Il problema delle parti

Livello scolare: 1° biennio.

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi dipendenti e indipendenti.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato di probabilità e sue valutazioni. Probabilità condizionata, probabilità composta; probabilità totale.	<u>Dati e previsioni</u> Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia

Contesto
Giochi, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito probabilistico; ha anche aspetti collegati ai giochi.
Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, in una prima o seconda classe del primo biennio; non è richiesto alcun prerequisito di calcolo delle probabilità. L'attività ha come obiettivo primario proprio quello di introdurre al pensiero probabilistico e va quindi svolta secondo i tempi della didattica lunga, tipici del contesto laboratoriale, dando agli studenti il tempo necessario per appropriarsi dei concetti e delle prime tecniche del calcolo delle probabilità. L'attività è suscettibile di ulteriori sviluppi nel secondo biennio, quando si voglia introdurre o applicare la distribuzione binomiale.
Il contesto è quello dei giochi, con la storia della matematica che dovrebbe favorire la costruzione di significati, presentando genesi ed evoluzione del concetto di probabilità. In questo caso la storia della matematica funge anche da elemento motivante, soprattutto quando evidenzia che le soluzioni non adeguate degli studenti al problema proposto sono state date, nel corso della storia, dai matematici che hanno affrontato lo stesso problema: questa considerazione dà dignità agli "errori" degli studenti e fa capire che, talvolta, una risoluzione adeguata e soddisfacente a un problema può essere determinata solo con un cambio di prospettiva reso possibile dallo sviluppo di nuovi concetti, come, in questo caso, quello di probabilità.

Descrizione dell'attività
Il problema che viene proposto in questa attività è noto in letteratura come "problema della divisione della posta in gioco" o "problema delle parti". La prima versione che ci è nota è presente in un manoscritto di anonimo del 1400 circa, anche se il problema deve la sua fama a Luca Pacioli, che lo propose nel 1494 nella *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*.
Il problema riguarda la suddivisione della posta fra due giocatori di "uguale valore" (ossia che hanno la stessa probabilità di guadagnare un punto), che sono costretti a interrompere la partita prima che uno di essi abbia totalizzato il numero di punti necessario per vincere la partita.
L'attività viene strutturata in quattro fasi. Nella prima si propone di risolvere il problema in piccoli gruppi di lavoro (ovviamente) collaborativi; nella seconda, in una discussione matematica rivolta all'intera classe, si evidenziano i dati del problema e alcuni modi di rappresentarli e si discutono le

soluzioni proposte dai vari gruppi; nella terza fase si ricostruiscono i gruppi con la consegna di sistemare il procedimento risolutivo prima proposto, alla luce dei nuovi elementi emersi nella discussione collettiva. Nella quarta fase, infine, si passa alla discussione di bilancio, nella quale si costruiscono, gradualmente, le tecniche necessarie alla risoluzione del problema, eventualmente traendo spunto dalla storia della matematica e, in particolare, dalle soluzioni proposte da Pascal e da Fermat.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante propone la "situazione – problema" sotto riportata a gruppi collaborativi formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).
Situazione – problema:
In una taverna del piccolo paese di Matelandia, Ariele e Calibano giocano a testa e croce con una moneta a due facce non truccata. A ogni lancio viene assegnato 1 punto al giocatore che indovina l'esito. Vince tutta la posta di 24 denari (12 dei quali sono di Ariele e 12 di Calibano) chi per primo totalizza 6 punti.
I giochi d'azzardo sono però proibiti a Matelandia e il gendarme Prospero, venuto a conoscenza della partita che si sta giocando, si avvia verso la taverna per arrestare Ariele e Calibano. Informati del pericolo, i due giocatori interrompono la partita sul 5 a 3 per Ariele e fuggono, ciascuno con i 12 denari messi per formare la posta, concordando di ritrovarsi il giorno dopo senza finire la partita ma solo per dividere equamente la posta in gioco.
Problema:
Come dovrebbero, Ariele e Calibano, dividersi i 24 denari in modo tale che la suddivisione sia equa, ossia in modo tale da tenere conto del fatto che avevano contribuito alla posta con 12 denari ciascuno e che quando la partita è stata interrotta il punteggio era 5 a 3 per Ariele?
Tutte le volte che il problema è stato proposto a studenti del primo biennio che non avevano ancora affrontato sistematicamente il calcolo delle probabilità, la prima reazione è stata di stupore, perché il problema è ritenuto troppo facile, banale. Ci si può aspettare che, in breve tempo, i vari gruppi di studenti giungano a proporre la seguente risoluzione (o una equivalente): dividere la posta, ossia i 24 denari, per il numero totale di partite giocate, e moltiplicare il risultato prima per 5, per ottenere i denari spettanti ad Ariele, poi per 3, in modo da ottenere quelli di Calibano.
L'insegnante deve verificare, prima di passare alla seconda fase, che gli tutti studenti abbiano raggiunto un buon livello di fiducia nella risoluzione proposta.

<u>Seconda fase</u>
L'insegnante avvia una discussione matematica alla presenza dell'intera classe, invitando i rappresentanti di alcuni gruppi a presentare la propria strategia risolutiva[1]. L'insegnante deve aver cura di predisporre la classe alla discussione collettiva, sia lodando il lavoro fino ad allora svolto, sia ricordando che tra gli elementi di valutazione della discussione vi è la capacità di analisi critica delle idee altrui.
In seguito l'insegnante fa notare che, in generale, i dati del problema sono il numero n di punti necessari per vincere la partita e i numeri a e b di punti che hanno totalizzato, rispettivamente, i due giocatori al momento dell'interruzione della partita. Tali dati possono essere rappresentati con la notazione $[n: a ; b]$ ove a e b sono numeri naturali minori di n, ma anche con la notazione $[-p; -q]$, dove p e q sono i punti che mancano, al momento dell'interruzione della partita, rispettivamente al primo e al secondo giocatore per vincere l'intera posta. In questo momento l'insegnante si limita a

[1] Non è necessario che tutti gli studenti presentino la soluzione proposta, soprattutto se le strategie risolutive sono fortemente simili, come avviene spesso in questo caso. L'insegnante invita un gruppo a presentare la propria strategia risolutiva e a chiedere agli altri gruppi di limitarsi a interventi che servano per precisare, aggiungere qualcosa o, eventualmente, per criticare e contestare le strategie risolutive proposte dal gruppo che ha iniziato le presentazioni.

presentare le due differenti modalità di rappresentazione dei dati a disposizione, senza evidenziare che la seconda modalità è enormemente più suggestiva della prima[2].
A questo punto l'insegnante ha il compito di mettere in crisi la fiducia degli studenti nella soluzione proposta. Allo scopo può chiedere a qualche studente di giocare a testa e croce, contro di lui. Se il numero degli studenti è sufficientemente elevato, è abbastanza probabile che si verifichi la situazione che vede l'insegnante, dopo il primo lancio della moneta, vincere per 1 a 0 su uno studente. Si tratta di una situazione critica che consente all'insegnante di mettere in crisi la fiducia degli studenti nella soluzione proposta (quella di dividere la posta in parti direttamente proporzionali al punteggio dei due giocatori). Infatti, se la partita viene interrotta sull'1 a 0 per l'insegnante, con la strategia di suddividere la posta in parti direttamente proporzionali ai punteggi dei due giocatori, tutta la posta andrebbe all'insegnante e nulla allo studente. Ma quale studente è disposto ad accettare una suddivisione di questo tipo visto che sta perdendo solo per 1 a 0 e avrebbe ancora ottime possibilità di recuperare? La proposta di suddividere in parti proporzionali al punteggio appare, in questo caso, manifestamente non equa.
L'insegnante, per far capire agli studenti che la strategia risolutiva da loro proposta ha comunque una propria dignità e non è indice di ingenuità e superficialità da parte loro, può far presente che la stessa soluzione è stata proposta nel 1494 da Luca Pacioli, un grande matematico, secondo cui la suddivisione equa sarebbe stata di 15 denari per Ariele e di 9 per Calibano, ossia la stessa suddivisione proposta da alcuni degli studenti. Inoltre il problema, nonostante i tentativi di risoluzione di altri matematici, come Cardano, Tartaglia e di Pietro Cataneo, non fu risolto in modo soddisfacente fino alla metà del diciassettesimo secolo, quando fu data una risposta adeguata con Pascal e, indipendentemente, con Fermat.
L'insegnante, in questa fase, può approfittare dell'occasione per fissare l'attenzione su alcuni termini come suddivisione in parti direttamente proporzionali al punteggio e suddivisione equa, iniziando a precisarne il significato.

<u>Terza fase</u>

Per trovare una strategia risolutiva alternativa, che possa soddisfare tutti i componenti della classe l'insegnante può ricostituire i gruppi di studenti invitandoli a ripensare alla strategia risolutiva, cercando di trovarne una che sia adeguata anche alla trattazione di casi limite come quello dell' 1 a 0 per uno dei giocatori.
L'insegnante, in questa fase, deve intervenire sistematicamente nei gruppi di lavoro per evitare che si sclerotizzino posizioni semplificatrici del tipo "la partita può essere ripresa in seguito a partire dal punteggio sul quale è stata interrotta" oppure "si divide la posta a metà indipendentemente dal punteggio" o, ancora, "se il gioco d'azzardo è proibito, allora i giocatori devono essere multati e non spetta loro alcuna somma". Si dovrebbe far presente agli studenti che le risoluzioni proposte non devono far perdere senso al problema: la strategia di cambiare le richieste di un problema quando non lo si sa risolvere porta a non soddisfare la richiesta iniziale. Se Ariele e Calibano hanno chiesto aiuto per risolvere il loro problema, l'obiettivo dell'insegnante e quello degli studenti è cercare di risolverlo con i vincoli che loro hanno imposto e non quello di cambiare il problema posto.
In questa terza fase ci si aspetta che da qualche gruppo di lavoro emergano soluzioni che affermino che una suddivisione equa deve tenere conto non solo delle partite giocate, ma anche di quelle che rimangono da giocare per raggiungere i 6 punti necessari a vincere l'intera posta (è stato osservato, in alcuni gruppi di lavoro, l'attenzione esclusiva, con tipico pensiero probabilistico, alle sole partite che ancora rimangono da giocare).

---

[2] Con la seconda modalità, infatti, si fissa l'attenzione sul numero di punti che ancora servono per vincere e non sul punteggio ottenuto al momento dell'interruzione: è il cambio di orizzonte richiesto dal pensiero probabilistico (non guardare a quanto è già accaduto, ma prendere in considerazione ciò che deve ancora accadere o, meglio, il mondo degli eventi possibili, per effettuare previsioni).

Può essere interessante osservare se gli studenti, inconsapevolmente, ripropongano alcune strategie risolutive che i matematici che si sono occupati del problema hanno fatto pervenire attraverso testi a stampa[3]. Se questa situazione si verifica, è possibile utilizzare le fonti storiche in una specie di gioco "voci – eco", nel quale le voci della storia, ossia le soluzioni proposte dai matematici, fanno eco alle voci della classe, ossia alle soluzioni proposte dagli studenti. In alcuni casi le voci della storia danno dignità agli errori commessi dagli studenti; altre volte contribuiscono a dar forza a idee espresse da alcuni studenti, consentendo che esse vengano riconosciute da tutta la classe diventando, a tutti gli effetti, oggetto di discussione. Ciò, oltre a consentire di creare un atteggiamento riflessivo nei confronti dei concetti messi in gioco nel problema, favorisce l'instaurarsi e lo svilupparsi della discussione matematica con inevitabili benefici per la socializzazione e la condivisione del sapere.

Quarta fase

L'insegnante si incarica di proporre una sistemazione delle varie soluzioni proposte e della loro evoluzione verso la soluzione ottenuta utilizzando il calcolo delle probabilità. Sottolinea il fatto che in questa soluzione la prospettiva, rispetto alla suddivisione in parti direttamente proporzionali al punteggio al momento dell'interruzione del gioco, è profondamente cambiata: per suddividere la posta l'attenzione è rivolta ai punti che mancano per vincere e non a quelli già ottenuti dai due giocatori (può essere utile a questo punto ritornare sulle due modalità di rappresentazione dei dati del problema proposto, commentando la maggiore utilità della notazione [- p ; - q]). L'idea è quindi quella di suddividere la posta in parti proporzionali alle possibilità che i due giocatori avrebbero di vincere l'intera posta al momento dell'interruzione, se il gioco potesse continuare. Il problema diventa quindi quello di misurare tale possibilità.
A questo punto l'insegnante può utilizzare le voci della storia, presentando in classe una sintesi dell'approccio di Pascal e di quello di Fermat alla risoluzione del problema, oppure può limitarsi a presentare alcuni elementi di calcolo delle probabilità, in particolare la legge delle probabilità totali e delle probabilità composte, magari con qualche cenno all'uso dei diagrammi ad albero come strumento di efficace rappresentazione di situazioni probabilistiche. Sia in un caso che nell'altro, la presentazione non può essere confinata in tempi e spazi angusti, per la delicatezza dei concetti coinvolti e quindi deve avere i ritmi e i tempi della didattica lunga.
Qui di seguito si dà un primissimo cenno dell'approccio alla risoluzione del problema da parte di Pascal e si propone poi una soluzione con il moderno linguaggio dei diagrammi ad albero.

Soluzione "alla Pascal"	tradotta in termini moderni
Sul punteggio di 5 a 3 per Ariele, se si gioca un'altra partita e se Ariele vince, allora ad Ariele va l'intera posta, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 4. Allora ad Ariele spetta almeno metà della posta, ossia 12 denari. Sul 5 a 4 per Ariele, se si gioca un'altra partita e Ariele vince, allora ritira tutta la posta rimanente, mentre se vince Calibano vanno sul 5 a 5. Allora ad Ariele vanno, oltre ai 12 denari già stabiliti, almeno la metà dei 12 rimanenti, ossia 12+6= 18. Sul 5 a 5 si può giocare al più un'altra partita. Chi fra Ariele e Calibano vince ritira tutta la stessa posta rimanente. Quindi, se interrompono sul 5 a 5	La speranza di vittoria di Ariele è legata al verificarsi di almeno una fra le seguenti successioni di eventi: E_1 ; E_2E_1 ; $E_2E_2E_1$ Ove: E_1 è l'evento "Ariele guadagna un punto"; E_2 è l'evento "Calibano guadagna un punto". Poiché E_1 ed E_2 hanno probabilità ½ , per la regola della probabilità composta di eventi indipendenti, si ha che E_1, E_2E_1, $E_2E_2E_1$ hanno, rispettivamente, probabilità uguali a 1/2 , 1/4, 1/8. Quindi la probabilità che Ariele ha di vincere è, per la regola sulla probabilità totale

[3] A questo proposito si può far riferimento a uno dei lavori riportati nei riferimenti bibliografici.

devono dividersi la posta rimanente, ossia 3 denari a testa. Quindi, se il gioco viene interrotto sul 5 a 3 per Ariele, ad Ariele vanno 12+6+3=21 denari, mentre a Calibano ne spettano 24-21=3.	per eventi incompatibili, 1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8. Un'equa ripartizione dei 24 denari può essere effettuata suddividendo la posta in parti proporzionali alle probabilità di vittoria dei due giocatori: 21 denari ad Ariele e 3 a Calibano.

Risoluzione con l'aiuto dei diagrammi ad albero
Il seguente diagramma ad albero prende in considerazione tutte le possibili situazioni che potrebbero verificarsi se la partita continuasse, invece di essere interrotta sul 5 a 3 per Ariele (A indica la vittoria di Ariele e C quella di Calibano).

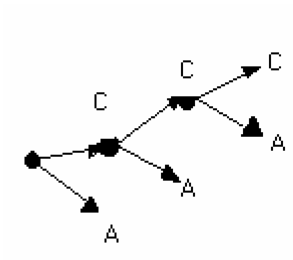

Figura 1

Il diagramma ad albero di Figura 1 consente di visualizzare lo spazio delle situazioni possibili: in questo caso è uno strumento particolarmente indicato, in quanto la partita è stata interrotta sul 5 a 3 e quindi lo spazio delle situazioni possibili non è eccessivamente complesso. Si fa notare agli studenti che Calibano, per arrivare a sei punti prima di Ariele, deve vincere tre partite consecutive senza che Ariele ne vinca alcuna. Ciò vuol dire che la probabilità di vincita di Calibano è $\frac{1}{8}$, mentre quella di Ariele è $\frac{7}{8}$. La suddivisione della posta in parti direttamente proporzionali alla probabilità che i due giocatori avrebbero di vincere il gioco al momento dell'interruzione, se questo fosse continuato è quindi 21 denari per Ariele e 3 per Calibano.

Possibili sviluppi
- Introduzione del concetto di gioco equo e relative applicazioni.
- La generalizzazione del problema della parti al caso [*n*: *a* ; *b*] e la distribuzione binomiale.
- Lettura e analisi del carteggio Pascal – Fermat sul problema delle parti.
- Il problema dei compleanni.

Elementi di prove di verifica

1. Un'urna contiene 6 palline nere e 5 bianche. Si eseguono due estrazioni successive, rimettendo, dopo la prima estrazione, la pallina estratta nell'urna. Qual è la probabilità di ottenere
a) due palline nere
b) una pallina bianca e una nera

2. Sia data un'urna contenente 5 palline, di cui 2 azzurre e 3 bianche. Effettuando due estrazioni successive in ciascuna delle quali si estrae una sola pallina che poi si inserisce nuovamente nell'urna, calcolare la probabilità di ottenere i seguenti eventi:
a) due palline azzurre
b) una pallina azzurra e una bianca

3. Un'urna contiene palline bianche, nere e rosse; sapendo che la probabilità di estrarre una pallina nera è 1/2, che quella di estrarre una pallina nera o bianca è 2/3 e che vi sono 2 palline bianche, è possibile determinare il numero di palline rosse e quello di palline nere? In caso di risposta negativa spiega perché; in caso di risposta affermativa, determina tali numeri.

4. Qual è la probabilità che, lanciando due volte un dado cubico regolare, con facce numerate da 1 a 6, escano due numeri multipli di 3?

5. Sapendo che, al gioco del Lotto, sulla ruota di Napoli il 12 non è uscito per 80 settimane e che il 20 è stato estratto nelle due ultime settimane, possiamo dire che alla prossima estrazione è più probabile che esca il 12 rispetto al 20? Perché?

6. Una classe è composta da 9 maschi e 11 femmine. Per partecipare a una rappresentazione musicale studentesca vengono estratti tre nominativi. Qual è la probabilità che almeno uno di essi sia quello di una studentessa?

7. Un numero di 5 cifre viene scritto nel sistema binario con la seguente procedure:
a) si scrive il numero 1
b) si estraggono da un'urna (contenente cento cartellini con la cifra 0 e cento cartellini con la cifra 1) quattro cartellini in successione, rimettendo ogni volta i cartellini estratti nell'urna e scrivendo, a ogni estrazione, la cifra estratta di seguito a quelle già scritte.

Qual è la probabilità che si ottenga, in questo modo, un numero minore del numero che, in base dieci, si rappresenta con la scrittura 30?

8. In un sacchetto vi sono palline indistinguibili fra loro al tatto, ma colorate in modo diverso. Alcune sono blu, altre rosse, altre verdi. Non ci sono palline di altri colori. La probabilità di estrarre a caso una pallina rossa è 1/2; la probabilità di estrarre una pallina che non sia blu è 4/5. Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Che cosa sai dire sul numero totale di palline contenute nel sacchetto? Secondo te, quale somma dovrebbero scommettere tre giocatori, ciascuno su un colore diverso, per incassare 350 Euro in caso di vincita? Giustifica la risposta.

9. L'estrazione di due carte da un mazzo di 40 carte può essere condotta in due modi differenti. Nel primo, si estrae a caso dal mazzo una carta e poi si estrae una seconda carta senza rimettere nel mazzo la prima. Nel secondo modo, dopo aver estratto la prima carta, questa viene rimessa nel mazzo e quindi ne viene estratta una seconda. Per avere la maggior probabilità di estrarre due carte di cuori, quale modalità di estrazione sceglieresti? Giustifica la risposta.

10. Due sacchetti contengono cinque bussolotti ciascuno, all'interno dei quali è contenuta una lettera dell'alfabeto. Nel sacchetto A vi sono le cinque lettere della parola "pappa" e nel sacchetto B le cinque lettere della parola "posta". Viene estratta a caso una lettera dal sacchetto A e introdotta nel sacchetto B. In seguito viene estratta una lettera dal sacchetto B che viene introdotta in A. Qual è la probabilità che, effettuata l'esperienza a due prove descritta, la composizione dei due sacchetti sia uguale a quella originaria (ossia quella che essi possedevano prima che venisse effettuata l'esperienza a due prove)?

Griglia di correzione

1. 36/121 e 60/121
2. 4/25 e 12/25
3. 2 bianche, 4 rosse, 6 nere
4. 1/9
5. No, le successive estrazioni settimanali al gioco del lotto sono eventi fra loro indipendenti.
6. 1 – (9/20)(8/19)(7/18)
7. 7/8
8. *p(R)* = 1/2 ; *P(V)* = 3/10; *p(B)* = 1/5 . Possiamo però dire che le palline rosse sono il 50% del totale, che le blu sono il 20% e le verdi il 30%. Un giocatore che decidesse di puntare sull'evento "esce la pallina verde" dovrà quindi pagare un premio pari al 30% della somma che vincerebbe. Il 30% di 350 euro dà 105 euro. Il 50% di 350 euro dà 175 euro. Il 20% di 350 euro dà: 70 euro. Ovviamente 70+105+175=350. Si può anche dire che le palline sono almeno 10.
9. È più conveniente la seconda modalità.
10. 1/3