L'approssimazione

allegato del Percorso *"Il peso della cultura"* di G. Bartolomei, T. Manzo, A. Scarpulla, L. Ventavoli

Fase 1: Perché approssimare?

L'insegnante avvia una discussione per condurre gli alunni a riconoscere che, nella vita quotidiana, ci sono casi in cui non si conosce il "vero" valore di una grandezza ma solo un valore che non differisce molto da essa ed altri casi nei i quali, invece, pur conoscendo i "veri" valori, si preferisce utilizzare valori meno precisi, che trascurano alcune cifre, perché più maneggevoli e funzionali al contesto delle diverse situazioni.

Ci sono, quindi, situazioni in cui, per l'incompletezza delle informazioni disponibili, come quando si deve misurare piuttosto che contare, è necessario"approssimare" un numero, sostituendolo con un altro, altri contesti in cui non è necessario avere una precisione elevata e la scelta di approssimare è legata a fini pratici.

Con l'approssimazione si ottengono valori più leggibili e maneggevoli, ma, nello stesso tempo, si si perde in precisione ed in accuratezza.

L'insegnante, per alimentare la discussione, può porre alcune domande stimolo, tra le quali:

- Se si vuole conoscere l'esatto peso di un oggetto, pur utilizzando strumenti di altissima precisione, è possibile conoscere il "vero" valore, o bisogna accontentarsi di un valore vicino ad esso (una sua stima)?
- Se si vuole misurare la statura esatta di un bambino, si è nelle condizioni di conoscere la "vera" misura di tale altezza?
- Se in un'interrogazione di geografia si fa riferimento ai costi delle importazioni dei prodotti alimentari in Italia, è importante specificare i centesimi di Euro?
- Se si vuole stimare il numero di abitanti sulla terra, è necessario fare riferimento all'unità o è sufficiente considerare il numero di miliardi?
- Se si vuole fare riferimento ad un fatto storico del lontano passato, è necessario specificare oltre ai secoli, anche il numero degli anni, dei mesi, dei giorni, delle ore, dei minuti e dei secondi che ci separano dall'evento?
- Se si dovesse scegliere di utilizzare strumenti di alta precisione, come le apparecchiature laser che permettono di rilevare misure al millesimo di millimetro,

sarebbe più opportuno usarle per un'operazione chirurgica o per misurare la lunghezza di un campo di calcio?

- Se si ha un numero decimale con molte cifre decimali, è sempre necessario riportarle tutte? Da che cosa dipende il numero di cifre che è opportuno scegliere?
- ….

Durante la discussione, i bambini devono comprendere, anche se solo a livello intuitivo, la necessità di rendere discrete alcune grandezze continue, per le quali neanche gli strumenti e le apparecchiature tecnologicamente più avanzate consentono di rilevare i "veri" valori. Inoltre, deve essere chiaro che, in alcuni contesti non ha senso ricorrere a ad una accuratezza maggiore di quella necessaria a fini operativi.

L'insegnante invita gli alunni a scrivere sul quaderno la seguente situazione problematica (o un'altra in cui siano, comunque, presenti numeri non approssimati e approssimati e, tra questi ultimi, alcuni approssimati per necessità e altri per opportunità) e a leggerla individualmente.

A Mario e Luigi piacciono gli acquari e vorrebbero avere maggiori informazioni su come calcolare la capacità netta di un acquario, in modo da tener conto del livello massimo dell'acqua (che sanno trovarsi a 10cm dalla sommità dell'acquario), del volume occupato da filtro, rocce, spessore vetri, ecc..
Un amico comune, durante una conversazione,dice loro:
"Proprio 3 giorni fa, ho comprato un acquario in un negozio vicino alla scuola. Per avere le informazioni che desiderate, potete rivolgervi al signor Giulio, il commesso che lavora nel negozio dove ho comprato l'acquario. Per raggiungere il negozio, percorrete per 200 m, in direzione della montagna, la strada in cui si trova la scuola, girate a destra e, a 50m, sulla sinistra, trovate il negozio. Il signor Giulio è sui 30; non potete sbagliare … 1,90 per 100kg di omone! È gentilissimo. Ricordo ancora che, quando volevo acquistare l'acquario, mi disse che uno di dimensioni $80 \times 40 \times 50$ ha una capacità netta di 128 l. Poi, in realtà, ne ho comprato uno più piccolo … i miei genitori mi avevano detto che non potevamo spendere più di 150 €!"

Dopo la lettura silenziosa, chiede ai bambini di dividersi in piccoli gruppi, di confrontarsi e rispondere alle seguenti domande:

- Qual è l'unità di misura di ogni numero?
- Quali numeri si riferiscono ad un conteggio?
- Quali numeri esprimono una misura?
- Quali numeri non sono stati approssimati?
- Quali, invece, sono stati approssimati?
- Quali numeri sono stati approssimati per necessità?
- Quali numeri sono stati approssimati per comodità rispetto alla situazione descritta?

In intergruppo, i bambini, opportunamente guidati dell'insegnante, discutono, argomentano le loro scelte.
Per gli alunni più fragili, l'insegnante può prevedere una scheda con dei facilitatori che favoriscono la comprensione della situazione problematica proposta, soprattutto in riferimento a termini o locuzioni verbali quali "capacità", "capacità netta", "sui 30", "1,90 per 100kg di omone!", "dimensioni $80 \times 40 \times 50$".

Fase 2: Come approssimare?
L'insegnante propone prima un brainstorming e poi una conversazione guidata sui termini "troncamento" e "arrotondamento", tendendo sempre a valorizzare non solo gli interventi dei bambini, ma anche i loro errori.
Durante la discussione, deve fare riferimento al sistema metrico decimale, in modo che emerga che, con "cifra di posto 3" s'intende la cifra delle migliaia, con "cifra di posto 2" s'intende la cifra delle centinaia, con "cifra di posto 1" s'intende la cifra delle decine, con "cifra di posto 0" s'intende la cifra delle unità, con "cifra di posto -1" s'intende la cifra dei decimi, con "cifra di posto -2" s'intende la cifra dei centesimi, con "cifra di posto -3" s'intende la cifra dei millesimi, e così via per tutte le cifre di posto n.

Successivamente, specifica che numericamente, per approssimare un numero a n cifre significative, cioè alla cifra di posto n,ovvero alla n-esima cifra iniziale, si distinguono due tipi di approssimazione:

1. L'approssimazione per troncamento
2. L'approssimazione per arrotondamento.

Nell'approssimazione per troncamento, il numero "si tronca" a livello della cifra n.
Operativamente, scelto il livello della n cifra per l'approssimazione, si scrive il numero fino alla n cifra, ovvero si scrivono le prime n cifre del numero considerato. Quindi, se si vuole troncare un numero di nove cifre alla quinta cifra, si scriveranno le prime cinque cifre del numero e si trascureranno le ultime quattro cifre.
Se, ad esempio, si desidera troncare il numero 176,45643721 a livello della quinta (n) cifra, si ottiene 176,45; se si desidera troncare a livello della settima cifra, si ottiene 176,4564.
Se si decide troncare alla quarta (n) cifra il numero 1.249.577, che si riferisce alla popolazione residente a Palermo al 07 luglio 2012, si ottiene 1.249, e si dice che la popolazione di Palermo è di 1249 migliaia di persone.
Analogamente, se si vuole troncare alla seconda cifra il numero 90,6, che si riferisce al numero di cellulari posseduti, in Italia, per 100 famiglie nel 2010, si ottiene 90.
Nell'approssimazione per arrotondamento, che consiste nel prendere il numero troncato alla cifra di posto n che è più vicino al numero originario, si distinguono due tipi di arrotondamento:

1. L'arrotondamento per difetto
2. L'arrotondamento per eccesso.

Si arrotonda per difetto alla n cifra e si scrive la parte del numero fino alla n cifra, se la (n+1)-esima cifra è un numero compreso tra zero e quattro, cioè 0,1, 2, 3, o 4.
Si arrotonda per eccesso alla n cifra e si scrive la parte del numero fino alla n cifra, con la n cifra aumentata di 1, se la (n+1)-esima cifra è un numero compreso tra cinque e nove, cioè 5, 6, 7, 8, o 9.
Operativamente, scelto il livello della cifra n, si guarda la cifra successiva alla n-ma cifra, se questa è una cifra minore di cinque, la n-ma si arrotonda per difetto, se è un numero maggiore o uguale a cinque, si arrotonda per eccesso.
Per evidenziare le differenze tra troncamento e arrotondamento, l'insegnante propone ai bambini di arrotondare gli stessi numeri che si sono utilizzati per il troncamento.
In particolare, arrotondando il numero 176,45643721 a livello della quinta (n) cifra, dato che la sesta (n+1) cifra è 6 e 6 è maggiore di 5, si aumenta di 1 la quinta (n) cifra,

ottenendo così 176,46; l'insegnante precisa che quando si arrotonda aumentando di 1 la cifra in corrispondenza della quale si vuole arrotondare, l'arrotondamento è detto arrotondamento per eccesso. Se si desidera arrotondare lo stesso numero a livello della settima cifra, dato che l'ottava cifra è 3 e 3 è minore di 5, si ottiene 176,4564; l'insegnante precisa che, in questo caso, si parla di arrotondamento per difetto. Inoltre, fa notare ai bambini che, nel primo caso, il numero ottenuto è superiore di 1 centesimo rispetto a quello ottenuto per troncamento, mentre, nel secondo caso, l'approssimazione per troncamento e per arrotondamento coincidono.

Se, invece di troncare, si decide di arrotondare alla quarta (n) cifra il numero della popolazione residente a Palermo al 07 luglio 2012, dato che la quinta cifra è 5, si ottiene 1.250. I bambini riconosceranno che, approssimando per eccesso alla quarta cifra, è corretto affermare che la popolazione residente a Palermo al 07 luglio 2012 è 1.250 migliaia, ovvero 1.250.000.

Applicando la stessa regola per arrotondare la seconda cifra del numero 90,6, numero di cellulari posseduti, in Italia, per 100 famiglie nel 2010, si ottiene 91. In questo caso, arrotondando per eccesso, si è aumentata di 1 l'unità del numero originario.

Generalizzando, in un sistema metrico con base qualsiasi,

- per il troncamento alla n-ma cifra, si trascurano tutte le cifre successive alla n-ma cifra,
- per l'arrotondamento alla n-ma cifra, si tiene conto della prima cifra da trascurare, la (n+1)-ma cifra. Se la (n+1)-ma cifra è minore della metà del numero della base del sistema considerato (5 nel sistema decimale), l'arrotondamento coincide con il troncamento; se la (n+1)-ma cifra è maggiore della metà del numero della base del sistema considerato, si aumenta di 1 l'ultima cifra che si conserva e poi si effettua il troncamento. Quindi, se la cifra immediatamente a destra della cifra n è minore di della metà della base del sistema numerico considerato (0,1, 2, 3, 4 , per il sistema decimale), si sostituiscono con 0 tutte le cifre a destra del posto n; se è maggiore (5, 6, 7, 8, 9, per il sistema decimale), si aumenta di uno la cifra di posto n e si sostituiscono con 0 tutte le cifre alla sua destra. Operativamente, per l'arrotondamento, se la prima cifra da trasformare in "0" è 0, 1, 2, 3 o 4, allora la cifra precedente resta invariata; se, invece, la prima cifra da trasformare in "0" è 5, 6, 7, 8 o 9,allora la cifra precedente viene aumentata di un'unità.

L’insegnante fa osservare che l’approssimazione per troncamento di un numero è sempre un’approssimazione per difetto, cioè con essa si ottiene sempre un numero minore di quello originario; un arrotondamento, invece, può dar luogo sia ad un’approssimazione per difetto che per eccesso. Il troncamento è un’operazione più semplice, ma conduce ad errori di arrotondamento più grandi.

L’insegnante propone ai bambini, divisi in coppie, un esercizio per consolidare gli apprendimenti. In particolare, dato un numero, ad esempio, 1936,8291, chiede di arrotondarlo troncarlo e arrotondarlo in corrispondenza di determinate cifre.

L’insegnante evidenzia con alcuni esempi che le approssimazioni possono rivelarsi utili anche per stimare risultati di operazioni in cui non è importante conoscere il risultato esatto, ma solo avere una corretta idea del possibile risultato. In particolare, guida i bambini a stimare i risultati delle seguenti operazioni, suggerendo di arrotondare i numeri in modo da rendere agevole il calcolo:

$$9.956.243 + 3.106.853 \cong 10.000.000 + 3.000.000 \cong 13.000.000$$

$$25.196 - 14.741 \cong 25.000 - 14.000 \cong 11.000$$

$$5.367 \times 3.954 \cong 5.000 \times 4.000 \cong 20.000.000$$

$$\frac{3.629}{543} \cong \frac{3.400}{500} \cong \frac{36}{5} \cong 7$$

L’insegnante invita i bambini a riflettere sul fatto che, quando si passa da un numero ad una sua approssimazione, per “troncamento” o per “arrotondamento, il nuovo numero non è più quello “vero”, si perdono delle informazioni e si commette un “errore”.

L’insegnante, solo se la classe lo consente, specificherà che, nel momento in cui si decide di approssimare alla n-ma cifra, si stabilisce un margine di errore che non si supera mai. Proprio in base a questo margine, è corretto affermare che si approssima a meno di 1 centesimo, a meno di un millesimo a meno di un’unità, di una decina, di un decimo e così via.

In particolare,

- nel caso del troncamento, l'errore assoluto (e) commesso è sempre minore della grandezza che corrisponde all'ultima cifra del nuovo numero ottenuto;
- nel caso dell'arrotondamento, l'errore assoluto (e) commesso è sempre minore o uguale alla metà di questa grandezza.

L'insegnante avvia una conversazione guidata per far comprendere ai bambini che non esiste il livello ottimale della cifra alla quale approssimare ma che l'accuratezza dell'approssimazione dipende dal contesto e dalle diverse situazioni e, quindi, la cifra alla quale approssimare va scelta di volta in volta, caso per caso.

Durante la conversazione, inoltre, guida i bambini a riconoscere che, se si considerano i numeri 4, 4, 9, 2, 1, la loro somma è: 4+4+9+2+1=20.

Se si dividono entrambi i membri per 20, si ottiene:
0,20+0,20+0,45+0.05=1,00.
Se si moltiplicano per 100, si ha:
20+20+45+5=100

Questo perché nel fare le divisioni al primo membro si è sempre ottenuto resto 0, e, dunque, non è stato necessario né troncare né approssimare il risultato.
Ma se non si è in questa situazione, può essere che la somma non faccia più 1 nel primo caso e 100 nel secondo.
Questo può capitare quando si lavora con i dati di una distribuzione di frequenze.
L'insegnante propone ai bambini di studiare come si può presentare il problema e lo si può risolvere.

L'insegnante fa riferimento ad una distribuzione delle frequenze costruita in precedenza e chiede ai bambini di calcolare, approssimando ai millesimi le frequenze relative e moltiplicando il risultato per 100 per ottenere le frequenze percentuali.

Genere di film preferito dagli alunni di una classe V di una scuola primaria della Sicilia - A.S. 2011/2012

Genere di film preferito	Numero alunni	Frequenze relative	Frequenze percentuali
Animazione	5	0,192	19,2
Avventura	6	0,231	23,1
Commedia	8	0,308	30,8
Fantascienza	5	0,192	19,2
Altro	2	0,074	7,4
Totale	26	0,997	99,7

I bambini osserveranno che la somma delle frequenze relative non è esattamente 1 e che la somma delle frequenze percentuali non è esattamente 100. Riconosceranno che le differenze sono dovute alle approssimazioni.

L'insegnante chiede ai bambini qual è l'errore (**errore assoluto**) che si è prodotto per effetto dell'arrotondamento nel passaggio dalle frequenze assolute alle frequenze relative e alle frequenze percentuali.

I bambini, risponderanno

per le frequenze relative: $1 - 0{,}997 = 0{,}003$.

per le frequenze percentuali: 100-99,7= 0,3

Dato che la tabella deve "quadrare", ossia il totale delle frequenze relative deve fare 1,00 e il totale delle frequenze percentuali deve essere 100, occorre aggiungere 0,003 nella colonna delle frequenze assolute e 0,3 nella colonna delle frequenze percentuali.

L'insegnante chiede ai bambini a quale numero aggiungerle in modo che l'errore "pesi poco", "sia più leggero", "si veda di meno". Dopo averli fatte dibattere, suggerirà di andare a commettere l'errore di quadratura là dove il numero da modificare è grande, così l'errore (in questo caso si tratta di **errore relativo**) è leggero rispetto al numero che si deve rettificare e propone la tabella definitiva:

Genere di film preferito dagli alunni di una classe V di una scuola primaria della Sicilia – A.S. 2011/2012			
Genere di film preferito	Numero alunni	Frequenze relative	Frequenze percentuali
Animazione	5	0,192	19,2
Avventura	6	0,231	23,1
Commedia	8	0,311	31,1
Fantascienza	5	0,192	19,2
Altro	2	0,074	7,4
Totale	26	1,000	100,0