Le circonferenze di Fermat

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	La circonferenza: proprietà angolari, proprietà di corde e di tangenti, poligoni inscrivibili e circoscrivibili.	<u>Spazio e figure.</u> Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Configurazioni geometriche del piano.

Questa attività può viene proposta nel primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle configurazioni geometriche del piano.
Gli strumenti di cui avvalersi sono un software di geometria che permette agevolmente di esplorare le varie proprietà relative alla circonferenza e dei poligono inscrivibili. È necessario che gli studenti conoscano le proprietà dei triangoli e sappiano utilizzare un software di geometria.
Si propone dunque un approccio per problemi (problem solving) in ambito matematico e si pone particolare attenzione anche al modo in cui inizialmente viene posto il problema. Questo verrà affrontato in forma “aperta” (problem posing), in modo da suscitare una motivazione consapevole all’ascolto e una predisposizione ad un apprendimento attivo da parte dello studente.

Descrizione dell’attività
L’attività procede a partire delle proprietà angolari relative alla circonferenza fino ad affrontare, nell’ultima fase, il teorema sulle circonferenze di Fermat.

<u>Prima fase</u>
Si propone agli studenti di esplorare le proprietà di alcune figure costruite usando un software di geometria. Viene data la seguente
Consegna 1
Disegnare due punti A e B, un triangolo equilatero di lato AB, la circonferenza c ad esso circoscritta, il suo centro O, un punto P sulla circonferenza c e le corde AP e BP.
Cosa possiamo dire sull’ampiezza dell’angolo APB?
Gli studenti con l’ausilio del software misurano l’ampiezza di APB, muovono il punto P sulla circonferenza e notano che l’angolo APB misura 120° oppure 60° (Figure 1 e 2).
Gli studenti sono guidati a formula la seguente congettura:
Dato un triangolo equilatero ABC e dato un punto P sulla circonferenza ad esso circoscritta, si ha che l’angolo APB misura 120° oppure 60°.
Ciò va dimostrato o confutato. Si è di fronte ad un problema didattico significativo: l’insegnante deve far notare agli studenti che ciò che il software geometrico visualizza non è una dimostrazione.

In altre parole ci si deve rendere conto che il software geometrico ha permesso solo di formulare una congettura, ma non di dimostrare un teorema. Perché la congettura si trasformi in un teorema è necessario fornirne una dimostrazione.
Nelle fasi successive viene fornita la dimostrazione.

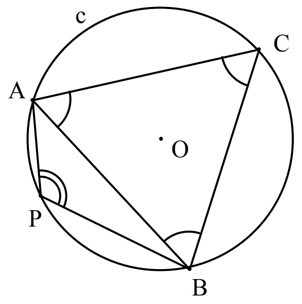

Figura 1

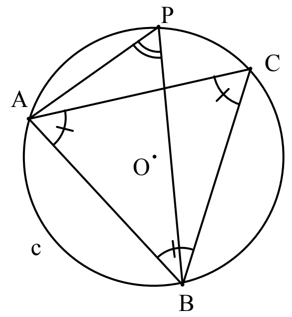

Figura 2

Seconda fase
Si affronta l'analisi del seguente problema:
Consegna 2. Imporre al punto P di appartenere, anziché a tutta la circonferenza c, all'arco della circonferenza c delimitato da A e B non contenente il punto C.
Cosa si può dire sugli angoli formati dalla diagonale AB del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?
Disegnare la diagonale PC del quadrilatero APBC.
Cosa si può dire sugli angoli formati dalla diagonale PC del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?
Gli studenti osservano che la diagonale AB forma con i lati del quadrilatero APBC gli angoli BAC e ABC, i quali misurano 60° (sono angoli di un triangolo equilatero), e gli angoli BAP e ABP, i quali hanno misura variabile al variare del punto P (gli studenti misurano gli angoli avvalendosi del software). Misurano quindi gli angoli APC e CPB, facendo muovere il punto P sull'arco AB considerato. Notano che tali angoli misurano sempre 60° e formulano la seguente congettura:
Sia dato un triangolo equilatero ABC e la sua circonferenza circoscritta c. Sia P un punto dell'arco di circonferenza AB non contenente C. La diagonale PC del quadrilatero APBC è bisettrice dell'angolo APB.
Viene fornita la dimostrazione di tale congettura.
Gli studenti osservano che, invece, la stessa diagonale PC non è bisettrice dell'angolo ACB. Infatti la misura dell'angolo ACP cresce da 0° a 60° quando il punto P si muove da A a B. La misura dell'angolo BCP invece decresce contemporaneamente da 60° a 0° (Figura 3).

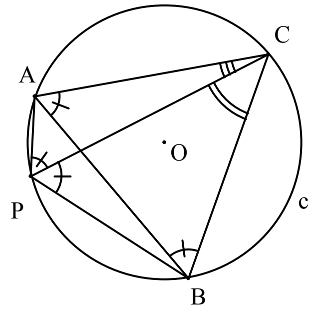

Figura 3

Gli studenti notano, infine, che gli angoli ACP e BCP sono uguali se e solo se il punto P coincide con il punto D simmetrico di C rispetto ad O.

Dimostrano quanto hanno osservato in precedenza.
Si è così dimostrato il seguente teorema:
Sia dato un triangolo equilatero ABC e la sua circonferenza circoscritta c. Sia P un punto dell'arco di circonferenza AB non contenente C. Allora la diagonale CP del quadrilatero APBC è bisettrice dell'angolo APB, qualunque sia il punto sull'arco considerato, mentre è bisettrice dell'angolo ACB se e solo se il punto P coincide con il punto D, simmetrico di C rispetto ad O.

Terza fase
Gli studenti passano quindi a esaminare il caso particolare in cui PA è uguale a PB, quindi P ≡ D.
Consegna 3. Nella Figura 3 sostituire il punto P con il punto D simmetrico di C rispetto a O. Disegnare il quadrilatero ADBC e le sue diagonali. Disegnare i segmenti AO e OB.
Cosa si può dire sui triangoli AOD e BOD?
Cosa si può dire sulle distanze del punto D dai vertici del triangolo ABC?
Dalla misure risulta che i triangoli AOD e BOD sono equilateri.

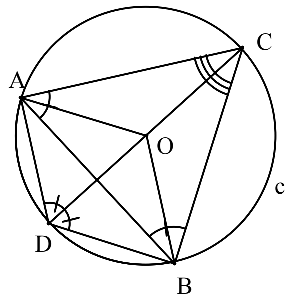

Figura 4

Si ha quindi il seguente teorema:
Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza ad esso circoscritta, O il suo centro e D il punto simmetrico di C rispetto a O. Allora i triangoli AOD e BOD sono equilateri.
Dal teorema precedente segue immediatamente che i triangoli ABD e ACO sono uguali, quindi

$$DC = DO + OC = DA + DB.$$

Si è così dimostrato che:
Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza circoscritta ad esso, O il suo centro e D il punto di c simmetrico di C rispetto ad O. Si ha allora: DC = DA+DB.

Quarta fase
Si propone agli studenti di tentare una generalizzazione del precedente teorema ponendo il seguente problema:
Consegna 4. Il precedente teorema può essere generalizzato al caso in cui il punto D sia sostituito da un qualsiasi punto appartenente all'arco della circonferenza c, delimitato dai punti A e B e non passante per il punto C?
Non ci sono a prima vista elementi per confutare o dimostrare l'affermazione del problema.
Gli studenti, aiutandosi con il software, possono misurare le distanze del punto P da A, da B e da C, al variare del punto P sull'arco.
Si può, per esempio, ottenere la Figura 5.

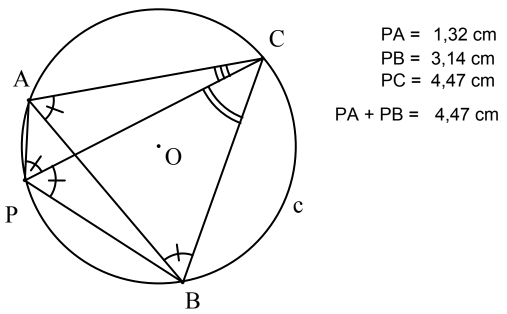

Figura 5

Sommando le misure di PA e di PB e confrontando il risultato con la misura di PC si ottiene lo stesso valore. È facile vedere che tale relazione continua a valere al variare del punto P sull'arco considerato.
È bene sottolineare ancora una volta che tutto ciò che si è osservato con il software non è sufficiente a enunciare una proprietà generale senza averne dato una dimostrazione.
In questo caso la dimostrazione non è assolutamente facile.
Consegna 5. Dimostrare che per qualunque punto P sull'arco AB considerato si ha PC = PA + PB. (Viene dato il seguente suggerimento: considerare il triangolo equilatero APP' con P' interno alla circonferenza).

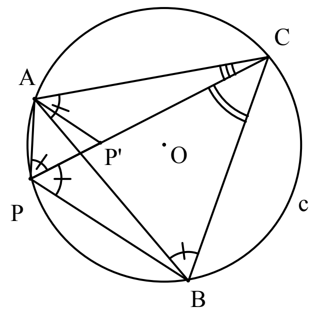

Figura 6

Nonostante il suggerimento, non sempre gli studenti riescono a rispondere alla consegna data. L'insegnante può allora fornire, ad esempio, la seguente dimostrazione:
Per costruzione si ha AP = PP'. Se si riesce a dimostrare che si ha PB = P'C, si deduce:

$$PC = PP' + P'C = PA + PB,$$

che è quel che si vuole dimostrare.
In effetti, dalla Figura 6 appare che i triangoli APB e AP'C sono uguali.
La dimostrazione di ciò è semplice: essi hanno uguali due lati (AP = AP' e AB = AC) e i tre angoli (ABP = ACP' perché insistono sullo stesso arco e APB = AP'C perché entrambi misurano 120° l'angolo AP'C è supplementare dell'angolo AP'P).
L'appartenenza di P' al segmento PC, più volte assunta, è giustificata dal fatto che gli angoli APC e APP' misurano entrambi 60°.
In tal modo si è dimostrato il seguente teorema:
Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza ad esso circoscritta e sia P un punto appartenente all'arco di estremi A e B non contenente C, allora:

$$PC = PA + PB .$$

<u>Quinta fase</u>
A questo punto si può affrontare il seguente problema sulle circonferenze di Fermat.

Consegna 6. Dato un triangolo ABC, costruire sul lato AB il triangolo equilatero ABR esterno al triangolo e la circonferenza c_1 ad esso circoscritta; ripetere la stessa operazione sul lato BC e sul lato AC. Si ottengono i triangoli equilateri BCP e ACQ e le circonferenze c_2 e c_3 ad essi circoscritte. Quali proprietà suggerisce la figura?
Le circonferenze c_1, c_2 e c_3 sono dette circonferenze di Fermat.

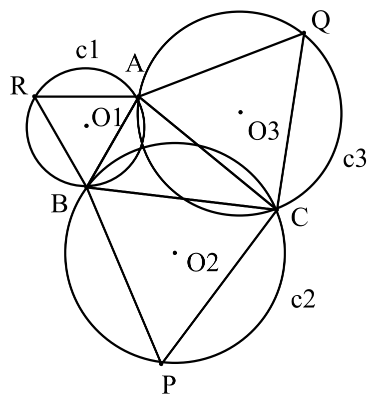

Figura 7

Utilizzando gli strumenti messi a disposizione dal software di geometria, gli studenti osservano che le tre circonferenze sembrano intersecarsi in un punto. Si enuncia pertanto la congettura:
Le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto (Figura 7).
Naturalmente tale affermazione va dimostrata.
Può anche accadere che l'evidenza della figura spinga gli studenti a dare per scontato che le tre circonferenze si intersechino in un punto e a non formulare pertanto la congettura precedente.
In tal caso è l'insegnante a proporre di dimostrare o confutare la congettura prima enunciata.
Una possibile dimostrazione consiste nel considerare le circonferenze c_1 e c_2. Esse si intersecano nel punto B e in un punto che chiamiamo F (Figura 8). Si vuole dimostrare che il punto F appartiene anche alla circonferenza c_3 circoscritta al triangolo equilatero ACQ. In altre parole si vuole dimostrare che il quadrilatero FCQA è inscrivibile in una circonferenza.

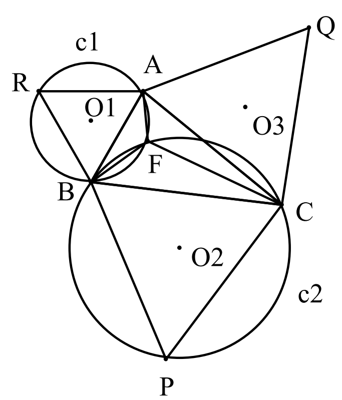

Figura 8

Si nota che in questo caso i punti F e Q si trovano su semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e C. Pertanto si deve dimostrare che l'angolo AFC misura 120°. In effetti, l'angolo AFC misura 120° perché gli angoli AFB e BFC, per come sono stati costruiti, misurano 120°.
A prima vista appare che la congettura sia stata dimostrata: le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto. Questa è anche la prima risposta degli studenti. Ma se si riguarda con attenzione la dimostrazione effettuata, si comprende che essa si basa sul fatto che gli angoli AFB e

BFC misurino 120° e che i punti F e Q si trovino in semipiani distinti rispetto alla retta passante per A e C. Ciò sicuramente avviene quando F è interno al triangolo ABC. Si è pertanto dimostrato il seguente teorema:
Se il punto F, punto di intersezione di c_1 e c_2 distinto da B, è interno al triangolo ABC, allora esso appartiene anche alla circonferenza c_3. Le tre circonferenze di Fermat si intersecano quindi in uno stesso punto.

Possibili sviluppi

1. Individuare e studiare il caso in cui il punto di Fermat è esterno al triangolo (Figura 9).

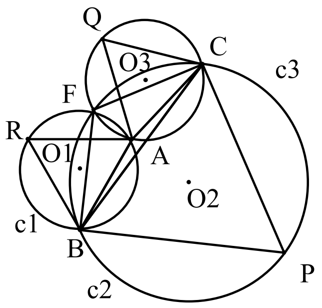

Figura 9

2. (Teorema di Napoleone) Dato un triangolo ABC, costruire sui lati ed esternamente ad esso i triangoli equilateri di lato AB, BC e CA. Osservare le proprietà del triangolo individuato da O_1, O_2 e O_3, centri delle circonferenze di Fermat.
3. Dato un triangolo con gli angoli minori di 120°, un punto P interno al triangolo, trovare la posizione del punto P che rende minima la somma delle sue distanze dai vertici.