Tutte le parabole sono simili?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Individuare proprietà invarianti per similitudini. Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle similitudini. Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Omotetie e similitudini nel piano; teorema di Talete e sue conseguenze. Trasformazioni nel piano: composizione di due isometrie e di un'isometria con un'omotetia. Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Coniche e trasformazioni geometriche.

L'attività viene proposta per il 2° biennio, all'inizio della quarta classe. Strumento privilegiato per svolgere il lavoro previsto è un software di geometria che permette facilmente di costruire e visualizzare le coniche, in particolare le parabole. Il contesto è quello delle coniche e delle trasformazioni geometriche.
Prerequisiti necessari sono la conoscenza delle isometrie, delle similitudini, del piano cartesiano e delle equazioni delle coniche in opportuni sistemi di riferimento.
Si è quindi in un contesto matematico e si propone un'attività in cui si evidenzia come l'intuizione, che pure è alla base della scoperta di molti concetti matematici, talvolta può indurre in affermazioni errate.
In questa attività si utilizzano le funzionalità del software per una verifica immediata di una proprietà che inizialmente non è così evidente dal punto di vista intuitivo; successivamente si convalida l'affermazione mediante una verifica analitica.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Viene proposta una scheda preliminare che contiene varie figure: poligoni, circonferenze, figure mistilinee e alcune parabole.
Si chiede agli studenti di individuare se tra quelle proposte esistono figure simili. Gli studenti, probabilmente individueranno dei poligoni simili, … e diranno che le circonferenze sono tutte simili. L'insegnante proporrà alla discussione il caso delle parabole, che non è affatto evidente.
Nella figura 1 sono rappresentate alcune parabole che hanno lo stesso vertice e lo stesso asse, collocate nello stesso semipiano rispetto alla retta tangente nel vertice. Nella scheda si chiede agli studenti se queste parabole hanno la stessa "apertura" (qui usiamo in modo informale il termine

"apertura"; alla fine dell'attività si dovrebbe invece discutere e mettere in crisi questa concezione intuitiva).

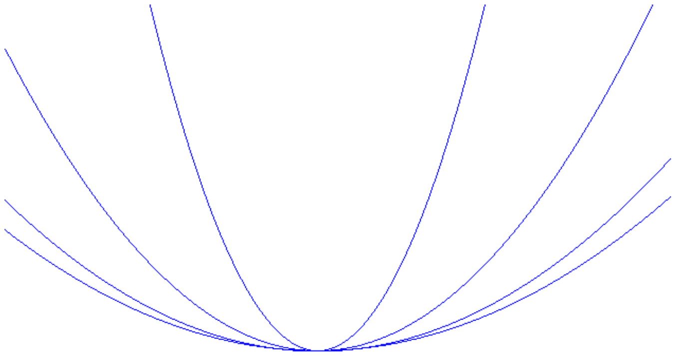

Figura 1

Seconda fase

Si prende in considerazione il caso in cui le due parabole sono disposte in modo qualunque nel piano. E' sempre possibile, mediante un'isometria, ricondurle ad avere vertici coincidenti e ad appartenere allo stesso semipiano rispetto alla comune tangente nei vertici. Si discutono le osservazioni degli allievi emerse nella scheda proposta nella fase 1. L'attività prosegue con l'ausilio di un software di geometria: si propone la Figura 2 e si chiede di individuare l'isometria che trasforma le parabole come descritto precedentemente.

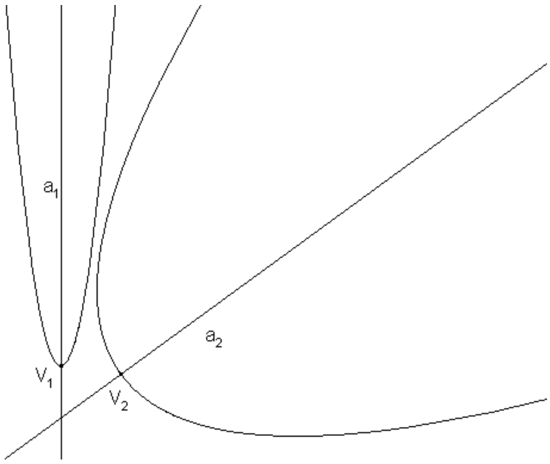

Figura 2

Si chiede ora agli studenti di verificare analiticamente che le due parabole si possono ottenere una dall'altra mediante una omotetia avente come centro l'origine degli assi e rapporto da determinare. Con lo strumento "verifica proprietà", presente nel software di geometria, si "scopre" che il segmento P_1Q_1 è parallelo a P_2Q_2, per ogni coppia di rette passanti per il vertice O (Figura 3).
Introducendo un sistema di assi cartesiani di origine coincidente con il vertice e asse delle ordinate coincidente con l'asse delle parabole, considerata una generica retta passante per il punto O, questa interseca le parabole nei punti P_1 e P_2. Si verifica che il rapporto $\frac{OP_2}{OP_1}$ è costante e non dipende dalla retta scelta. Questo dimostra che due generiche parabole sono tra loro simili.
Il calcolo può essere eseguito usando un programma di manipolazione simbolica. Chiamate $y = a_1x^2$ e $y = a_2x^2$ le equazioni delle due parabole, intersecando con una generica retta $y = mx$, si ottiene:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a_1 x^2 \end{cases}$$

che fornisce i punti O e P_1, con $P_1\left(\dfrac{m}{a_1}, \dfrac{m^2}{a_1}\right)$.

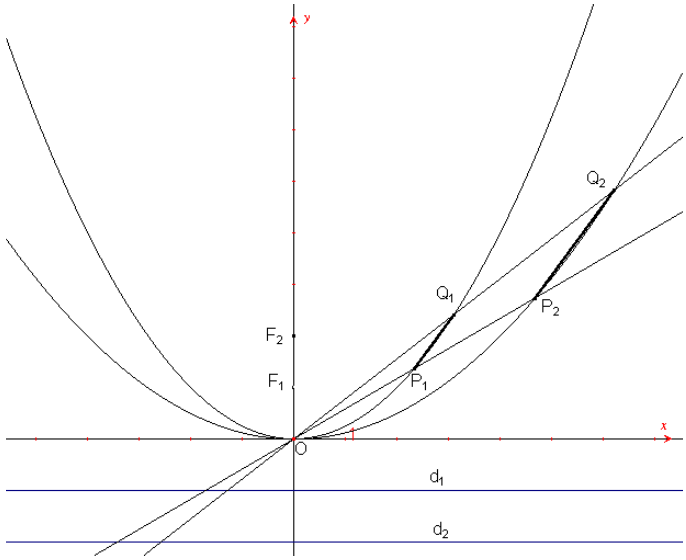

Figura 3

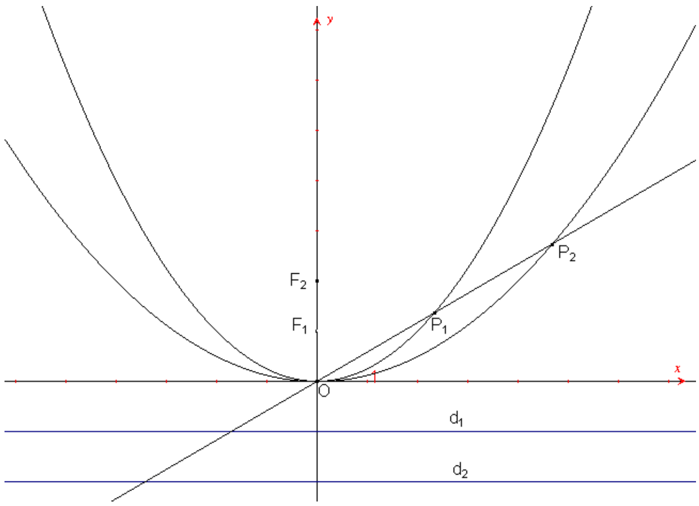

Figura 4

Analogamente, intersecando la seconda parabola con la stessa retta si ottiene:

$$\begin{cases} y = mx \\ y = a_2 x^2 \end{cases}$$

che fornisce i punti O e P_2, con $P_2\left(\dfrac{m}{a_2}, \dfrac{m^2}{a_2}\right)$.

Si arriva, dopo alcuni calcoli, alla relazione:

$$\frac{OP_2}{OP_1} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Quindi le due parabole sono omotetiche e il rapporto di omotetia vale $\frac{a_1}{a_2}$.

Il calcolo tuttavia contrasta con l'osservazione della Figura 1. Per ottenere una figura che sia "convincente" anche dal punto di vista intuitivo occorre prendere in considerazione la Figura 5, nella quale sono disegnate le due parabole, i fuochi e per ciascuna parabola il *lato retto*, cioè la corda della parabola ottenuta intersecando la parabola con la retta perpendicolare all'asse e passante per il fuoco. Nella Figura 5, il lato retto della prima parabola è A_1B_1 e quello della seconda parabola è A_2B_2. I due triangoli OA_1B_1 e OA_2B_2 sono omotetici.

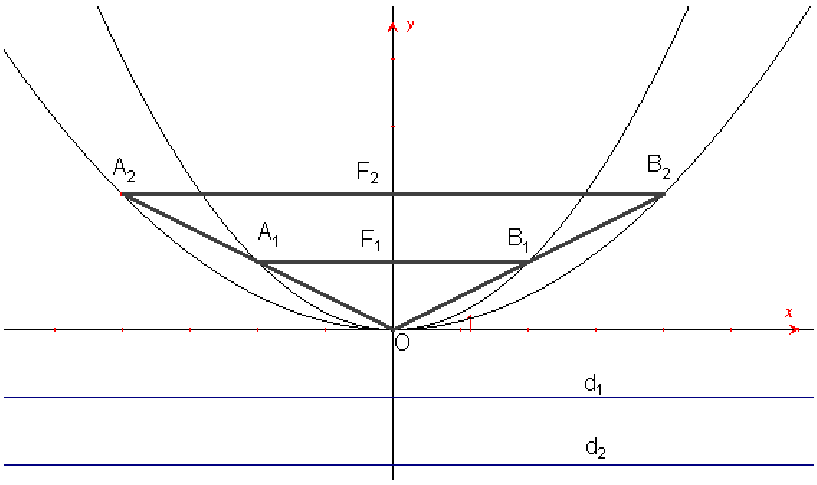

Figura 5

Possibili sviluppi
Si analizza rispetto alla similitudine il caso dell'ellisse e dell'iperbole. Ci si può soffermare, in particolare, sulle iperboli equilatere e scoprire che anche queste sono tutte simili tra loro (Figura 6).

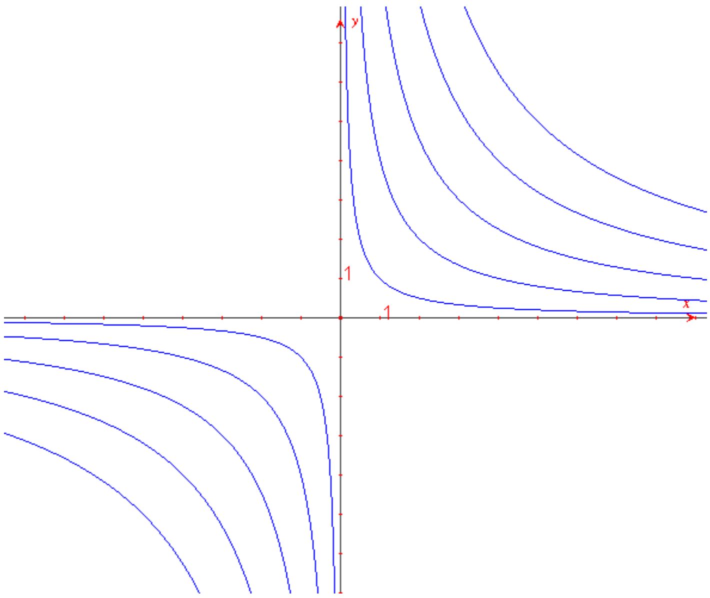

Figura 6

Possiamo infine porre le seguenti domande:

- Quando due ellissi sono simili? (Figura 7)
- Quando due iperboli sono simili? (Figura 6)

La discussione può essere svolta facendo uso di un software di geometria.

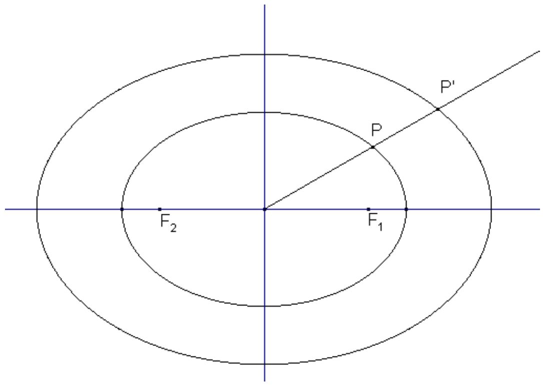

Figura 7

Per una risposta completa alle domande poste, occorre introdurre la nozione di eccentricità di una conica.