscono rispettivamente il punto B con il punto B’, riflesso del punto B, e con il punto A’, riflesso del punto A (Figura 5b).

La discussione porta gli studenti a osservare che:

- i segmenti AB’ e A’B si intersecano in un punto P;
- i segmenti AA’ e BB’ sembrano essere perpendicolari al bordo del foglio appoggiato contro lo specchio;
- il punto P sembra appartenere all’asse di riflessione.

Inoltre, dopo aver misurato i segmenti, il punto P sembra essere equidistante da A e dal suo riflesso e così anche da B e dal suo riflesso.

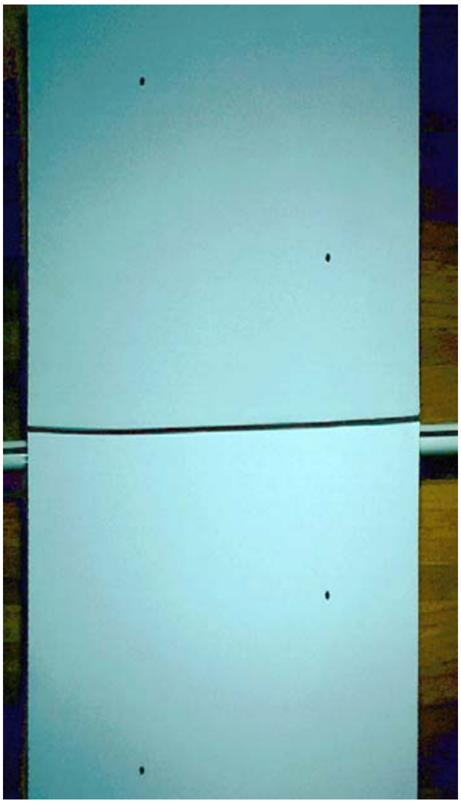


Figura 5a

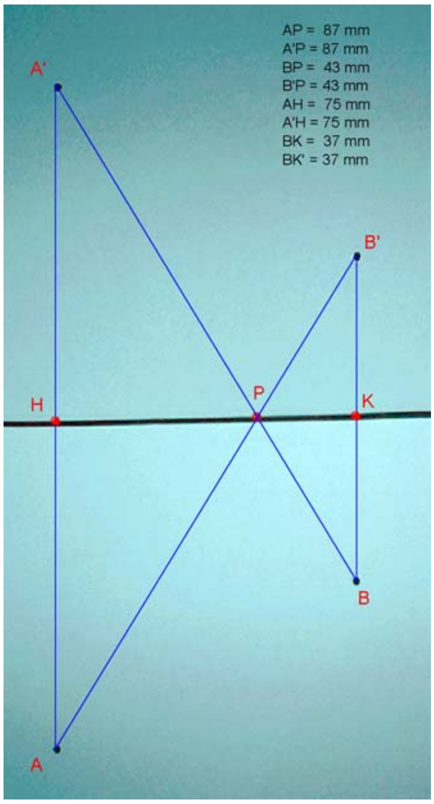


Figura 5b

Si termina con la formulazione della congettura che segue:
l'immagine ottenuta con lo specchio si può costruire mediante la simmetria assiale che ha per asse la retta che passa per P ed è perpendicolare ai segmenti AA' e BB'.

<u>Quarta fase</u>

Gli studenti rappresentano con il software di geometria quanto osservato nella consegna precedente (Figura 6a).

Consegna 5

Riprodurre con il software di geometria la configurazione dei punti A e B e dei loro riflessi A' e B'.

<u>Quinta fase</u>

Gli studenti riconoscono che APB è uno dei possibili percorsi che collega il punto A con il punto B. Individuano, con l'aiuto dell'insegnante, le proprietà che caratterizzano il punto della retta che rende minimo il percorso che collega il punto A al punto B toccando la retta.

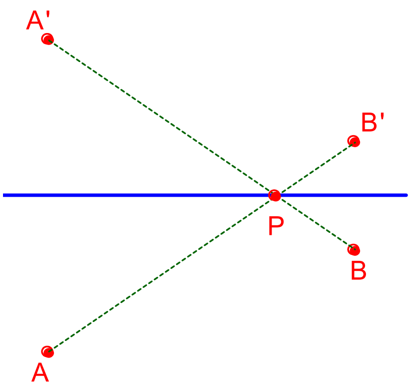


Figura 6a

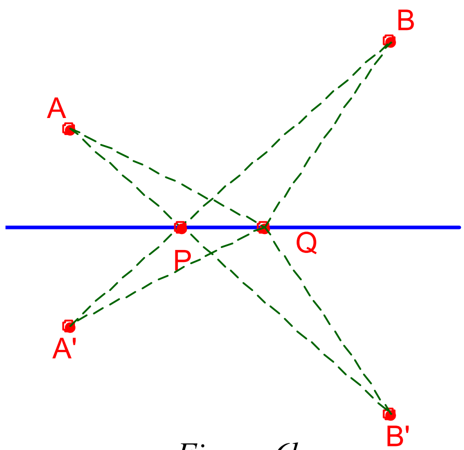


Figura 6b

Consegna 6
Prendere sull’asse di riflessione un punto Q diverso dal punto P e collegarlo con il punto A, con il punto B e con il punto B’ (Figura 6b). Misurare il percorso APB, AQB, AQB’. Descrivere quello che si osserva.
Questa fase di congettura e scoperta permette agli studenti, servendosi della possibilità offerta dal software, di modificare la configurazione trascinando il punto Q. In questo modo individuano la proprietà che caratterizza la posizione del punto che rende minimo il percorso.
Congettura:
Il punto di minimo percorso corrisponde al punto P intersezione del segmento AB’ con l’asse di riflessione.
Consegna 7
Dimostrare o confutare la congettura precedente.
Gli studenti utilizzano le conoscenze acquisite nel corso dell’attività per svolgere una dimostrazione in geometria.
Per le proprietà della simmetria assiale la lunghezza del percorso AQB’ è uguale alla lunghezza del percorso AQB. Quindi il percorso APB è quello di lunghezza minima.
L’insegnante chiede agli studenti di confrontare le ampiezze degli angoli che l’asse di riflessione forma rispettivamente con il segmento AQ e con il segmento BQ.

Consegna 8
Misurare, con l’aiuto del software di geometria, l’angolo AQX e l’angolo AQY. Trascinare il punto Q sull’asse di riflessione (Figura 7). Descrivere quello che si osserva.

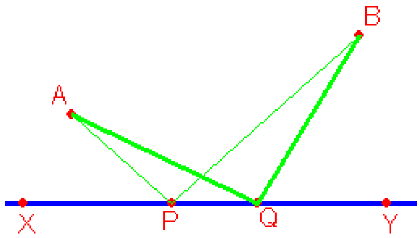


Figura 7

Gli studenti osservano che se Q coincide con P gli angoli sono uguali, formulano la seguente congettura: Gli angoli APX e BPY hanno la stessa ampiezza.
Consegna 9
Dimostrare o confutare che APX e BPY sono angoli uguali.
Gli studenti osservano nuovamente la costruzione fatta nella Consegna 6: l’ampiezza dell’angolo APX è uguale all’ampiezza dell’angolo XPA’, in quanto corrispondenti nella simmetria assiale. Inoltre l’ampiezza dell’angolo XPA’ è uguale all’ampiezza dell’angolo BPY perché angoli opposti al vertice. Ne segue che l’ampiezza dell’angolo APX è uguale all’ampiezza dell’angolo BPY.

<u>Sesta fase</u>

Gli studenti sono ora in grado di descrivere il fenomeno della riflessione in termini matematici
Consegna 10
Descrivere il fenomeno della riflessione rispetto a uno specchio piano.

<u>Settima fase</u>
Gli studenti descrivono con l’uso delle coordinate il percorso di minima lunghezza.

Consegna 11
Dato il punto A(0, 1) e B(1, 2) determinare il punto A’ corrispondente di A rispetto alla simmetria il cui asse è l’asse delle ascisse. Scrivere l’equazione della retta *r* passante per i punti A e B.

Determinare il punto P di intersezione della retta *r* con l'asse *x*. Scelte a piacere le coordinate del punto A e del punto B, determinare le coordinate del punto P come nel caso precedente.
Gli studenti utilizzano la definizione sintetica di simmetria assiale e individuano le coordinate del punto A'.
Risolto questo problema, l'attenzione è rivolta alla strategia risolutiva; quindi, con l'aiuto di una calcolatrice grafico-simbolica, utilizzata come "scatola nera", determinano l'equazione della retta e il suo punto di intersezione con l'asse *x* (Figura 7a e Figura 7b).
Assegnati alle coordinate dei punti A e B nuovi valori, con le ordinate positive, ottengono, con l'istruzione della calcolatrice di "assegnazione di valore a una variabile", il ricalcolo dei vari passi.
Dopo questa attività, acquisita la consapevolezza della procedura di soluzione, gli studenti possono affrontare il caso generale.

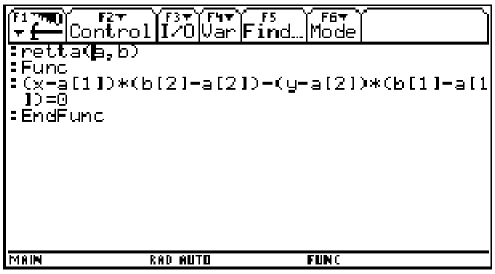


Figura 7a

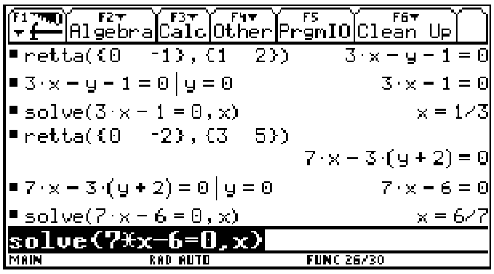
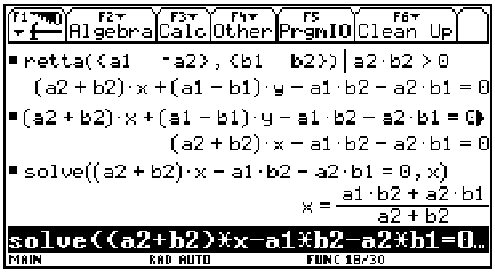


Figura 7_b

Consegna 12
Determinare le coordinate del punto P sull'asse delle ascisse che determina il percorso di minima lunghezza congiungente il punto A(a_1, a_2) al punto B(b_1, b_2). Descrivere l'algoritmo che ha come dato iniziale le coordinate dei punti A e B e come dato finale le coordinate del punto P.
Gli studenti traducono formalmente le scelte fatte nella consegna precedente: devono saper scrivere la condizione di appartenenza allo stesso semipiano dei punti A e B rispetto all'asse delle ascisse.
Risolto questo problema determinano, sempre con l'aiuto della calcolatrice grafica, l'ascissa del punto che individua il percorso di minima lunghezza tra A e B (Figura 8a) e discutono alcuni casi particolari (Figura 8b).



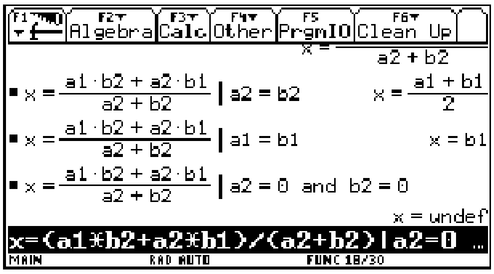


Figura 8a *Figura 8b*

Analizzano il caso in cui i punti A e B appartengono a semipaini opposti rispetto all'asse delle ascisse e determinano, anche in questo caso, l'ascissa del punto che individua il percorso di minima lunghezza.
A questo punto gli studenti, dopo aver acquisito padronanza sull'uso delle istruzioni condizionali "se … allora … altrimenti …" e sulla rappresentazione dei vettori di dimensione due, descrivono l'algoritmo per determinare il punto che rende minima la lunghezza del percorso (Figura 9a e Figura 9b).

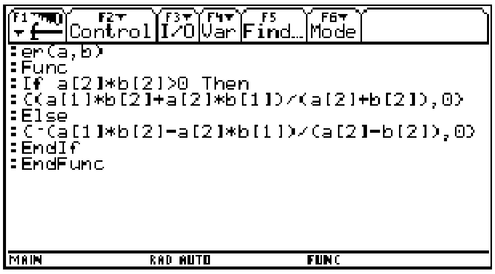


Figura 9a

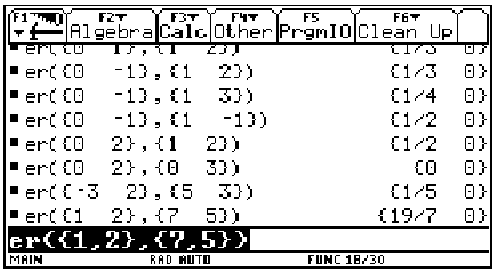


Figura 9b

Come approfondimento si può affinare l'algoritmo precedente aggiungendo l'analisi del caso in cui almeno uno dei due punti ha ordinata uguale a zero.

Possibili sviluppi

1. Date due località A e B da parti opposte rispetto alla riva di un fiume dall'andamento rettilineo, individuare dove collocare un ponte sul fiume in modo da rendere minima la lunghezza del percorso che collega la località A alla località B (Si suppone che le sponde siano parallele e che il ponte venga costruito perpendicolarmente alle sponde).
2. Date due rette *l*, *m* e due punti P ed S situati come nella Figura 10, determinare il percorso di minima lunghezza che va da P a S toccando prima la retta *l* e poi la retta *m*.

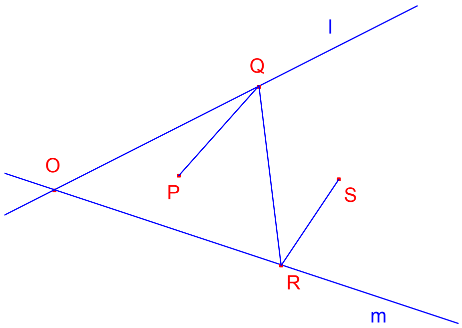


Figura 10

3. Determinare, fra tutti i triangoli PQR aventi l'area assegnata e un lato assegnato c = PQ, quello per cui è minima la somma degli altri lati a = PR e b = RQ.
4. Dati il triangolo acutangolo ABC, determinare i tre punti R, S e T, appartenenti ordinatamente ai suoi tre lati, in modo che il perimetro del triangolo RST sia minimo.