I numeri delle macchine

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Addizione e moltiplicazione nell'insieme dei numeri interi e dei numeri razionali. I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali. Rappresentazione scientifica ed esponenziale dei numeri razionali e reali.	<u>Numeri e algoritmi</u> Laboratorio di matematica	

Contesto
I numeri macchina.

Gli strumenti di calcolo, dalla più economica delle calcolatrici al più costoso dei computer, hanno oggi una grandissima diffusione e non solo in ambiente scolastico. È dunque importante che gli studenti si rendano conto delle possibilità e dei limiti degli strumenti che hanno a disposizione.
Le conoscenze matematiche necessarie per svolgere le attività di laboratorio qui descritte sono elementari e alla portata di qualsiasi studente del primo biennio.

Descrizione dell'attività
Esistono vari tipi di "errori" commessi dalle macchine: quelli dovuti alla rappresentazione dei numeri nella macchina, quelli legati alla "instabilità" di certi problemi, quelli di tipo grafico dovuti al modo utilizzato dallo strumento per realizzare un grafico, ...
Nell'attività descritta si farà riferimento a strumenti che non utilizzano sistemi di calcolo simbolico (CAS = Computer Algebra System), i quali usano metodi di rappresentazione e algoritmi di calcolo completamente diversi, bensì a calcolatrici non simboliche, fogli elettronici e anche CAS usati in modalità approssimata.
L'argomento di quest'attività non è, come il titolo potrebbe far pensare, i numeri-macchina, in altre parole come i numeri sono rappresentati nella memoria di un calcolatore o di una calcolatrice: questo è un argomento non facile e non proponibile in una classe del primo biennio; per eventuali approfondimenti su questo tema si rimanda alla Bibliografia.
L'obiettivo di quest'attività di laboratorio è imparare a conoscere i vari modi nei quali le "macchine" (calcolatrici e calcolatori) visualizzano i numeri, gli errori che possono essere indotti da un uso non consapevole di uno strumento di calcolo, la conoscenza delle prestazioni offerte dallo strumento disponibile e più in generale un approfondimento della conoscenza dei numeri, delle operazioni elementari e delle loro proprietà.
Non si parla quindi di numeri macchina, ma di numeri coinvolti nell'uso di strumenti di calcolo: arrotondamenti e approssimazioni, errori dovuti alla rappresentazione dei numeri...

Una difficoltà operativa notevole nell'uso delle calcolatrici in classe deriva dal fatto che, a meno che ci siano delle "adozioni" ufficiali da parte dell'insegnante, tutti gli studenti di norma possiedono una calcolatrice, ma di modelli, marche, prestazioni (e prezzi) spesso molto diversi tra loro. Se questa diversità costituisce un ostacolo nell'uso regolare della calcolatrice, in questa attività può anche essere considerata una risorsa, offrendo la possibilità di mettere a confronto le caratteristiche dei diversi strumenti.
Saranno esaminati i comportamenti di vari tipi di macchine di calcolo:

- la funzione "calcolatrice" presente in quasi tutti i modelli di telefoni cellulari (questo strumento è particolarmente utile proprio a causa delle sue modestissime capacità di calcolo);
- le calcolatrici più semplici ed economiche, tipicamente i Convertitori Lira-Euro e le calcolatrici offerte in omaggio con l'acquisto di alcuni prodotti (ad esempio nei fustini del detersivo);
- le calcolatrici cosiddette "scientifiche";
- le calcolatrici grafiche ovvero "scientifiche evolute (e programmabili)"
- i calcolatori o, meglio, alcuni software per calcolatori, tipicamente il foglio elettronico;
- le calcolatrici simboliche o più in generale i Computer Algebra System, siano essi su calcolatrice o su computer;
- potrebbero essere disponibili anche calcolatrici che operano in RPN (Reverse Polish Notation), oggi però poco diffuse: potrebbe essere utile allora far precedere una lezione sui diversi linguaggi algebrici (tradizionale, lineare, con grafi ad alberi e, per l'appunto, RPN) e i diversi modi di indicare le priorità delle operazioni.

In queste attività non saranno utilizzati CAS (sia esso per computer o per calcolatrice) perché con questo tipo di strumento la maggior parte dei problemi sotto elencati non si presenta in quanto la rappresentazione dei numeri nella macchina e i relativi algoritmi di calcolo sono completamente diversi.
Anzi, in alcune delle attività proposte è opportuno che la calcolatrice a disposizione abbia le prestazioni più scarse possibile.
Gli studenti opereranno in piccoli gruppi di apprendimento collaborativo. Sarà cura dell'insegnante fare in modo che in ciascun gruppo sia presente la maggior varietà possibile di calcolatrici; la presenza di un calcolatore non è indispensabile, ma sarà molto utile almeno un calcolatore a disposizione dell'insegnante con un dispositivo di proiezione. I software che possono essere particolarmente utili sono: un foglio elettronico e un programma di elaborazione simbolica (CAS).

<u>Prima fase</u>:
Individuazione delle capacità di calcolo
L'insegnante propone le seguenti attività, eventualmente guidate da un'apposita scheda da compilare (una per ciascun modello di calcolatrice):

- Individuazione delle operazioni eseguibili (le quattro operazioni sono disponibili su tutti gli strumenti di calcolo, le radici quadrate di norma non nei modelli più economici; spesso l'operazione di elevamento a potenza è disponibile solo dalle scientifiche in su).
- Individuazione del tasto da premere per ottenere il risultato (ENTER, tasto di uguaglianza, …).
- Individuazione del modo con cui la calcolatrice segnala un errore (ad esempio chiedendo di calcolare `5 / 0` o scrivendo un'espressione sintatticamente scorretta, come **8 + =**) attraverso un'apposita scritta che compare nel display oppure semplicemente non fornendo alcun risultato.
- Rilevazione della capacità di gestire i numeri razionali in forma frazionaria oltre che decimale.
- Riconoscimento della possibilità di eseguire operazioni in sequenza: in altre parole se, digitando per primo un operatore, viene o no automaticamente assunto come primo operando il risultato dell'operazione precedente. Questa possibilità è di solito presente anche nelle calcolatrici più economiche. A titolo di esempio si potrebbe far costruire una tavola delle potenze di due.

- Individuazione della possibilità di inserimento di numeri negativi, cioè dell'eventuale presenza del tasto di negazione (o "meno unario"). Sarà cura dell'insegnante rilevare le ambiguità che possono derivare dall'uso del simbolo "meno" e dai suoi diversi significati a seconda del contesto. E' interessante notare che i modelli più modesti di calcolatrici non permettono l'inserimento di numeri negativi, ma che comunque i risultati sono nell'insieme dei numeri relativi; l'eventuale risultato negativo di un'operazione è talvolta segnalato con un "meno" come suffisso anziché, come è uso, come prefisso. Ad esempio: 3 - 5 = 2-.
- Individuazione delle priorità delle operazioni. Le calcolatrici di norma danno alle operazioni due tipi di priorità a seconda del modello:
    - Tradizionale (le operazioni sono eseguite secondo le normali priorità stabilite in algebra; ad esempio, in mancanza di parentesi, prima sono eseguiti i prodotti, poi le somme.
    - Cronologica (le operazioni sono eseguite nell'esatto ordine con il quale sono indicate).

  Alcune delle calcolatrici meno evolute (es. le calcolatrici presenti come accessorio dei telefoni cellulari) talvolta non consentono di eseguire altro che una sola operazione alla volta. I tipi più evoluti hanno anche la possibilità di usare parentesi, anche su più livelli.
  Possono essere proposti agli studenti i seguenti esempi:

  3 * 4 - 5 che fornisce 7 su tutte le macchine: l'operazione che deve essere eseguita per prima è anche la prima ad essere digitata.

  2 + 4 * 5 fornisce invece 22 sulle macchine più evolute, 30 sulle altre. Per ottenere lo stesso risultato, bisogna digitare 4 * 5 + 2.

Questa è una buona occasione per parlare della priorità delle operazioni, della funzione delle parentesi, dell'arbitrarietà delle priorità assegnate alle operazioni…
Questa fase si conclude con l'esposizione da parte di ciascun gruppo dei risultati ottenuti. Data la grande varietà di modelli di calcolatrici e delle relative prestazioni, sarà interessante mettere a confronto i risultati.

<u>Seconda fase</u>:
Individuazione dei limiti di operatività dello strumento
Cura dell'insegnante è far osservare che l'insieme dei numeri gestibile dallo strumento è, per forza di cose, sempre finito.
Se lo ritiene utile, l'insegnante può anche accennare al fatto che i numeri sono rappresentati sempre secondo una codifica binaria. Può così parlare di rappresentazione dei numeri nelle diverse basi (in particolare in base 10 e in base 2) e proporre agli studenti di trovare quanti numeri naturali possono essere rappresentati, ad esempio, in un ottetto (Byte) di bit. Allo scopo gli studenti possono eventualmente utilizzare grafi ad albero. Può anche essere consigliabile mostrare, per esempio operando ancora in un singolo Byte, l'insorgere dell'"overflow" nel caso in cui il risultato di un'operazione superi le capacità di rappresentazione della macchina.
L'argomento è suscettibile di importanti approfondimenti, come gli algoritmi per il cambiamento di base e la rappresentazione interna dei numeri: ad esempio la complementazione a due per rappresentare i numeri interi negativi, la rappresentazione in virgola mobile per i numeri razionali ecc.; però, come si è detto nella Premessa, non è questo l'obiettivo dell'attività.
Anche in questa fase può essere opportuno operare con l'ausilio di una scheda di lavoro da compilare.
Queste sono alcune attività che potrebbero essere proposte:
- Individuazione del massimo numero intero gestibile dalla calcolatrice. A questo scopo si potrebbero lasciare gli studenti liberi di individuare la strategia da seguire; solo eccezionalmente

l'insegnante può suggerire di cercare per tentativi il numero intero tale che, aggiungendogli 1, dia origine a un messaggio di errore.
Sarà cura dell'insegnante, se non emerge prima dagli studenti stessi, far osservare che non vale (in determinate condizioni) la proprietà associativa: se ad esempio il massimo numero intero è 999999999, l'espressione 999999999 + 1 – 20 non è calcolabile perché la prima operazione provoca un errore nella macchina; al contrario 999999999 - 19 fornisce il risultato corretto.

- Individuazione della possibilità di rappresentare, nelle calcolatrici più evolute, i numeri in vari formati: "normale", scientifico, tecnico.
  Ad esempio 987654321 potrebbe essere indicato dalla calcolatrice, nei tre diversi formati, come: 987654321, $9.87654321 \cdot 10^8$, $987.654321 \cdot 10^6$. È importante che siano gli studenti stessi a riconoscere l'equivalenza dei tre diversi formati e a ricavare, in un'ottica di lavoro in laboratorio, le "regole" di rappresentazione dei numeri nei diversi formati. Questa potrebbe anche essere una buona occasione per riflettere sulla rappresentazione decimale dei numeri e sulle proprietà delle potenze.
- Scoperta, attraverso operazioni come ad esempio 1/3, 2/3, 2/7, del massimo numero di cifre decimali visualizzate dalla calcolatrice, e se questa opera un troncamento o un arrotondamento. In questo secondo caso gli studenti saranno invitati a indicare le modalità con le quali è realizzato l'arrotondamento.
- L'insegnante può poi proporre di eseguire un'operazione e immediatamente dopo la sua inversa: ad esempio $1/3 \cdot 3$ oppure il quadrato della radice quadrata di 2 ecc. e invitare gli studenti a commentare i risultati ottenuti.
  Con alcune calcolatrici è riproposto il valore di partenza, con altre invece una sua approssimazione. Questa attività è molto utile soprattutto per rendere consapevoli gli studenti della non infallibilità degli strumenti di calcolo.
  È facile capire il motivo della approssimazione: in fin dei conti (immaginiamo di usare una calcolatrice che opera con cinque cifre decimali) $0.33333 \cdot 3$ fa effettivamente 0.99999.
  È invece meno facile capire come faccia una calcolatrice a fornire il risultato 1 nel prodotto $0.33333 \cdot 3$. In questa attività è utile l'intervento diretto dell'insegnante che può rivelare un "trucco" molto seguito dalle calcolatrici: quello di eseguire i calcoli con un numero di cifre decimali maggiore di quelle visualizzate. Ad esempio il numero 0.33333 è considerato, internamente alla macchina, come 0.333333. Al momento di moltiplicarlo per 3, viene calcolato 0.999999. Quando la macchina dovrà scriverlo sul display, avendo a disposizione solo cinque cifre, dovrà operare un arrotondamento alla quinta cifra; ecco così che appare il risultato atteso: 1.
  Possono anche essere proposte altre attività simili: nella Figura 1 viene calcolata su una calcolatrice evoluta la radice quadrata di 2, viene poi calcolato il quadrato della risposta precedente ottenendo così il risultato 2 e infine viene calcolato il quadrato del risultato che era stato indicato per la radice ricopiandolo, cifra per cifra. Si osserva che si ottengono due risultati diversi.

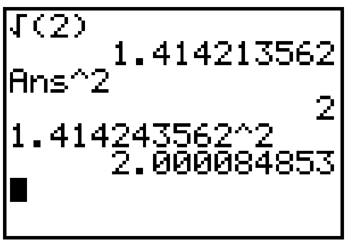

Figura 1

Al momento della sintesi, l'insegnante non mancherà di far notare che, quando si usa un numero *n* con uno strumento di calcolo, si ha in realtà a che fare con ben quattro diversi numeri:

- il numero *n* che intende l'utente;

- il numero n_1 che viene visualizzato dallo strumento di calcolo;
- il numero n_2 con il quale lo strumento di calcolo opera realmente;
- il numero n_3 che viene rappresentato internamente allo strumento, di norma secondo un codice binario.

Come si è visto, non è detto che questi quattro numeri coincidano.
A conclusione di questa attività gli studenti possono essere invitati a individuare in quali situazioni $n = n_1 = n_2$ e in quali situazioni invece ciò non avviene.

- Individuazione del minimo numero gestibile dalla macchina.
Con il termine *eps* (o *macheps*) si indica il più piccolo numero che, sommato a 1, fornisce un risultato più grande di 1. Il suo ordine di grandezza può facilmente essere determinato in vario modo, soprattutto se la calcolatrice con la quale si opera è di tipo evoluto, in grado di accettare in input un predicato. In questo caso, a seconda del modello o della marca, risponde *true* oppure *false,* oppure gli equivalenti 1 o 0. Nella Figura 2 appare lo schermo di una calcolatrice non simbolica che mostra come 1 + 0.0000000001 viene riconosciuto come uguale a 1, mentre 1 + 0.000000001 no.

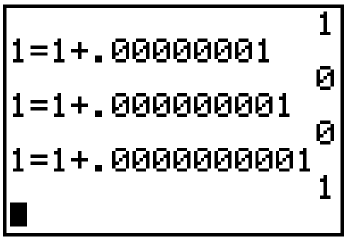

Figura 2

Come approfondimento di questa attività si può realizzare sulle calcolatrici più evolute un semplice programma per la determinazione dell'ordine di grandezza di *eps*; nelle *Figure* 3 e 4 appare il listato del programma e la schermata finale della sua esecuzione.

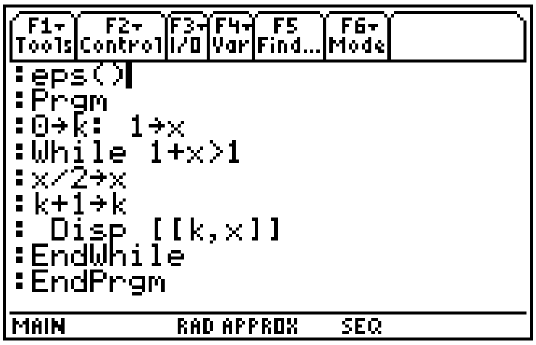

Figura 3

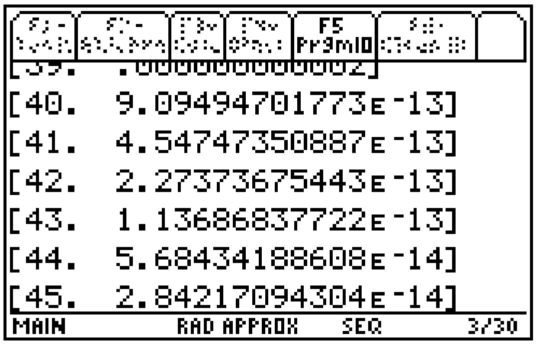

Figura 4

- L'insegnante può invitare gli studenti a determinare "calcoli sbagliati" a causa di valori troppo piccoli da essere valutati dalla macchina; è opportuno far notare che in situazioni "estreme" anche la legge di annullamento del prodotto non è più valida: con una calcolatrice non molto evoluta (ad esempio con un convertitore Euro/Lira) 1/10000 * 1/10000 dà come risultato 0.

Terza fase:
L'esplosione degli errori
In questa fase si può indagare sul fatto che l'errore che inevitabilmente uno strumento di calcolo numerico commette nel rappresentare numeri razionali periodici (o anche non periodici ma con un numero di cifre decimali "troppo grande" per le capacità della macchina) non necessariamente è limitato alle ultime cifre decimali visualizzate ma può, in situazioni particolari, facilmente "esplodere" in modo molto spettacolare.

La cosa non manca mai di meravigliare molto gli studenti e infondere in loro una certa diffidenza nei confronti delle macchine, tanto più benefica quanto più acritico e ingenuamente fiducioso è il loro atteggiamento nei confronti della tecnologia.
Un interessante esperimento potrebbe essere quello di esaminare il comportamento di un'opportuna successione definita ricorsivamente. Poiché queste attività sono consigliate in una classe prima,ovviamente è opportuno usare una terminologia ad hoc, ad esempio parlando di "un calcolo che si esegue a partire dal risultato di un calcolo precedente dello stesso tipo".
Quasi tutte le calcolatrici hanno la possibilità di iterare un calcolo utilizzando un risultato precedentemente ottenuto. Ciò in alcuni tipi di calcolatrici si ottiene invocando con un apposito tasto ANS(1), cioè l'ultimo risultato ottenuto; in altre, come si è già visto in una precedente attività, basta premere un tasto di operatore per utilizzare automaticamente come primo operando l'ultimo risultato.
La stessa cosa può essere ottenuta in un foglio elettronico digitando il valore iniziale in una cella, poi digitando la formula nella cella sottostante facendo riferimento alla prima cella, poi copiando nelle celle in basso tante volte quante si vuole.
Tuttavia lo strumento ideale per questo tipo di attività probabilmente è una calcolatrice evoluta, perché consente di costruire la successione ricorsiva inserendo il valore iniziale, poi digitando la risposta precedente e la definizione della successione in una sola linea; a questo punto è sufficiente premere più volte il tasto di esecuzione (= oppure ENTER) per avere ad ogni pressione l'uno dopo l'altro i termini della successione. Per altro verso, anche il foglio elettronico non è privo di vantaggi: basterà, infatti, modificare il valore della cella più in alto (valore iniziale della successione) perché automaticamente siano modificati tutti i termini della successione che sono stati costruiti a partire da questo.

- Costruzione della successione dei numeri pari. Per quest'attività è sufficiente una calcolatrice anche non evoluta, ma per le successive è opportuno operare con calcolatrici dei tipi più evoluti o con un foglio elettronico.
  2
  +2 = risultato 4
  +2 = risultato 6
  +2 = risultato 8 ecc.
  Per consolidare l'operatività con le successioni ricorsive possono essere proposte anche altre attività analoghe come la costruzione della successione dei numeri dispari, la successione delle potenze di 5, una progressione geometrica di termine iniziale 1000 e ragione 1.04 (calcolo dell'interesse composto) ecc., eventualmente ponendo anche alcune domande accessorie come: " Dopo quanti anni un capitale è raddoppiato in regime di capitalizzazione composta all'interesse del 5 % ?"
- Costruzione della successione "delle radici quadrate" ovvero, $a_n := \sqrt{a_{n-1}}$ con il valore iniziale, ad esempio, di 10.
  E' interessante osservare che, iterando questa successione un numero sufficiente di volte, si ottiene il valore costante 1. Gli studenti, grazie alle precedenti attività, dovrebbero essere in grado da soli di giustificare questo comportamento e di riconoscere se è corretto o meno.
- Costruzione della successione $a_n = a_{n-1}$*2 +3 con il valore iniziale $a_0 = 5$.
  Nelle immagini riportate nelle figure qui di seguito appaiono i risultati ottenuti con due calcolatrici di diverso livello e con un foglio elettronico; a parte l'aspetto generale, si nota che i tre strumenti sono sostanzialmente equivalenti.

	A	B
1	5	Val. iniziale
2	13	+a1*2+3
3	29	
4	61	
5	125	

	A	B
7	509	Val. iniziale
8	1021	+a1*2+3
9	2045	
	61	
	125	
6	253	

Figura 5 *Figura* 6 *Figura* 7

- Determinazione del valore iniziale che costituisce una sorta di "punto fisso", cioè di un valore che genera una successione costante.
  Questo è un problema di facilissima risoluzione: gli studenti da soli possono scoprire che si tratta di $a_0 = -3$, soluzione dell'equazione $2x + 3 = x$. (vedi Figura 8)

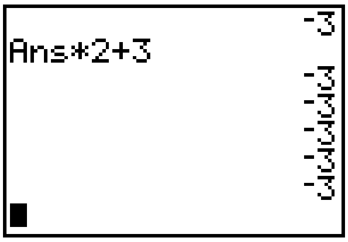

Figura 8

- Le precedenti attività (costruzione della successione e individuazione del valore iniziale che genera una successione costante) possono essere ripetute con le seguente successioni:
  $$a_n = a_{n-1}*5 - 2 \; ; \qquad a_n = a_{n-1}*3 - 12.$$
  E' opportuno invitare gli studenti a costruire altre successioni analoghe individuando per ciascuna il relativo "punto fisso".
  Nella Figura 9 appaiono i primi 15 termini delle due successioni; il calcolo è stato eseguito con un foglio elettronico ma, come si è visto, anche una calcolatrice evoluta si comporta allo stesso modo.

	A	B
1	0.500000000000000	6
2	0.500000000000000	6
3	0.500000000000000	6
4	0.500000000000000	6
5	0.500000000000000	6
6	0.500000000000000	6
7	0.500000000000000	6
8	0.500000000000000	6
9	0.500000000000000	6
10	0.500000000000000	6
11	0.500000000000000	6
12	0.500000000000000	6
13	0.500000000000000	6
14	0.500000000000000	6
15	0.500000000000000	6

Figura 9

- Quando si opera in "laboratorio" è opportuno che le "scoperte" siano fatte direttamente dagli studenti. Se per caso ciò non avviene potrà essere l'insegnante a suggerire qualche esempio adatto. Nella seguente tabella appaiono alcune successioni particolarmente adatte alla “scoperta” che c’interessa:

$$a_n = a_{n-1}*15 - 2\ ;\quad a_n = a_{n-1}*7 - 4\ ;\quad a_n = a_{n-1}*4 - 1$$

con i valori iniziali, rispettivamente, 1/7, 2/3 e 1/3.

	A	B	C
1	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333333
2	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333333
3	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333333
4	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333332
5	0.142857142857	0.666666666667	0.333333333333329
6	0.142857142854	0.666666666672	0.333333333333314
7	0.142857142809	0.666666666701	0.333333333333258
8	0.142857142135	0.666666666910	0.333333333333030
9	0.142857132018	0.666666668373	0.333333333332121
10	0.142856980264	0.666666678614	0.333333333328483
11	0.142854703960	0.666666750296	0.333333333313931
12	0.142820559398	0.666667252073	0.333333333255723
13	0.142308390965	0.666670764511	0.333333333022892
14	0.134625864475	0.666695351576	0.333333332091570
15	0.019387967125	0.666867461032	0.333333328366280
16	-1.709180493118	0.668072227226	0.333333313465118
17	-27.637707396772	0.676505590585	0.333333253860474
18	-416.565610951584	0.735539134096	0.333333015441895
19	-6250.484164273760	1.148773938670	0.333332061767578
20	-93759.262464106300	4.041417570691	0.333328247070312
21	-1406390.936961600000	24.289922994835	0.333312988281250
22	-21095866.054423900000	166.029460963844	0.333251953125000

Figura 10

In cosa consiste in questo caso la “scoperta”? Che, pur trattandosi di successioni che dovrebbero essere a valori costanti, si rivelano tutt’altro che costanti. Dopo un certo numero di termini nei quali il comportamento è quello atteso, i valori vanno via via modificandosi fino ad ottenere addirittura successioni che rapidamente divergono.

La cosa è particolarmente vistosa con una calcolatrice che calcola i termini della successione ad ogni pressione del tasto ENTER: l’ultima cifra visualizzata comincia presto a modificarsi, poi l'errore erode anche la penultima, poi contagia la terzultima e così via con una specie di spettacolare reazione a catena.

Talvolta i valori ottenuti sono diversi in relazione alla rappresentazione interna dei numeri nei diversi strumenti di calcolo, ma in questa attività è sufficiente che il comportamento di massima sia lo stesso.

Si potrebbe indagare sul fatto che solo in alcuni casi si ottiene una successione che dovrebbe essere costante ma non lo è; potrebbe essere interessante studiare il motivo profondo di tale comportamento; ciò coinvolge la rappresentazione interna dei numeri nei calcolatori o nelle calcolatrici e un approfondimento in questa direzione appare eccessivo per il livello scolare (primo biennio) al quale si rivolge questa attività. Al momento ci si può accontentare di dare la seguente motivazione: i numeri molto spesso non possono essere memorizzati con il loro valore esatto ma in modo approssimato (ad esempio un numero razionale periodico come 1/3 = 0.3333… necessariamente avrà un numero finito di cifre decimali) e questo induce un errore

che, a causa dell'algoritmo iterativo, aumenta di entità fino a dare risultati molto diversi da quelli di partenza.
La cosa importante è riuscire a trasmettere agli studenti il messaggio che è bene non essere troppo fiduciosi sui risultati di un computer o di una calcolatrice e che i risultati possono essere affetti da errori non dovuti a guasti o "distrazioni della macchina" ma al modo stesso in cui i numeri sono memorizzati e trattati dallo strumento di calcolo.