Alla ricerca del rettangolo più bello

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare nel mondo reale situazioni riconducibili alla similitudine e descrivere le figure con la terminologia specifica. Individuare proprietà invarianti per similitudini. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini.	Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze. Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Musica Scienze Disegno

Contesto
Trasformazioni geometriche nel mondo reale.

Questa attività viene proposta nel secondo biennio, all'inizio della classe terza. Il contesto è quello delle trasformazioni geometriche nel mondo reale. Gli strumenti di cui avvalersi sono, oltre ad un software di geometria, immagini e fotografie di edifici, di costruzioni antiche e moderne, …Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle trasformazioni isometriche del piano, delle similitudini e delle equazioni di secondo grado. L'obiettivo principale dell'attività è quello di riconoscere in contesti reali - arte, architettura, tecnica - figure simili e di individuare negli strumenti della tecnica (computer, software, stampanti, fotocopiatrici, macchine fotografiche,…) le applicazioni delle similitudini.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Viene proposta un'analisi preliminare dei formati dei fogli di quaderni, libri, fogli da disegno, fogli di formato A4 (il "formato A4" ha le dimensioni di 210 mm x 297 mm.), … Si calcola il rapporto tra i due lati delle forme rettangolari considerate. La stessa attività viene proposta studiando le facciate di alcuni monumenti ed edifici storici, come per esempio, il frontone del *Partenone* di Atene (Figura 1), l'*Arco di Costantino* a Roma, ….

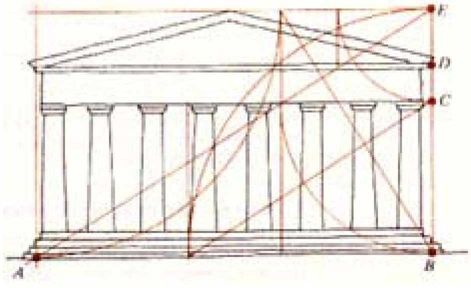

Figura 1

Dopo questa analisi si focalizza l'attenzione degli studenti sul quadrato, sul foglio A4 e sul rettangolo aureo (il rettangolo aureo ha uno dei lati uguale alla sezione aurea dell'altro).
Inizialmente si consegna agli studenti una scheda dove sono disegnati una decina di rettangoli di forma diversa, tra i quali almeno un "rettangolo A4", un quadrato e un rettangolo aureo.
Si chiede di individuare, tra i rettangoli disegnati nella scheda, quello ritenuto di aspetto più gradevole e si discutono in classe le risposte ottenute, che sono di tipo diverso, supportate da motivazioni talvolta oggettive, talvolta di tipo personale.

Seconda fase
Con la grande diffusione delle stampanti e delle fotocopiatrici, siamo abituati al foglio A4; ma qual è la storia del foglio A4 e, soprattutto, perché si usa un tale formato di carta piuttosto di altri formati?
Un foglio A4 è un rettangolo costruito in modo che piegandolo a metà rispetto al lato maggiore si ottiene un altro rettangolo simile a quello di partenza che viene indicato come foglio A5. Se si raddoppia un foglio A4, affiancandone due per il lato più lungo, si ottiene il foglio A3 simile al foglio A4 (Figura 2).

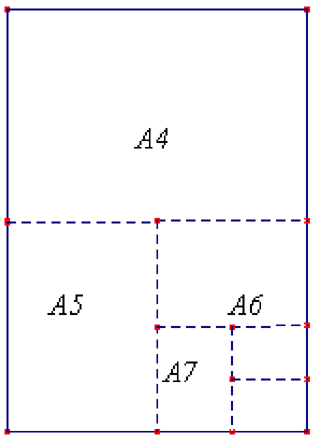

Figura 2

Chiamato a il lato maggiore e x il lato minore di un rettangolo, si vuole determinare il rapporto tra a e x in modo che piegando il foglio secondo la linea tratteggiata di Figura 3 si ottenga un rettangolo simile a quello dato. Ciò si traduce nella seguente proporzione:

$$a : x = x : \frac{a}{2}.$$

Da cui si ottiene: $\frac{a}{x} = \sqrt{2}$.

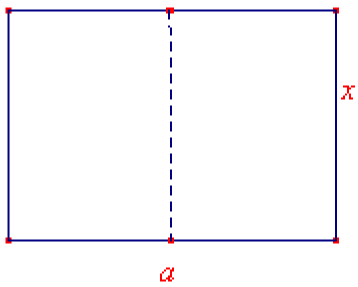

Figura 3

Quindi in un foglio A4 il rapporto tra i lati dovrebbe essere $\sqrt{2}$.
Eseguendo il rapporto tra le lunghezze dei lati (297 mm x 210 mm) si ottiene: 1,4142857….che è un'approssimazione di $\sqrt{2}$ con quattro cifre decimali esatte, $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562373\ldots$

In molte fotocopiatrici il massimo dell'ingrandimento lineare ottenibile è di 1,41%. Si chiede agli studenti di provare a motivare questo fatto.
Il foglio A3 ha per dimensioni 297 mm e 420 mm.

Terza fase
La sezione aurea e il rettangolo aureo: un'applicazione della similitudine.
Per introdurre la sezione aurea, in una classe terza di scuola secondaria superiore, si può partire da un rettangolo e ritagliare da esso un quadrato (Figura 4). Se il rettangolo "rimasto" è simile a quello di partenza allora quello iniziale è detto "aureo". Per ragioni misteriose viene considerato il rettangolo più "bello" anche se attualmente siamo più abituati al formato A4 piuttosto che al rettangolo aureo.

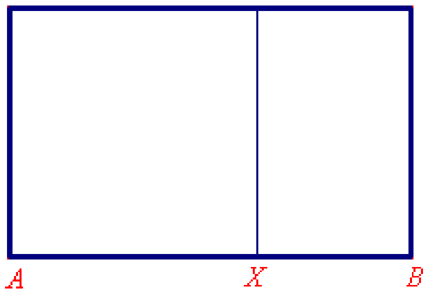

Figura 4

Il rapporto tra il lato maggiore e il lato minore di questo rettangolo si dice "rapporto aureo" (in inglese, "golden ratio"; in francese "nombre d'or"). Il *rapporto aureo* di solito è indicato con la lettera greca *tau* τ. Il matematico Luca Pacioli (circa 1445-1509) ha chiamato tale rapporto *divina proportione* e, ispirato da Piero della Francesca (circa 1416 - 1492), ha scritto su di esso un trattato dal titolo *De divina proportione* (1509).

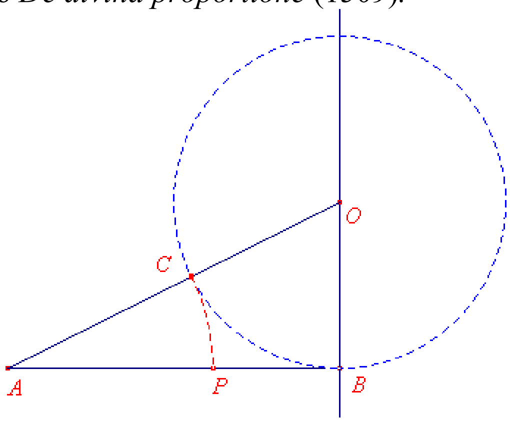

Figura 5

Nella figura 5 è indicata la costruzione della sezione aurea di un segmento AB:
- si traccia la perpendicolare ad AB per B;
- si prende il punto O in modo che OB sia la metà di AB;
- si traccia la circonferenza di centro O e raggio OB;
- si congiunge O con A;
- si interseca OA con la circonferenza e si trova il punto C;
- si riporta OC su AB, trovando il punto P.

La sezione aurea di AB è AP.

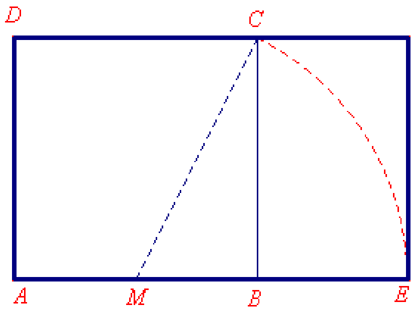

Figura 6

Nella figura 6 è rappresentata la costruzione di un rettangolo aureo a partire da un quadrato iniziale di lato AB (costruzione detta di Leon Battista Alberti, 1404-1472).
Considerato il quadrato di lato AB, si disegna il punto medio M di AB. Con apertura del compasso AB, si riporta a partire da M il segmento MC sul prolungamento di AB, ottenendo il punto E.
AB è la sezione aurea di AE.

La costruzione della figura 5 si trova negli *Elementi* di Euclide e rappresenta la soluzione geometrica della equazione

$$x^2 = a(a-x)$$

ottenuta dalla proporzione:

$$a : x = x : (a-x),$$

la quale esprime la similitudine tra il rettangolo di partenza (di lato maggiore *a*) e quello che rimane togliendo un quadrato (di lato *x*).
Se poniamo a =1, si ottiene l'equazione quadratica:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

la cui radice positiva è il numero cercato

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Un rettangolo in cui il lato minore sia la sezione aurea dell'altro lato si chiama "rettangolo aureo". Il rapporto *a/x* (Figura 4) del rettangolo aureo è il numero:

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}61803398...$$

Quindi $x = \frac{1}{\tau}$.

Dall'equazione $x^2 + x - 1 = 0$, si ottiene: $x^2 + x = 1$, ovvero: $x + 1 = \frac{1}{x}$, che fornisce la notevole proprietà: $1 + \frac{1}{\tau} = \tau$ (*).

Moltiplicando per τ, si ottiene: $\tau + 1 = \tau^2$ e ancora

$$\tau^2 + \tau = \tau^3$$
$$\tau^3 + \tau^2 = \tau^4$$
$$\ldots..$$

cioè ogni potenza ad esponente intero di τ è somma delle due potenze precedenti. Qui osserviamo una proprietà che "assomiglia" a quella che definisce la celebre successione dei numeri di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ….. .
Con sorpresa si scopre che in realtà vi è un legame più stretto con la successione dei numeri di Fibonacci. Si può anche fare osservare, mediante una esplorazione numerica, che il rapporto tra due numeri di Fibonacci successivi, al crescere di *n*, tende al rapporto aureo, ovvero: $\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \tau$, dove F_n è l'ennesimo numero di Fibonacci.

La relazione (*) è rappresentata nella figura del rettangolo, dove l'altezza del rettangolo aureo è unitaria, la base *AB* misura τ e il segmento *XB* misura 1/τ. Questa relazione ci dice che se si toglie un quadrato da un rettangolo aureo, il rettangolo rimasto è ancora aureo. Continuando si può ottenere la Figura 7 e la spirale "quasi aurea" della Figura 8 (formata da archi di circonferenza).

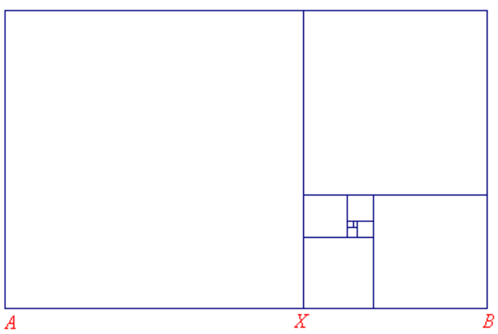

Figura 7

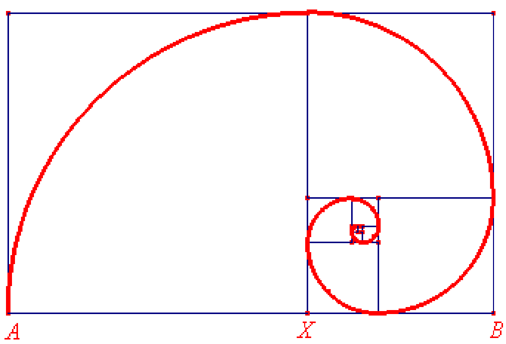

Figura 8

Quarta fase

Si dimostra che il lato del decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta (Figura 9 e Figura 10). Se r è la misura del raggio della circonferenza, allora la misura del lato del decagono regolare inscritto è:

$$l_{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2} \ .$$

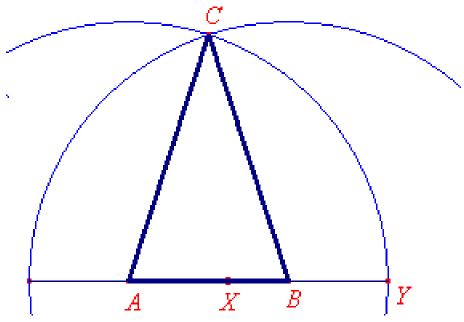

Figura 9

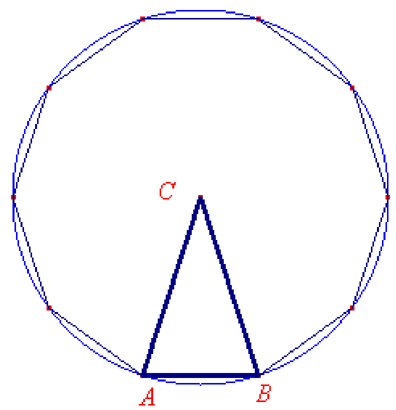

Figura 10

Determinato il lato del decagono regolare, si può costruire il lato del pentagono regolare inscritto in una circonferenza.

Il lato del pentagono regolare è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza circoscritta al pentagono e la sua sezione aurea (lato del decagono regolare inscritto nella circonferenza).

Si possono proporre le seguenti costruzioni:

1. Data una circonferenza costruire il pentagono regolare inscritto nella circonferenza. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare il seguente teorema: il lato del pentagono regolare inscritto in una circonferenza è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti il raggio della circonferenza e la sezione aurea del raggio.

2. Dato il segmento AB costruire il pentagono regolare di lato AB. Per eseguire questa costruzione occorre ricordare la seguente proprietà: il lato di un pentagono regolare è la sezione aurea della sua diagonale

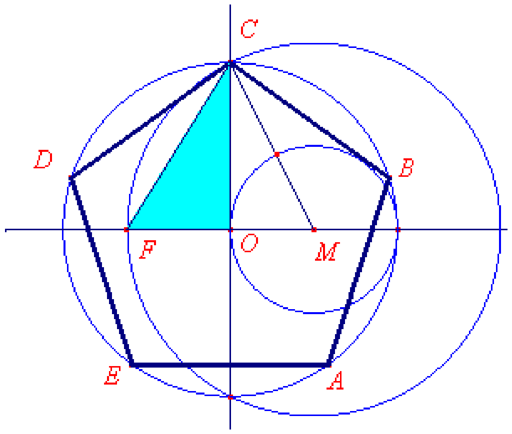

Figura 11

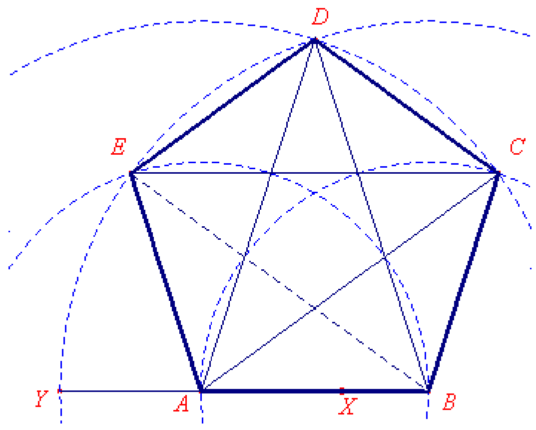

Figura 12

Possibili sviluppi

1. Il pantografo.
   Si illustra l'azione del pantografo (sarebbe bene portarne uno in classe).
   Si considerano due semirette di origine il punto O. Si considera un poligono e un punto P su di esso. Il punto P descrive il contorno della figura da ingrandire; nel punto P' si mette una matita. Si ottiene un ingrandimento tramite una omotetia.

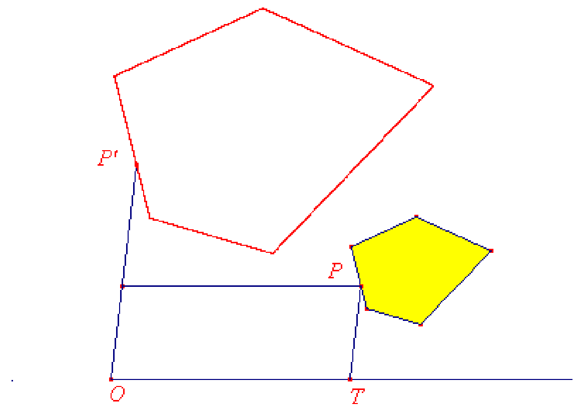

Figura 13

2. Il triangolo dei punti medi.
   Si consideri il triangolo avente per vertici i punti medi MNQ dei lati del triangolo ABC. Tale triangolo ha lo stesso baricentro G del triangolo ABC. Il baricentro G è il centro di una omotetia. Trovare il rapporto di omotetia.

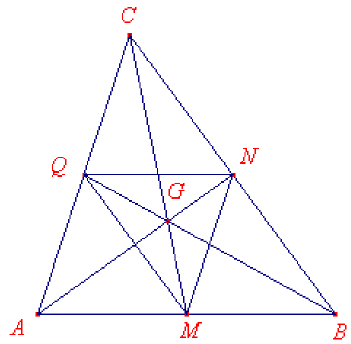

Figura 14

3. La media geometrica.
   Dati due segmenti di misura a e b si vuole costruire un segmento di lunghezza x in modo che il quadrato costruito su esso sia equivalente al rettangolo di lati i segmenti dati: si ha: $x = \sqrt{ab}$. Il modo più facile di eseguire la costruzione è di utilizzare il secondo teorema di Euclide, come nella figura indicata di seguito.

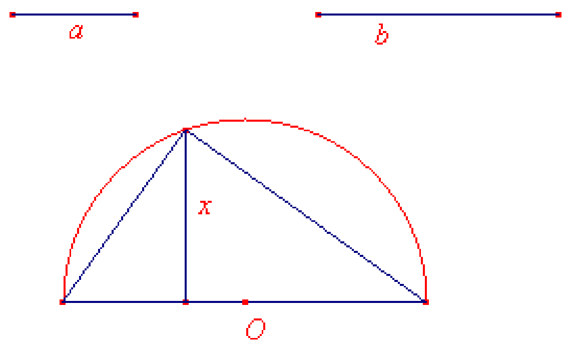

Figura 15