Ma dove si azzera?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Scrivere un numero in notazione scientifica. Stimare l'ordine di grandezza del risultato di un calcolo numerico. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Equazioni polinomiali, numero delle soluzioni e loro approssimazioni.	<u>Numeri e algoritmi</u> Relazioni e funzioni Laboratorio di matematica	Informatica

Contesto
Risoluzione delle equazioni algebriche.

Nell'ambito del contesto indicato si utilizza il foglio elettronico evidenziandone l'utilità al fine di rendere veloci calcoli laboriosi e consentire tempo per la riflessione e il confronto tra i dati ottenuti. Quest'attività può essere introdotta in un secondo biennio, dopo che gli studenti hanno acquisito familiarità con le funzioni e la loro rappresentazione grafica, nonché con la ricerca degli zeri di una funzione in relazione alle soluzioni delle equazioni associate.

Descrizione dell'attività
Si sa che l'approccio ai numeri irrazionali nel primo biennio è essenzialmente rivolto alla conoscenza della radice quadrata, alla sua costruzione geometrica e rappresentazione sull'asse reale. Nel secondo biennio, a partire da queste conoscenze, si vuole generalizzare l'argomento utilizzando un metodo di per sé intuitivo, che si serve della conoscenza del grafico di funzioni elementari quali ad esempio la parabola, e, procedendo per induzione, favorisce la comprensione del comportamento delle radici di indice $n > 2$.

<u>Prima fase</u>
È dedicata a considerazioni di carattere preliminare che richiamano i concetti matematici portanti, utili poi per la costruzione dell'algoritmo.
Lo studente, che ha già acquisito familiarità con la rappresentazione grafica di una funzione matematica e con le relative equazioni, è portato a rivolgere la sua attenzione a funzioni del tipo:

$$y = x^2 - 4, \qquad y = x^2 - 9,$$

e più in generale a:

$$y = x^3 - 1, \quad y = x^3 - 8, \quad y = x^3 - 27,$$

per arrivare a:

$$y = x^n - r, \qquad r > 0\ ^{1},\ n = 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Potrà disegnarne il grafico, utilizzando intervalli opportunamente scelti nella parte positiva del dominio della funzione.

[1] La limitazione $r > 0$ è necessaria, perché, com'è noto, è possibile calcolare la radice di ordine pari solo nel caso in cui il numero di cui si cerca la radice è non negativo.

Si consideri per esempio la funzione $y = x^2 - 4$; si sa che rappresenta una parabola con la seguente caratteristica: il semiasse positivo dell'asse delle x taglia il grafico della funzione esattamente nel punto $P(2;0)$.

Si ricorda, però, che i valori che annullano la funzione $y = x^2 - 4$ sono $\pm\sqrt{4} = \pm 2$, ovvero gli zeri sono 2 e –2.

Analoghe considerazioni più generali possono essere fatte per le funzioni del tipo:

$$y = x^3 - r, \qquad y = x^4 - r, \qquad y = x^5 - r, \ldots, y = x^n - r$$

in cui la soluzione aritmetica è rispettivamente $\sqrt[3]{r}$, $\sqrt[4]{r}$, … , $\sqrt[n]{r}$.

Si può a questo punto capire per quale motivo si preferisca limitare la discussione solo alla parte positiva del dominio delle funzioni $y = x^n - r$:

- per n pari, la funzione è pari; infatti $f(-x) = f(x)$ e il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y; in tal caso è sufficiente studiare la funzione per valori non negativi della x;
- per n dispari, $y = x^n - r$ assume valori sempre negativi per $x < 0$ e $r > 0$, pertanto non si annulla.

Per facilitare l'apprendimento delle questioni sopra esposte può essere utile l'uso di una calcolatrice grafico-simbolica o del programma Derive, che consentono di tracciare immediatamente il grafico di una funzione; in tal caso, facendo più tentativi relativi a funzioni di secondo grado e a quelle di terzo grado, è possibile cogliere l'andamento particolare riferito al primo quadrante all'aumentare dell'esponente, comunque sempre crescente e con la concavità rivolta verso l'alto.

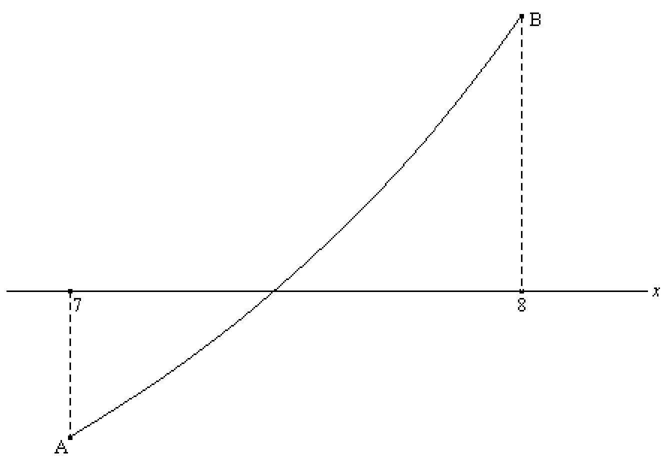
<u>Seconda fase</u>

È dedicata alla descrizione del metodo di bisezione e alla scrittura dell'algoritmo.

Il problema della valutazione dello zero della funzione $y = x^n - r$ si pone quando r non è un quadrato perfetto (o un cubo perfetto, …).

Le considerazioni che seguono riguardano solo la funzione $y = x^2 - r$ con $r \in \mathbf{R}$, ma si può procedere analogamente per tutte le funzioni del tipo $y = x^n - r$ con $r \in \mathbf{R}$ e $n = 2, 3, \ldots$.

Si considera, a titolo di esempio, la funzione $y = x^2 - 56$. Trovare la soluzione positiva ossia lo zero della funzione $y = x^2 - 56$ relativo al semiasse positivo delle x, equivale a calcolare la $\sqrt{56}$, che è compresa tra 7 e 8. Si focalizza, allora, l'attenzione sul grafico nell'intervallo [7; 8], come indicato nella seguente figura.



L'intervallo considerato è piuttosto ampio e occorre restringerlo per fornire una migliore approssimazione. Si valuta l'ascissa del punto medio dell'intervallo [7; 8], che è precisamente $7{,}5$ e si calcola il valore della funzione $y = x^2 - 56$ nel punto di ascissa $7{,}5$. Si osserva che il segno di $f(7)$ è negativo. Se il segno di $f(7{,}5)$ è negativo, la funzione non si annulla nell'intervallo [7; 7,5], ma nell'intervallo [7,5; 8]. Nel caso specifico risulta $f(7{,}5) > 0$, per cui lo zero della funzione si trova nell'intervallo [7; 7,5], come mostrato nella Figura 2.

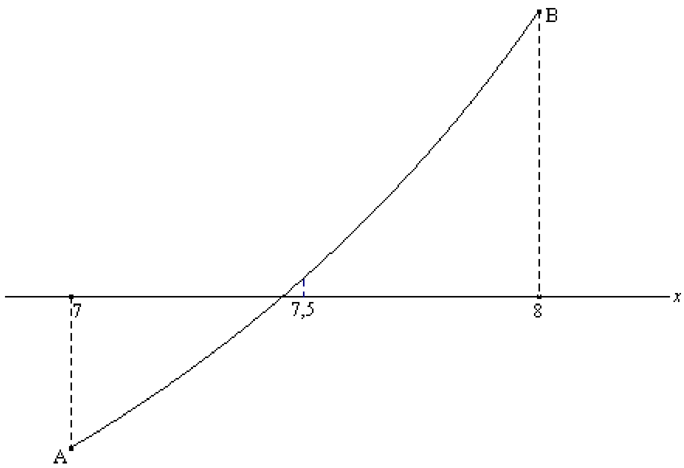


Figura 2

Una volta individuato l'intervallo "più stretto" in cui si è certi che la funzione si annulla, si calcola l'ascissa del suo punto medio, che nel caso considerato è $7{,}25$. Si valuta nuovamente la funzione in quel punto e, a seconda del segno di $f(7{,}25)$, si "restringe" nuovamente l'intervallo. Stabilito il nuovo intervallo, se ne calcola l'ascissa del punto medio, si trova il valore della funzione in quel punto e così via …
Ad ogni iterazione si approssima $\sqrt{56}$ al valore dell'ascissa del punto medio considerato.
Alla *n*-esima iterazione, il risultato appartiene ad un intervallo di ampiezza $\dfrac{b-a}{2^n}$ (dove *a* e *b* sono i valori degli estremi dell'intervallo relativi alla *n*-esima iterazione).

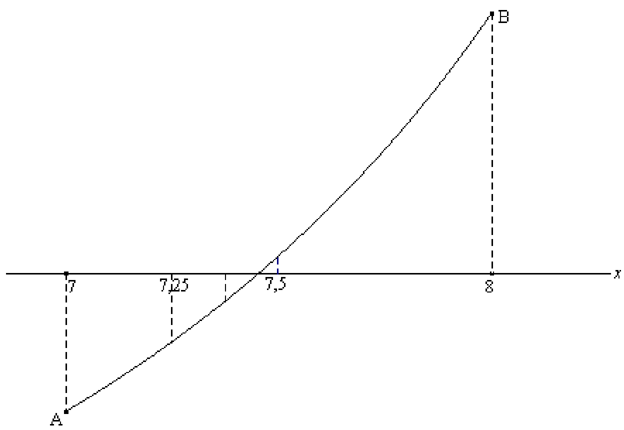


Figura 3

Terza fase

Ha senso, a questo punto, fornire anche un semplice esempio di processo di calcolo, come quello precedentemente illustrato, eseguito con il Programma Excel.
Il programma proposto mostra il calcolo della radice di un numero attraverso successive iterazioni, utilizzando il metodo di bisezione.

Esempio:
Utilizzo del foglio elettronico per risolvere l'equazione $x^3 - x - 1 = 0$ con il metodo di bisezione.
Si ricorda, in primo luogo, che il metodo di bisezione consente di risolvere equazioni della forma $f(x) = 0$ e che, per poterlo applicare, bisogna conoscere un intervallo $[a, b]$ in modo tale che la $f(x)$ assuma, negli estremi a e b, valori di segno opposto: questo garantisce che nell'intervallo è contenuta almeno una radice.
Nel caso in esame un intervallo opportuno è [1, 2] in quanto:
$f(1) = 1 -1 -1 = -1$
$f(2) = 8 - 2 - 1 = 5$
Si organizza il foglio elettronico in 5 colonne: la colonna *A* contiene l'indice n degli elementi a_n e b_n delle successioni delle approssimazioni della soluzione; tali elementi, a loro volta, sono contenuti nelle colonne *B* e *C*. In particolare, si pongono nella colonna *B* le approssimazioni a_n tali che $f(a_n) < 0$ e nella colonna *C* le approssimazioni b_n tali che $f(b_n) > 0$.
Si osserva, inoltre, che ai fini dell'applicazione del metodo non ha alcuna importanza sapere se risulta $a_n < b_n$ oppure $a_n > b_n$.
Nella colonna *D* compare il valore m del punto medio dell'intervallo (a_n, b_n) e nella colonna *E* il valore di $f(m)$. Nella colonna *G*, infine, sono posti i valori delle approssimazioni iniziali a_0, b_0.
Per realizzare la tabella sopra descritta occorre procedere per passi:

- Aprire un foglio elettronico (Microsoft Excel)
- Scrivere le intestazioni
- Scrivere 0 nella cella *A3*
- Nella cella *A4* occorre scrivere la formula:

  = A3 + 1

  e copiarla nelle sottostanti celle appartenenti tutte alla colonna *A*.
- Nella cella *B3* bisogna, invece, far comparire il valore a_0, immesso in precedenza in *G1*, cioè bisogna scrivere la formula:

  = G1
- Nella cella *C3* deve, invece, comparire il valore b_0, immesso in precedenza in *G2*, cioè bisogna scrivere la formula:

  = G2
- In *D3* si vuol far comparire la media m dei valori contenuti nelle corrispondenti celle delle colonne *B* e *C*. Si scrive, pertanto, la formula:

  = (B3 + C3)/2
- In *E3* si vuol inserire il valore che la funzione assume quando alla variabile x si dà il valore m contenuto in *D3*. Si scrive, cioè, la formula:

  = (D3)^3 – D3 – 1
- Se il valore $f(m)$, calcolato in cella *E3*, è negativo, allora nella cella *B4* va immesso il valore di m presente in *D3*, mentre in *C4* va immesso il valore di b_n contenuto nella cella soprastante.
  Se, invece, il valore $f(m)$, calcolato in cella *E3*, è positivo, allora nella cella *B4* va immesso il valore di a_n contenuto nella cella soprastante, mentre in *C4* va immesso il valore di m presente in *D3*.
- Si utilizza, pertanto, nelle celle *B4* e *C4* la funzione SE del foglio elettronico, che ha la seguente sintassi: SE(condizione; formula 1; formula 2). Il foglio elettronico verifica se sussiste la

condizione specificata come primo argomento: se ciò è vero allora, nella cella in cui è scritta tale funzione, compare il valore dato dalla *formula 1*, altrimenti il valore dato dalla *formula 2*.
Si scrive, pertanto, in *B4* la seguente formula: = SE (E3 < 0; D3; B3)
e in *C4* la seguente formula: = SE (E3 > 0; D3; C3)

– Per completare il foglio è ora sufficiente copiare tali formule nelle sottostanti celle delle colonne *B* e *C*: appaiono, così, le approssimazioni successive desiderate.
– Se poi si vuole risolvere un'altra equazione è sufficiente immettere nelle celle *G1* e *G2* i nuovi valori di a_0 e b_0, scrivere in *E4* la nuova espressione di $f(x)$ e copiarla nelle celle della colonna *E*.

A	***B***	***C***	***D***	***E***	***F***	***G***
n	a_n ***(f(x)<0)***	b_n ***(f(x)>0)***	***m***	***f(m)***	a_0•$f(a_0)<0$; a_0 =	***1***
					b_0•$f(b_0)>0$; b_0 =	***2***
0	1	2	1,5	0,875		
1	1	1,5	1,25	-0,296875		
2	1,25	1,5	1,375	0,224609375		
3	1,25	1,375	1,3125	-0,051513672		
4	1,3125	1,375	1,34375	0,082611084		
5	1,3125	1,34375	1,328125	0,014575958		
6	1,3125	1,328125	1,3203125	-0,018710613		
7	1,3203125	1,328125	1,32421875	-0,002127945		
8	1,32421875	1,328125	1,326171875	0,00620883		
9	1,32421875	1,326171875	1,325195313	0,002036651		
10	1,32421875	1,325195313	1,324707031	-4,65949E-05		
11	1,324707031	1,325195313	1,324951172	9,94791E-04		

Tabella 1

Elementi di prove di verifica

1. In un sistema di assi cartesiani ortogonali le coordinate del punto medio M del segmento AB, $A(8{,}25; 0)$ e $B(8{,}5; 0)$, sono:

a) $M(8{,}45; 0)$ b) $M(8{,}4; 0)$ c) $M(8{,}35; 0)$ d) $M(8{,}375; 0)$

2. Osserva il grafico della funzione di secondo grado rappresentato nella Figura 4 e stabilisci qual è la sua equazione fra quelle elencate. Esso rappresenta una delle equazioni indicate nelle risposte. Quale?

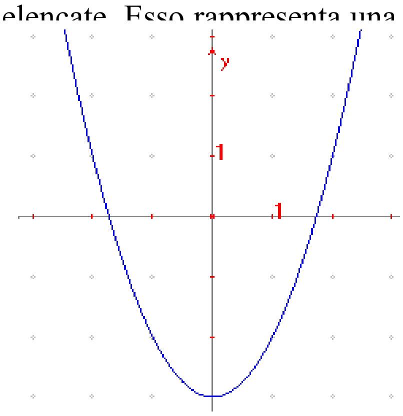


Figura 4

a) $y = x^2 - 1$ *b)* $y = x^2 - 3$ *c)* $y = x^2$ *d)* $y = x^2 + 1$

3. Osserva la seguente tabella che rappresenta le successive approssimazioni della radice quadrata di 74, ottenute col metodo di bisezione mediante il foglio elettronico.

Scrivi nella cella A5 l' indice della radice da calcolare
Puoi scrivere un numero intero positivo da 2 a 30

2

Scrivi nella cella A8 la radice da calcolare
Puoi scrivere un numero positivo minore o uguale a 1000000000

74

risultato del p.c.
8,602325267

				radice		
a	*b*	*f(a)*	*f(b)*	*(a+b)/2*	*f[(a+b)/2]*	Iter.
8	9	-10	7	8,5	-1,75	1
8,5	9	-1,75	7	8,75	2,5625	2
8,5	8,75	-1,75	2,5625	8,625	0,390625	3
8,5	8,625	-1,75	0,390625	8,5625	-0,68359375	4
8,5625	8,625	-0,68359375	0,390625	8,59375	-0,14746094	5
8,59375	8,625	-0,14746094	0,390625	8,609375	0,121337891	6
8,59375	8,609375	-0,14746094	0,121337891	8,6015625	-0,01312256	7
8,6015625	8,609375	-0,01312256	0,121337891	8,60546875	0,054092407	8
8,6015625	8,60546875	-0,01312256	0,054092407	8,603515625	0,02048111	9
8,6015625	8,603515625	-0,01312256	0,02048111	8,602539063	0,003678322	10
8,6015625	8,602539063	-0,01312256	0,003678322	8,602050781	-0,00472236	11
8,602050781	8,602539063	-0,00472236	0,003678322	8,602294922	-0,00052208	12
8,602294922	8,602539063	-0,00052208	0,003678322	8,602416992	0,001578107	13
8,602294922	8,602416992	-0,00052208	0,001578107	8,602355957	0,000528011	14
8,602294922	8,602355957	-0,00052208	0,000528011	8,602325439	2,96626E-06	15
8,602294922	8,602325439	-0,00052208	2,96626E-06	8,602310181	-0,00025956	16

Tabella 2

Il valore di $\sqrt{74}$, fornito dall'algoritmo all'iterazione n° 9, è 8,603515625. Il numero 8,6015625:

a) approssima la $\sqrt{74}$ per difetto,

b) approssima la $\sqrt{74}$ per eccesso,

c) è la radice quadrata esatta di 74,

d) approssima la $\sqrt{74}$ con un errore $e < 10^{-4}$.

4. Osserva la tabella dell'esercizio 3 e stabilisci qual è la posizione, a destra della virgola, dell'ultima cifra decimale esatta dell'iterazione n° 12.

a) la seconda b) la quarta c) la terza d) la prima

5. Osserva la tabella dell'esercizio 3. Se dico che $\sqrt{74}$ = 8,60229 e confronto questo valore con quello fornito dal computer $\sqrt{74}$ = 8,602325267, commetto un errore *e:*

a) $e < 10^{-7}$ b) $e < 10^{-6}$ c) $e < 10^{-5}$ d) $e < 10^{-4}$

6. Osserva la tabella dell'esercizio 3 ed in particolare l'iterazione n° 13, che attribuisce a $\sqrt{74}$ il valore 8,602416992; tenendo conto che la colonna **a** dà le approssimazioni per difetto e la colonna **b** quelle per eccesso, l'approssimazione migliore di $\sqrt{74}$ è:

a) quella per eccesso b) quella per difetto c) nessuna delle due d) non si può dire