Dalle espressioni algebriche alle funzioni

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
In situazioni problematiche, individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (per esempio variazione di una grandezza in funzione di un'altra; semplici successioni). Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione vari per indicare relazioni e funzioni.	Le funzioni elementari che rappresentano la proporzionalità diretta, inversa, quadratica; le funzioni costanti. Funzioni lineari, quadratiche, costanti a tratti, lineari a tratti. Zeri e segno di una funzione lineare: equazioni e disequazioni di primo grado in un'incognita.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri ed algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Laboratorio di matematica	

Contesto
Numeri e algebra.

Nello studio dell'algebra i polinomi, e più in generale le espressioni algebriche, sono visti in modo "statico" come oggetti e non come processi di calcolo. L'attività qui presentata favorisce una diversa concezione delle stesse espressioni e avvia al pensiero funzionale.
Ci si propone di calcolare il valore di un'espressione in una data variabile (che potremmo chiamare ad esempio x), modificando i valori di tale variabile. Non è necessario aver già introdotto il concetto di funzione, anzi, questo esempio di attività è propedeutico a tale argomento e rappresenta un primo approccio con i concetti più importanti che si incontreranno nello sviluppo di questo nucleo: zeri ed equazioni, segni e disequazioni, soluzioni approssimate.
Questa attività, che solo nei primi più semplici esempi può essere effettuata manualmente, è resa possibile dall'uso di uno strumento di calcolo che può essere: una calcolatrice grafica, un programma di elaborazione simbolica, un foglio elettronico o anche un qualunque linguaggio di programmazione.
La situazione ideale è che tutti gli studenti abbiano a disposizione, da soli o a coppie, uno strumento di calcolo (computer o calcolatrice grafica); in mancanza di questo può essere sufficiente che l'insegnante disponga di un dispositivo di proiezione per mostrare all'intera classe ciò che appare sullo schermo del suo computer o calcolatrice. Le attività potranno essere svolte, a seconda dei casi, utilizzando schede consegnate individualmente agli studenti oppure attraverso una lezione frontale dialogata.

Negli esempi mostrati qui di seguito viene utilizzata una calcolatrice grafica.

Descrizione dell'attività
Si vuole valutare il valore di una espressione algebrica in una sola lettera (ad esempio x) che varia, a partire da un valore iniziale incrementato con un passo fissato, in un insieme numerico definito.
Esaminando la seconda colonna della tabella di Figura 1 appare evidente che l'espressione cambia valore, assumendo valori positivi, negativi, nulli o impossibili. In un secondo momento potranno essere approfonditi gli aspetti relazionali e funzionali.

Prima fase

Si inizia lavorando con una tabulazione di valore iniziale zero, passo uno e con espressioni che presentino eventuali zeri o valori impossibili in corrispondenza di valori interi della variabile, facendo scorrere, se necessario, i valori della tabella nelle due direzioni.

Esempio 1

Ad esempio ecco come appare la tabulazione della funzione (che per il momento chiameremo "espressione") $\frac{x-2}{x-5}$ con un valore iniziale $x = 0$ e passo 1.

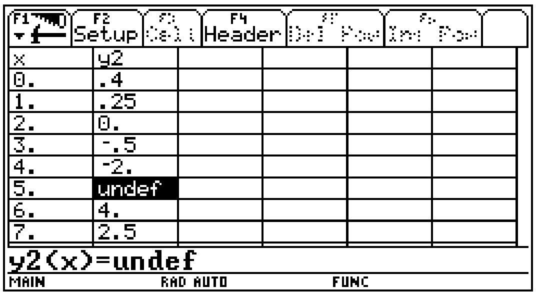
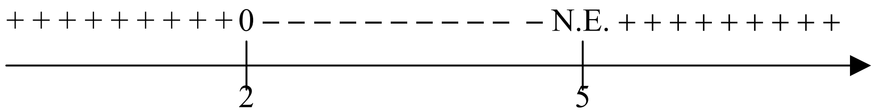


Figura 1

La prima colonna riporta i valori di x, la seconda i corrispondenti valori dell'espressione. Si noti che l'espressione si annulla per $x = 2$, risulta positiva in corrispondenza di certi valori, negativa in corrispondenza di altri; perde di significato se $x = 5$.
In questa fase esplorativa si può lavorare con qualunque tipo di espressione in una variabile; successivamente, quando si comincerà a parlare esplicitamente di funzione, si lavorerà con leggi che esprimono proporzionalità diretta, inversa e quadratica, passando poi via via agli altri tipi di funzioni.
Inizialmente può essere opportuno operare con funzioni a zeri interi e quindi immediatamente individuabili nella tabella se la variabile x ha un valore iniziale intero e passo 1.

Se l'insegnante lo riterrà opportuno, il modello "tabulare" potrà essere affiancato da un modello "geometrico" che traduce i medesimi risultati utilizzando un altro formalismo, ad esempio il seguente:



(N.E. sta per "non esiste" ovvero "impossibile")

Saranno poi possibili "esplorazioni" dirette scorrendo la tabella dei valori o modificando il passo di variazione della variabile.

Seconda fase

Si propongono esplorazioni più ardue, con espressioni che presentano zeri, o valori esclusi dal dominio, che sono numeri razionali esprimili con decimali limitati aventi un numero "ragionevolmente piccolo" di cifre dopo la virgola. Questa fase è caratterizzata dalla presenza di zeri individuabili solo dopo una modifica del passo.

Esempio 2

x	y2
0.	-2.
1.	3.
2.	8.
3.	13.
4.	18.
5.	23.
6.	28.
7.	33.

y2(x)=3.

Figura 2. La tabulazione dell’espressione $5x - 2$ con passo 1 suggerisce la presenza di uno zero tra 0 ed 1.

x	y2
0.	-2.
.1	-1.5
.2	-1.
.3	-.5
.4	0.
.5	.5
.6	1.
.7	1.5

y2(x)=0.

Figura 3. Una “rete a maglie più fitte” (cioè una scansione con passo 0,1) ci permette di individuare lo zero cercato.

Terza fase
In questa fase sono proposti esempi con zeri “inafferrabili” perché irrazionali.

x	y2
0.	-2.
1.	-1.
2.	2.
3.	7.
4.	14.
5.	23.
6.	34.
7.	47.

y2(x)=2.

Figura 4. Un’esplorazione della tabella dei valori del polinomio $x^2 - 2$ suggerisce la presenza di uno zero tra 1 e 2. Ovviamente l’esistenza dello zero è assicurata solo in situazione di continuità della funzione nel suo insieme di definizione. A questi livelli però la cosa può essere data per scontata e ripresa solo in tempi successivi.

x	y2
1.1	-.79
1.2	-.56
1.3	-.31
1.4	-.04
1.5	.25
1.6	.56
1.7	.89
1.8	1.24

y2(x)=-.04

Figura 5. Una scansione con passo 0,1 permette di ipotizzare la presenza dello zero tra 1,4 e 1,5.

x	y2
1.37	-.1231
1.38	-.0956
1.39	-.0679
1.4	-.04
1.41	-.0119
1.42	.0164
1.43	.0449
1.44	.0736

y2(x)=-.0119

Figura 6. Una scansione ancora più fine ci indica l’intervallo di estremi 1,41 e 1,42.
Lo zero (irrazionale in questo caso) è inafferrabile con la nostra “rete a maglie necessariamente razionali”; non riusciremo quindi mai a individuarlo ma solo a circoscriverlo in intervalli via via più ristretti.

E' da sottolineare che al momento in cui si svolgono queste attività gli studenti non hanno ancora gli strumenti algebrici per risolvere equazioni e disequazioni; infatti l'obiettivo di queste attività è, come si è detto, offrire un modello mentale dando una percezione numerica e dinamica "globale" delle espressioni algebriche.

Questo tipo di attività può essere svolta in poche lezioni, più ovviamente il tempo necessario per la padronanza dello strumento che si utilizza. Una calcolatrice grafica normalmente possiede già un apposito ambiente di tabulazione e quindi non richiede che pochi minuti di addestramento per la creazione, la modifica e la scansione di una tabella; altri strumenti come un foglio elettronico o un sistema di elaborazione simbolica (che in questo contesto è opportuno usare in *modalità approssimata*) richiedono un tempo di preparazione molto maggiore.

Da queste esplorazioni sorgeranno poi spontaneamente i limiti di tale modo di agire: ad esempio la difficoltà che talora si presenta nell'individuare gli zeri (si pensi alla tabulazione dell'espressione $5x^2 - 1$) o i valori in corrispondenza dei quali l'espressione $\frac{7x-8}{6x-7}$ assume valori negativi.
Si presenta così la necessità di un procedimento esatto che permetterà di individuare gli zeri o di studiare il segno di una espressione e si potranno quindi introdurre il concetto di equazione e di disequazione e le relative tecniche di calcolo.

Possibili sviluppi
Questo metodo di lavoro può diventare abituale per gli studenti anche negli anni successivi e diventare un modello mentale utile per altre attività come:

- Grafici di funzioni
- Studio di funzioni nel secondo biennio
- Equazioni e disequazioni trascendenti
- Comportamento delle funzioni per valori molto grandi o prossimi a determinati valori (asintoti)
- Introduzione al concetto di limite
- Differenze finite e pendenza