Circonferenze e parabole: dal grafico all'equazione

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Individuare le principali proprietà relative alla circonferenza. Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	<u>Spazio e figure</u> Argomentare, congetturare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Fisica

Contesto
Coniche e loro equazioni.

Questa attività viene proposta per il primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle coniche e delle loro equazioni.
L'attività si avvale dell'uso di un software di geometria e consiste in un percorso di ricerca delle equazioni di circonferenze e parabole in opportuni riferimenti cartesiani.

Descrizione dell'attività
<u>Prima fase</u>
Attività con un software di geometria.
Consegna 1
Disegnate sullo schermo una circonferenza e misuratene il raggio. Fissate un sistema di riferimento (asse delle ascisse, asse delle ordinate e origine O). Riuscite a trovare un'equazione che lega l'ordinata di un generico punto della vostra circonferenza alla relativa ascissa ?
Obiettivi della consegna

- Capire che si sta affrontando un problema nuovo: dati una funzione o una curva ed un ben determinato sistema di riferimento, si deve trovare l'equazione che soddisfano le ascisse e le ordinate dei punti della curva.
- Capire che ad una curva a volte è associata una funzione numerica che riesce a "descriverla tutta", mentre altre volte sono richieste più funzioni, racchiuse magari in un'unica equazione; in questo modo si introduce il problema della possibilità o meno dell'esplicitazione di una variabile rispetto all'altra.
- Individuare i parametri del problema: nel caso in cui l'asse delle ascisse passi per il centro della circonferenza e l'origine O sia posta nel centro stesso, si ha soltanto il raggio della circonferenza come parametro.
- Capire che l'equazione ottenuta è valida per tutti i punti della circonferenza e non solo per quelli utilizzati per ricavarla (M_1, M_2, M_3) e cogliere il ruolo dei termini in x^2 e y^2 come caratterizzanti l'equazione determinata.

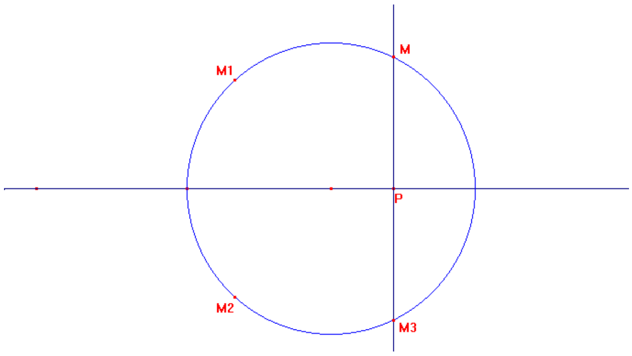

Figura 1

Osservazioni

In base all'esperienza effettuata in classe si è osservato che alcuni studenti provano a scegliere l'asse delle ascisse non passante per il centro e rischiano di non arrivare a niente; dopo vari tentativi, alla fine, pressoché tutti gli studenti lavorano con l'asse delle ascisse passante per il centro della circonferenza, con l'origine collocata proprio in tale punto, e si servono del teorema di Pitagora per ottenere l'equazione. Quasi tutti gli studenti, inoltre, non partono da un punto M sulla circonferenza, ovvero dalla relativa ordinata per ricavare l'ascissa, ma al contrario partono da quest'ultima, ottenuta con un punto vincolato all'asse x (come P in Figura 1) o trasportando una misura numerica su tale asse nei due versi possibili a partire da O, al fine di descrivere anche i valori negativi dell'ascissa x.

I risultati ottenuti dagli studenti vengono discussi in classe. Si può in seguito procedere nell'attività per arrivare all'equazione di una circonferenza in un riferimento generico.

Consegna 2

Determinare l'equazione di una circonferenza nei seguenti sistemi di riferimento, in cui RS è l'asse delle ascisse ed O è il punto origine.

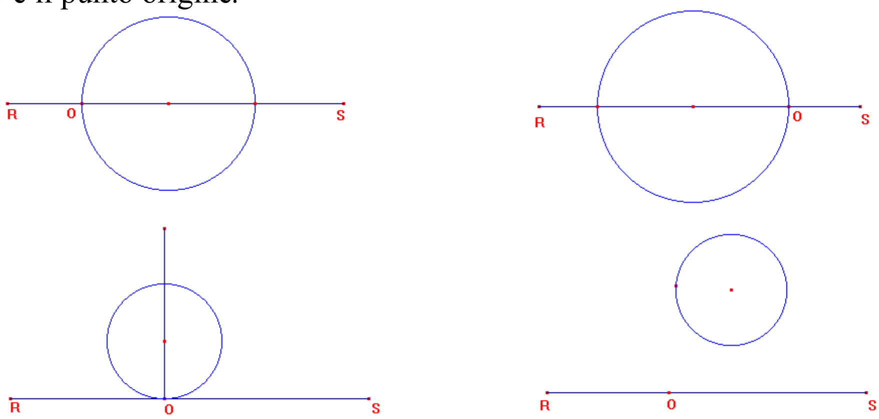

Figura 2

Obiettivi della consegna

- Capire che l'equazione di una curva dipende dal sistema di riferimento scelto.
- Ottenere l'equazione di una circonferenza di raggio r in un sistema di riferimento in cui l'ascissa e l'ordinata del centro sono x_c ed y_c, partendo da alcuni casi particolari.
- Individuare i parametri del problema.
- Sapersi inventare il testo di un problema relativo alla situazione data. Ad esempio, per la prima situazione si può avere: "Determinare l'equazione di una circonferenza di raggio 3 in un sistema di riferimento in cui l'ascissa del centro è 3 e l'ordinata del centro è 0".
- Capire che l'equazione determinata va bene per tutti i punti della circonferenza e non solo per quelli che si sono utilizzati per determinarla e cogliere il ruolo dei termini $(x-x_c)^2$ e $(y-y_c)^2$ come caratterizzanti l'equazione trovata.

Osservazioni
In generale si è osservato che gli studenti adoperano di nuovo il teorema di Pitagora, anche se si può trovare qualcuno che sfrutta il secondo teorema di Euclide applicato, ad esempio, al triangolo HKM (Figura 3).

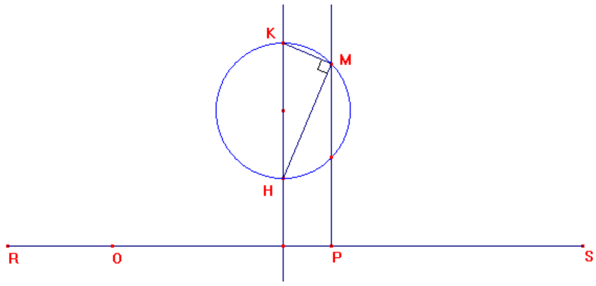

Figura 3

Una volta analizzati e discussi i risultati trovati, deve essere chiaro agli studenti che una circonferenza possiede un'equazione del tipo $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$.

Consegna 3
Individuate il sistema di riferimento in cui una circonferenza ha equazione $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ e determinate la misura del suo raggio.
Obiettivo della consegna

- Arrivare all'equazione generica della circonferenza $x^2+y^2+ax+by+c=0$ partendo da quella fino ad ora conosciuta, ovvero $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=r^2$, e ricavare dal confronto tra le due equazioni le formule: $x_c=\frac{-a}{2}$, $y_c=\frac{-b}{2}$ e $x_c^2+y_c^2-r^2=c$, che permettono di ricavare l'ascissa e l'ordinata del centro e la misura del raggio per poter introdurre il sistema di riferimento opportuno e tracciare la curva.

Una volta corretta in classe la precedente consegna, si suggerisce l'applicazione dei concetti finora introdotti sulla circonferenza mediante i seguenti esercizi.
1) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e la misura del suo raggio.
2) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e le coordinate di un suo punto.
3) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate del suo centro e sapendo che passa per l'origine degli assi cartesiani. (Da questo esercizio si prende lo spunto per dimostrare che non è un caso che nelle circonferenze che passano per l'origine degli assi cartesiani il termine noto sia uguale a 0).
4) Determinare l'equazione di una circonferenza date le coordinate di tre suoi punti. (In questo caso è bene rimarcare il fatto che, poiché per tre punti passa una ed una sola circonferenza, l'equazione che si determina è unica, con coefficienti numerici ben determinati e senza parametri).

Per casa si possono assegnare esercizi analoghi a quelli svolti in classe ed in più è opportuno dare il seguente esercizio:

Determinare le equazioni delle infinite circonferenze che passano per due punti dei quali si conoscono le coordinate.

Dal momento che si è già notato nei precedenti esercizi come siano sempre necessarie tre condizioni per determinare l'equazione corrispondente ad una circonferenza univocamente individuata, l'esercizio serve per mettere ancora meglio a fuoco il ruolo dei parametri nell'equazione $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e comprendere quali implicazioni possiede il fatto che tali parametri siano esattamente tre.

Osservazione
Durante la risoluzione di tutti gli esercizi è importante sottolineare la corrispondenza tra la circonferenza ed i punti che le appartengono e la corrispondenza tra l'equazione della circonferenza, ottenuta dopo aver fissato un certo sistema di riferimento, e le coordinate dei punti che le appartengono. Il punto chiave consiste nel far interiorizzare agli studenti la proprietà secondo cui, se un punto appartiene ad una curva, allora le sue coordinate cartesiane devono verificare l'equazione della curva stessa e viceversa.

Seconda fase
Consegna 1. Assegnati una retta ed un punto ad essa esterno, costruite 5 punti equidistanti dalla retta e dal punto dati.
Osservazioni
L'esperienza ha mostrato che normalmente gli studenti tra i cinque punti richiesti individuano con facilità il punto medio V del segmento di perpendicolare FH condotto dal punto assegnato F alla retta data e quasi tutti riescono a trovare gli altri due punti M_1 e M_2 (Figura 4).
In generale essi non riescono sempre ad iterare il procedimento di costruzione in relazione ad una distanza generica, diversa da FH. Qualcuno può anche avere l'idea di adoperare due opportune rette bisettrici, sempre nel caso particolare della distanza (dal punto e dalla retta assegnati) uguale a FH (Figura 5).

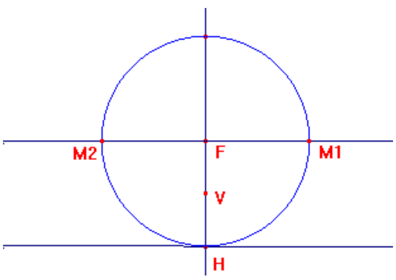

Figura 4

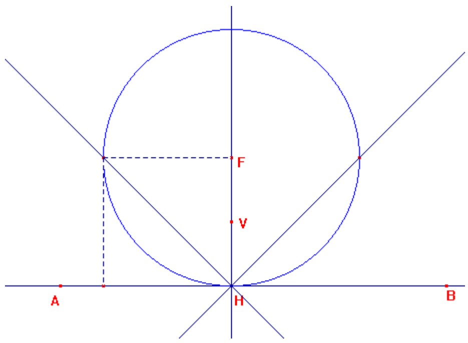

Figura 5

Osservazioni
La discussione relativa ai risultati della consegna 1 deve essere svolta con cura ed ha come scopo primario il passaggio alla costruzione di una parabola come luogo geometrico mediante il software di geometria. In più di un caso si è rilevato che, per affrontare la consegna 1, molti studenti partono prendendo una circonferenza di raggio scelto a caso (pertanto variabile) e costruiscono due punti aventi la proprietà di equidistanza voluta intersecando tale circonferenza con la retta parallela alla retta data, posta ad una distanza da essa uguale al raggio della circonferenza tracciata. Dopo aver analizzato in classe con attenzione tale procedimento di costruzione, è opportuno invitare gli studenti ad applicare il comando del software denominato "Traccia" ai due punti determinati. Il software descrive la traccia dei due punti costruiti, in relazione alla variazione del raggio della circonferenza utilizzata. Dopo che è emerso il fatto decisivo che in realtà sono infiniti i punti che soddisfano la proprietà geometrica richiesta nella consegna 1, si può porre il problema di come determinare l'insieme di tali punti con il comando del software denominato "Luogo". Ciò richiede di rappresentare un'opportuna grandezza variabile "vincolata" ad un'altra grandezza variabile, cosicché il software possa interpretare il comando "Luogo" nel senso corretto di tracciare sullo schermo l'insieme delle posizioni che assume un punto variabile in funzione delle posizioni che assume un altro punto variabile, entro un possibile insieme di configurazioni. Tale problema può essere risolto prendendo ad esempio un punto variabile su una semiretta generica ed utilizzando di conseguenza il segmento che lo congiunge con l'origine della semiretta per individuare il raggio (variabile) della circonferenza della costruzione. Si realizza così il luogo generato dai due punti di volta in volta costruiti, al variare sulla semiretta fissata del punto che determina il raggio della

circonferenza necessaria per la costruzione stessa. Alla fine si attribuisce la denominazione di parabola al luogo di punti così ottenuto e si introducono con gli usuali significati i termini fuoco, direttrice, vertice. Riconosciuta poi l'evidente proprietà di simmetria del suddetto luogo, è opportuno dare la definizione di asse di una parabola**:** si chiama asse della parabola di fuoco F e direttrice d, la retta perpendicolare a d passante per F.
Si possono ora proporre agli studenti una serie di situazioni da studiare, per consolidare quanto appreso.

Consegna 2
Determinate le equazioni di una parabola nei seguenti sistemi di riferimento.

- L'asse delle ascisse RS coincide con la direttrice della parabola e l'origine O è il punto d'intersezione tra l'asse e la direttrice (Figura 6).

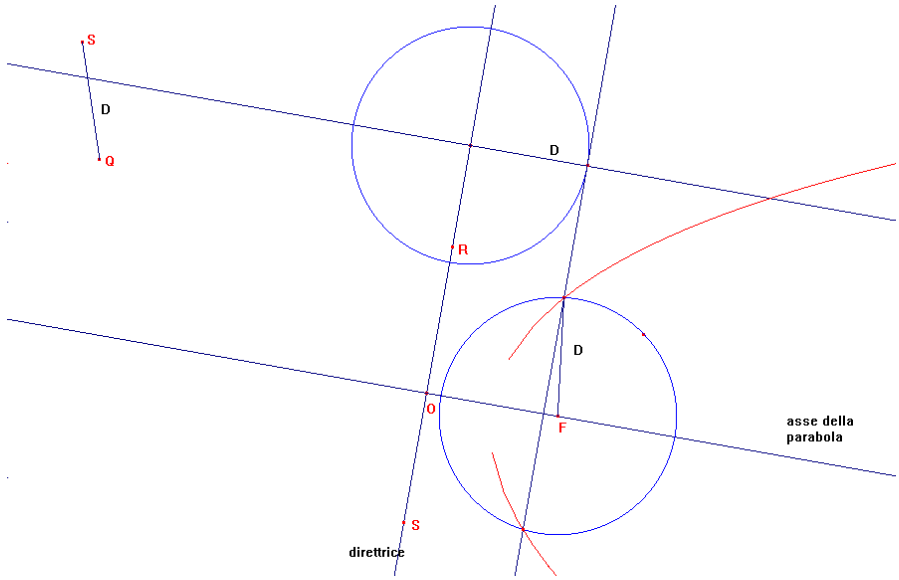

Figura 6

(Risposta: $x^2 + (y_F - y)^2 = y^2$ ovvero $y = \dfrac{1}{2y_F}x^2 + \dfrac{y_F}{2}$)

- L'asse delle ascisse RS coincide con l'asse della parabola e l'origine O è il punto d'intersezione tra l'asse e la direttrice (Figura 7).

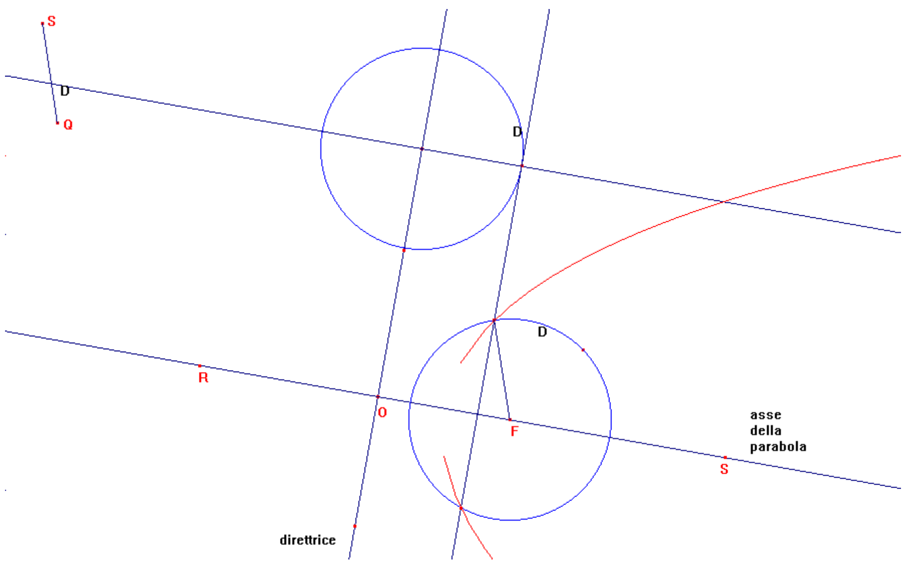

Figura 7

(Risposta: $y^2 + (x - x_F)^2 = x^2$ ovvero $x = \frac{1}{2y_F} y^2 + \frac{y_F}{2}$ ma $y = \pm\sqrt{2xx_F - x_F^2}$)

- L'asse delle ascisse RS è parallelo alla direttrice e passa per il vertice V della parabola e l'origine O coincide con il vertice V (Figura 8).

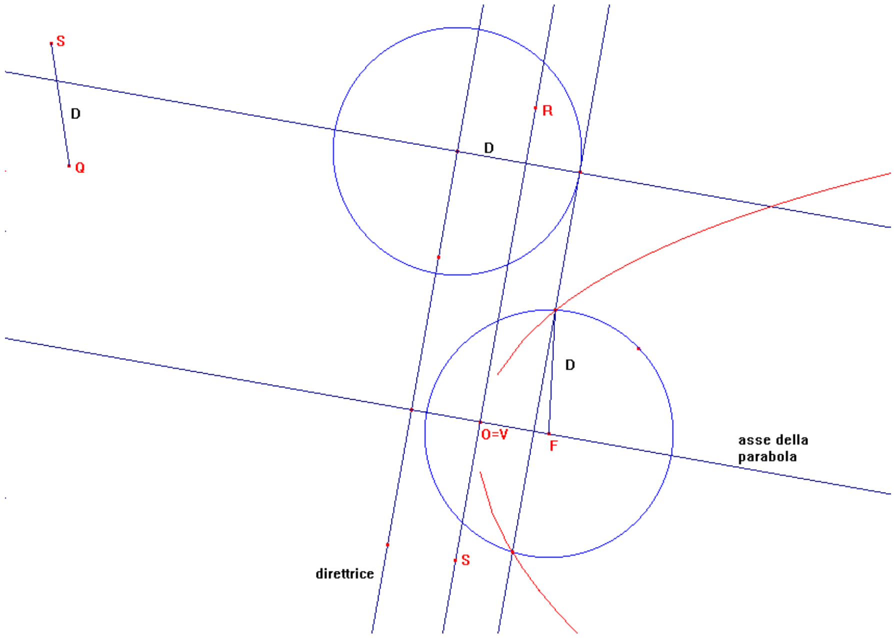

Figura 8

(Risposta $x^2 + (y - y_F)^2 = (y + y_F)^2$ ovvero $y = \frac{1}{4y_F} x^2$)

- L'asse delle ascisse RS è l'asse della parabola e l'origine O coincide con il vertice V (Figura 9).

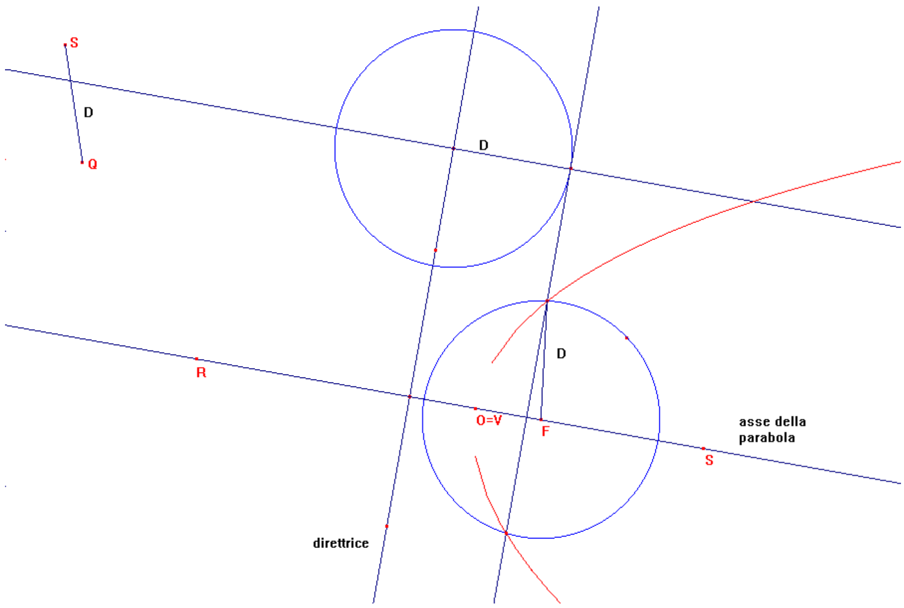

Figura 9

(Risposta: $y^2 + (x - x_F)^2 = (x + x_F)^2$ ovvero $x = \frac{1}{4x_F} y^2$ ma $y = \pm\sqrt{4xx_F^2}$).

Osservazioni
Durante la discussione sui precedenti esercizi,

1) si deve fare il punto sulle diverse equazioni ottenute, mettendo bene in evidenza il fatto che una stessa equazione vale per tutti i punti della parabola in ciascuno dei casi analizzati;
2) si deve osservare che nel primo e nel terzo caso, poiché ad ogni punto sull'asse delle ascisse RS corrisponde un unico punto sulla parabola, è possibile individuare un'equazione per la parabola che rappresenti una funzione numerica del tipo $y = f(x)$; vale la pena ribadire che ciò equivale alla proprietà algebrica che si può esplicitare la variabile y rispetto alla variabile x;
3) si deve mettere in evidenza che nel secondo e nel quarto caso, poiché ad ogni punto sull'asse delle ascisse RS non corrisponde un unico punto sulla parabola, non è possibile individuare un'equazione per la parabola che rappresenti una funzione numerica del tipo $y = f(x)$; è bene in questo caso ribadire che non si può esplicitare la variabile y rispetto alla variabile x in un unico modo; per ciascuna delle due parabole servono due diverse funzioni numeriche del tipo $y = f(x)$ per descrivere tutti i loro punti.
Si passa quindi alla terza consegna della seconda fase.

Consegna 3

Individuate il sistema di riferimento in cui una parabola ha equazione $y = 2x^2$ e descrivetelo; disegnate la parabola assegnata dopo averne trovato il fuoco e la direttrice.

Obiettivi

- Riconoscere che un'equazione del tipo $y = ax^2$ rappresenta una parabola in un sistema di riferimento in cui l'origine O coincide con il vertice V della parabola e l'asse delle ascisse RS è perpendicolare all'asse della parabola in V.
- Capire che da un'equazione del tipo $y = ax^2$ si ricava la formula $y_F = \frac{1}{4a}$ per l'ordinata del fuoco e che quindi si possono individuare nel riferimento scelto le coordinate del fuoco stesso e l'equazione della direttrice della parabola.

A questo punto si propongono alcuni esempi di semplici esercizi da introdurre in un'eventuale prova di verifica scritta sui contenuti dell'intera attività.

Elementi di prove di verifica

1. Considerate la costruzione, qui sotto riprodotta, di due punti di una parabola in modo da sfruttare la retta parallela alla direttrice, posta a distanza D da essa, e la circonferenza di centro il fuoco e di raggio D (Figura 10).

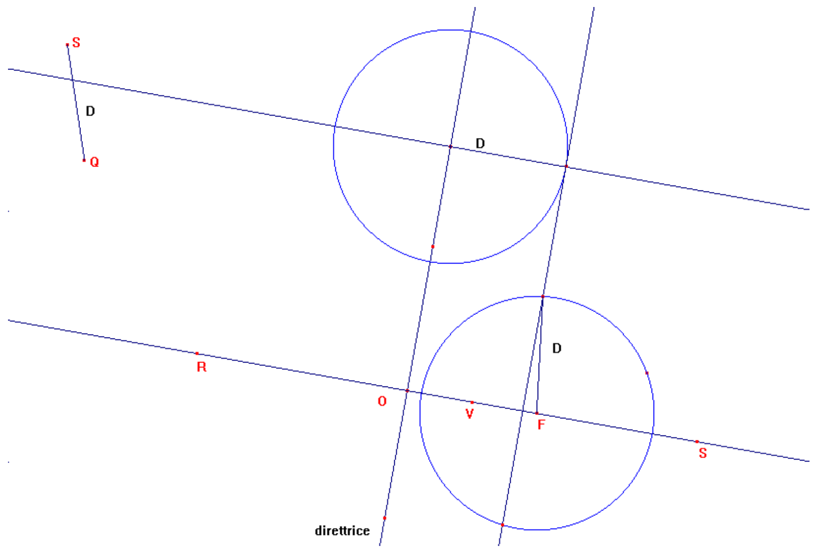

Figura 10

a) Dite quali punti appartengono alla parabola motivando la risposta.
b) Scelti la retta OF come asse delle ascisse ed il punto O come origine, è possibile definire una funzione numerica di cui la parabola sia il grafico? Nel caso in cui ciò sia possibile, ricavate tale equazione.
c) Scelti ancora la retta OF come asse delle ascisse ed il punto medio V tra O e F come origine, è possibile definire una funzione numerica di cui la parabola sia il grafico? Nel caso in cui ciò sia possibile, ricavate tale equazione.

2. Sono date le seguenti equazioni:

d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$;

e) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$;

f) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Rappresentate le curve associate alle equazioni assegnate in un unico riferimento *xOy* di ascisse ed ordinate.