La fabbrica dei cioccolatini

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare in casi semplici la composizione di funzioni note per studiare nuove funzioni. Costruire modelli, sia discreti che continui, di crescita o decrescita lineare, di crescita o decrescita esponenziale, di andamenti periodici.	Esempi di funzioni e dei loro grafici: funzione potenza, funzioni polinomiali, la funzione "modulo", funzioni definite a tratti, semplici funzioni razionali. Semplici esempi di successioni: approccio intuitivo al concetto di limite Incrementi a passo costante, pendenza media.	<u>Relazioni e funzioni.</u> Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi	Economia

Contesto
Vita sociale.

Il problema porta ad elaborare un modello che contiene due componenti: una di proporzionalità diretta e una di proporzionalità inversa.
Lo studio della loro interazione reciproca porta a comprendere che il fenomeno analizzato ha tre aspetti distinti, a seconda che prevalga la proporzionalità diretta, quella inversa o che le due si equilibrino.

Descrizione dell'attività
Obiettivo dell'attività è quello di modellizzare matematicamente una situazione concreta, nei limiti del possibile. Si tenga conto che le situazioni reali sono molto "sporche", nel senso che possono essere descritte da un numero elevato di relazioni che mettono in gioco un grande numero di variabili. In questo consiste la loro ricchezza e significatività. D'altra parte, la matematizzazione richiede sempre delle semplificazioni.
Il modello può essere più o meno sofisticato e dare ragione in forma più o meno adeguata del fenomeno che tratta. Gli elementi di un modello consistono nel suo potere esplicativo e predittivo. In questo senso, esso interpreta il fenomeno nell'ambito di una teoria, che ne dà conto, a meno di una data approssimazione.
La formula che si costruisce nell'attività è un modello della situazione.
Di solito, un modello ha senso per un ambito ristretto di valori numerici, al di fuori dei quali l'interpretazione perde di significato concreto. Nonostante ciò, tenere conto anche di questi valori, può talvolta aiutare a comprendere meglio i rapporti di interdipendenza tra le grandezze in gioco.

Nell'attività si usano due strumenti per interpretare il problema concreto: quello grafico (il piano cartesiano) e quello algebrico (le formule).

Il cambiamento di quadri di riferimento è cognitivamente rilevante: stimola negli studenti la flessibilità di pensiero necessaria a comprendere, da un lato come il modello sia un'interpretazione della realtà, dall'altro come le formule della matematica siano una generalizzazione ed astrazione di situazioni concrete.

Ecco il problema "idealizzato", ma che corrisponde a una situazione reale:

Cioccolatini.
Una ditta produce cioccolatini e li può confezionare in scatole più o meno grandi: si vuole valutare la situazione più conveniente.

A parte una spesa fissa, ovviamente i costi aumentano proporzionalmente alla quantità di cioccolatini prodotti. Si può assumere, invece, che il costo delle confezioni incida di più nel caso che la confezione contenga pochi cioccolatini e che sia più conveniente per l'acquirente se la confezione contiene più cioccolatini.
Naturalmente, nella modellizzazione si trascurano molti parametri e si fanno approssimazioni forti; nulla vieta, però, che una volta che una volta compreso intuitivamente il funzionamento del modello, si possano elaborare interpretazioni più sofisticate.
Detta x la quantità di cioccolatini prodotta, il costo y è dovuto alla somma di:

a) una parte proporzionale a x (ax, con a opportuno coefficiente);
b) una parte inversamente proporzionale a x, (b/x , con b opportuno coefficiente);
c) una spesa fissa, che indichiamo con c.

Un modello che descrive la situazione è quindi del tipo: $y = ax + b/x + c$

Per avere un'idea dell'andamento grafico della funzione non occorre conoscere l'Analisi: gli strumenti informatici di cui si dispone nelle scuole permettono di tracciare grafici per svariati valori dei parametri a, b, c. Nella Figura 1 sono riportati i grafici corrispondenti ai valori a = 0,12; a = 0,24; a = 0,48; con b=7,25; c=4.

Utilizzando i registri algebrico e grafico si può osservare quali modifiche si generano con il variare dei parametri e interpretare tali variazioni nella situazione descritta.
Ciò è cruciale per comprendere il ruolo dei parametri nelle formule; per questo i software dinamici risultano un supporto molto valido.

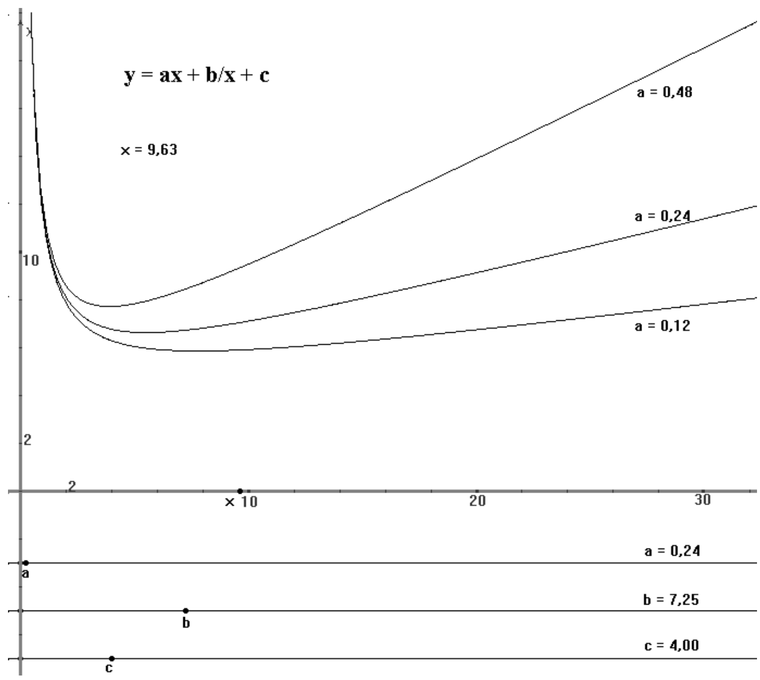

Figura 1

Per non appesantire l'attività con il calcolo, che non è la finalità di questa unità di lavoro, si può utilizzare un software (eventualmente già predisposto dall'insegnante) che permetta di evidenziare il comportamento della funzione al variare dei parametri *a, b, c.*
Nella figura i tre parametri sono indicati come punti vincolati sulle tre rette parallele all'asse x, disegnate in basso: l'ascissa dei tre punti fornisce il valore corrente del parametro. Inoltre, un quarto punto x, vincolato sull'asse x, rappresenta il valore corrente della variabile, cioè il numero di cioccolatini (il modello richiederebbe solo valori interi non negativi, ma la rappresentazione è fatta

nel continuo e va reinterpretata considerando solo i valori discreti. Non ha infatti senso considerare confezioni con 23,5 cioccolatini, anche se il modello dice quale sarebbe virtualmente il costo anche con mezzo cioccolatino!).
Si può costruire la formula $ax + b/x + c$ e il valore y che corrisponde ai valori correnti dei parametri e della variabile x, disegnando così il grafico della funzione:

$$f: x \rightarrow ax + b/x + c$$

Gli studenti possono, per esempio, iniziare a muovere il punto a, osservando i grafici della famiglia di curve

$$f_a: x \rightarrow ax + b/x + c$$

Questa attività permette allo studente di tenere sotto controllo quello che succede e di comprendere la differenza di significato tra una variabile (x) e un parametro (a). In modo analogo si possono studiare le famiglie di curve f_b, f_c, al variare dei parametri b e c.
In generale, gli studenti possono osservare che per $x>0$ il costo dapprima cala al crescere del numero x di cioccolatini, poi comincia a crescere.
Usando una retta variabile parallela all'asse x, si possono determinare approssimativamente i valori x_1 per i quali si ha questo cambiamento (minimo locale). Questi valori rappresentano i numeri di cioccolatini che minimizzano i costi.
L'insegnante porterà gli studenti a fare alcune osservazioni di carattere qualitativo sul grafico, come per esempio le seguenti:

a) Il valore x_1 in cui la funzione f assume il suo minimo diminuisce all'aumentare di a; corrispondentemente il valore $f(x_1)$ aumenta; ciò significa che, a parità degli altri parametri, all'aumentare del costo unitario per la produzione dei cioccolatini diminuisce il numero ottimale di cioccolatini per confezione, anche se il costo complessivo aumenta;
b) Il valore x_1 aumenta all'aumentare di b e corrispondentemente aumenta anche il valore $f(x_1)$; cioè all'aumentare del costo delle confezioni, a parità di numero di cioccolatini, aumenta anche il numero ottimale di cioccolatini, come pure il costo complessivo (anche se l'aumento appare meno sensibile di prima);
c) Il parametro c non muta l'andamento del fenomeno, salvo determinare un aumento o diminuzione costante della spesa complessiva rispetto agli altri parametri.

Questo modello è molto importante nella gestione aziendale: infatti, con un'altra interpretazione delle grandezze in gioco, descrive la cosiddetta *rottura di stock* nella gestione dei magazzini.

Elementi di prove di verifica

1. Bollette del gas

Modellizzate la seguente situazione:
L'azienda del gas può emettere bollette sui consumi con cadenza diversa: ogni mese, ogni due, tre, quattro, sei mesi... Se il cliente paga più volte, l'azienda guadagna gli interessi sulle somme versate dal cliente, ma ha maggiori spese per l'emissione delle bollette, la lettura del contatore, ecc.
Al variare della spesa annuale del cliente qual è il numero ottimale di bollette per l'azienda?