# Equivalenza nello spazio

**Livello scolare**: 2° biennio

| Abilità interessate | Conoscenze | Nuclei coinvolti | Collegamenti esterni |
|---|---|---|---|
| Calcolare aree e volumi di solidi. | Equivalenza nello spazio. Aree e volumi dei solidi.<br><br>Proprietà dei principali solidi geometrici. | <u>Spazio e figure</u><br><br>Numeri e algoritmi<br><br>Argomentare, congetturare e dimostrare<br><br>Misurare<br><br>Risolvere e porsi problemi<br><br>Laboratorio di matematica | Disegno<br>Fisica |

**Contesto**
Equivalenza: dal piano allo spazio.

Questa attività è proposta per il secondo biennio, alla fine della classe quarta.
Gli strumenti di cui avvalersi sono, oltre ad un software di geometria, modelli fisici di solidi, recipienti di forme diverse e ugual volume, …
Lo studente, per affrontare questa attività, deve avere una conoscenza adeguata delle proprietà dei solidi geometrici e conoscere il problema dell'equivalenza e dell'equiscomponibilità nel piano.
L'obiettivo principale dell'attività è di comprendere la necessità di stabilire un principio iniziale, il principio di Cavalieri, per arrivare alla misura dell'estensione dei solidi elementari, preliminare ad un approccio più generale al problema della misura e allo studio di altri strumenti matematici che potranno essere oggetto di studi successivi.

**Descrizione dell'attività**
<u>Prima fase</u>
Si discute in classe sulla rappresentazione nel piano di figure che stanno nello spazio, con carta e matita e con l'uso di strumenti informatici.
Una buona rappresentazione prospettica di una figura solida presuppone conoscenze matematiche e tecniche grafiche non indifferenti. Si può accennare al metodo della assonometria e a quello della prospettiva, almeno nella rappresentazione dei solidi più semplici.
Le potenzialità dei software di geometria sono maggiormente utilizzate per l'insegnamento della geometria piana. Tali software, però, possono essere degli ottimi strumenti anche per l'insegnamento e l'apprendimento della geometria dello spazio. Occorre inizialmente avere qualche nozione di disegno in modo da poter rappresentare nel piano delle figure che stanno nello spazio. Per questo si può usare in modo intuitivo una semplice rappresentazione come l'assonometria cavaliera. L'uso di un software di geometria permette di vedere in maniera dinamica, date le caratteristiche di variabilità delle figure che si possono tracciare, le proprietà delle figure dello spazio.

Di solito le figure nello spazio sono più difficili da realizzare rispetto a quelle piane e richiedono maggiori abilità. Non è quindi facile, con il disegno a mano libera, ottenere figure che visualizzino e rispettino le richieste dei problemi che possono nascere in geometria, ma anche in fisica o nelle altre scienze. Inoltre anche quando si utilizzano gli strumenti da disegno, e si costruisce una figura chiara e corretta con gli strumenti classici, tale figura, nella sua staticità, è ben lontana dalle possibilità offerte da una figura che si può manipolare. Usando le potenzialità dinamiche e interattive di un software di geometria e soprattutto la possibilità di creare facilmente delle animazioni sui fatti più importanti della geometria dello spazio, è possibile, invece, cambiare facilmente il punto di vista e variare tutti gli elementi di una data figura, esaminandola sotto vari aspetti.
Per disegnare correttamente nel piano una figura tridimensionale, si può usare il metodo dell'assonometria cavaliera, che è uno dei più semplici. Gli assi assonometrici, *x, y* e *z* sono situati in modo che due di essi sono fra loro ortogonali (assi *y* e *z*) e il terzo diretto arbitrariamente (l'asse *x*), purché non sul prolungamento dei precedenti. L'unità di misura sarà uguale sui primi due assi coordinati e arbitraria sul terzo (di solito, su questo asse, si sceglie la metà dell'unità di misura scelta sugli altri due assi).
L'assonometria cavaliera è un'assonometria obliqua perché si immagina di proiettare la figura solida su un piano, tramite un fascio di raggi paralleli (ad es. i raggi del sole).
Riferiamo lo spazio alla terna trirettangola *Oxyz,* facendo coincidere l'asse delle *y* con la cosiddetta "linea di terra". L'oggetto da rappresentare si suppone di solito contenuto nel triedro dei semiassi positivi.

Seconda fase

Si rivede l'equivalenza nel piano con un altro approccio (di Cavalieri), come introduzione intuitiva allo stesso metodo applicato alle figure nello spazio. Gli studenti conoscono la proprietà che dice: due parallelogrammi compresi tra due rette parallele sono equivalenti se hanno le basi uguali. Questo fatto di solito viene introdotto elementarmente usando l'equiscomponibilità. Ma si può anche affrontare l'argomento da un punto di vista più generale, che fa uso della teoria degli "indivisibili" di Cavalieri (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647). Esaminiamo la figura 1, dove sono disegnati due parallelogrammi aventi basi uguali e altezze uguali, e immaginiamo di spostare il punto *A'* e con esso la retta *A'B'* parallela ad *AB*. Dall'uguaglianza tra i segmenti *A'B'* e *E'F'*, segue l'equivalenza tra i due parallelogrammi. L'equivalenza tra figure del piano viene quindi ricondotta alla uguaglianza tra segmenti, *A'B'* e *E'F'* nella figura, che Cavalieri chiamava "indivisibili".

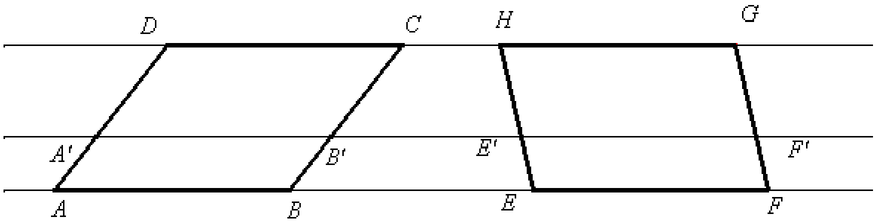

*Figura 1*

La precedente figura potrebbe essere generalizzata come nella seguente figura 2, ottenibile facilmente con un software di geometria.

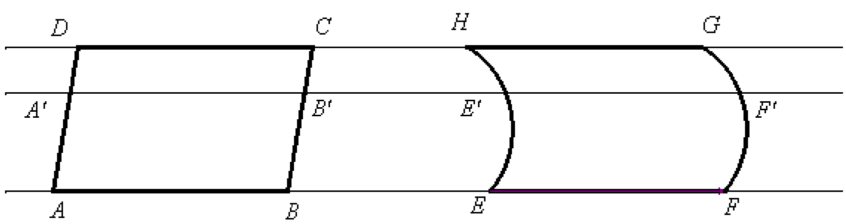

*Figura 2*

Analoghi ragionamenti possono essere fatti per triangoli aventi rispettivamente le basi e le altezze uguali.

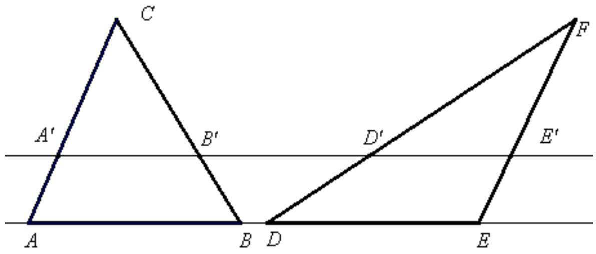


*Figura 3*

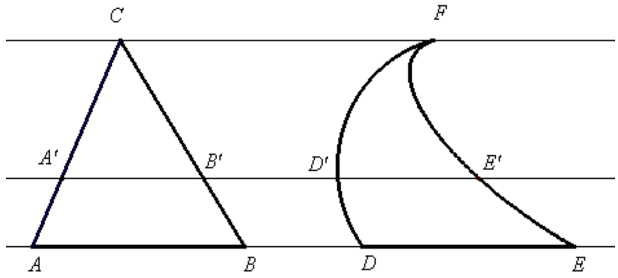


*Figura 4*

Terza fase

In questa fase dell'attività, dalle precedenti considerazioni sull'equivalenza nel piano, si passa all'equivalenza tra figure nello spazio, dove si osserva che l'equivalenza tra solidi equiscomponibili è un metodo piuttosto limitato e non sono generalizzabili i risultati trovati nel piano. Si possono, infatti, presentare solidi equivalenti che non sono equiscomponibili). Per arrivare alla misura dell'estensione dei solidi notevoli occorre quindi introdurre il "principio di Cavalieri".

Si può dire, in modo intuitivo, che con il principio di Cavalieri si stabilisce, per postulato, l'equivalenza tra due figure solide comprese tra due piani paralleli se un qualunque piano parallelo al piano di base le seziona secondo due figure tra loro equivalenti. In questo modo si riconduce l'equivalenza nello spazio all'equivalenza nel piano.

Un software di geometria si presta particolarmente bene per visualizzare il principio di Cavalieri, proposizione che comunque si deve assegnare come postulato per sviluppare la teoria dell'equivalenza tra figure nello spazio.

Un primo disegno si ottiene rappresentando in assonometria due prismi aventi basi equivalenti e altezze uguali. Si ottiene la Figura 5 che può essere utilizzata per meglio comprendere l'idea che sta alla base di questo metodo per stabilire l'equivalenza tra due prismi.

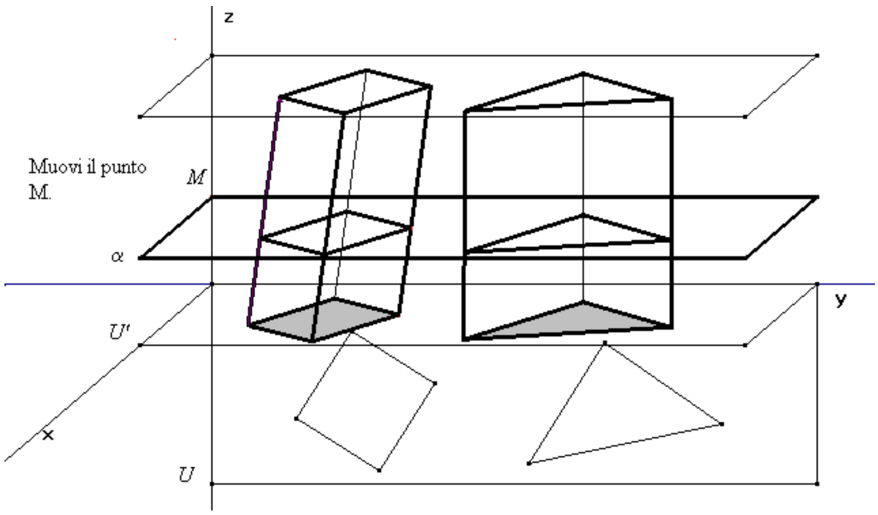


*Figura 5*

I poligoni di base sono equivalenti e possono essere modificati nella figura, mantenendo però la loro equivalenza. Tali poligoni si possono modificare, spostandone i vertici; analogamente il piano che seziona i prismi, parallelo al piano di base, può essere spostato parallelamente a se stesso, muovendo il punto *M.* I prismi possono mutare la loro altezza o diventare retti od obliqui, trascinando un punto base della figura.

In modo del tutto simile è stata ottenuta la Figura 6 su cui si possono fare le stesse osservazioni viste in precedenza e dove è presente un solido più generale del prisma

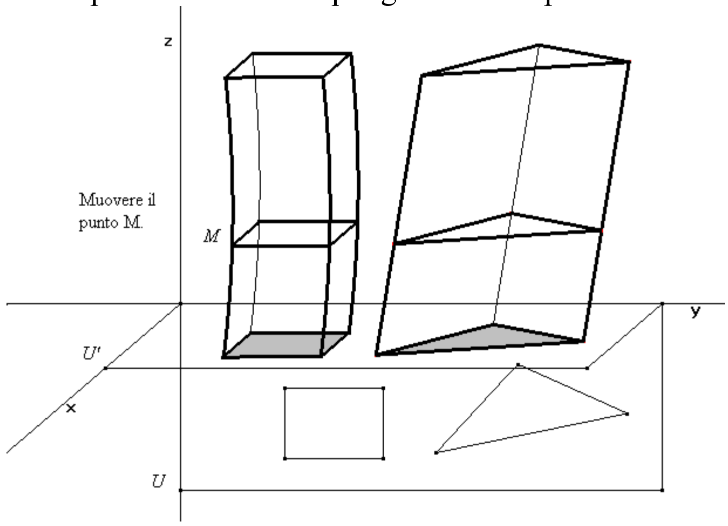


*Figura 6*

Analoga attività si può ripetere con una coppia di piramidi aventi basi equivalenti e la stessa altezza come mostrato nella Figura 7.

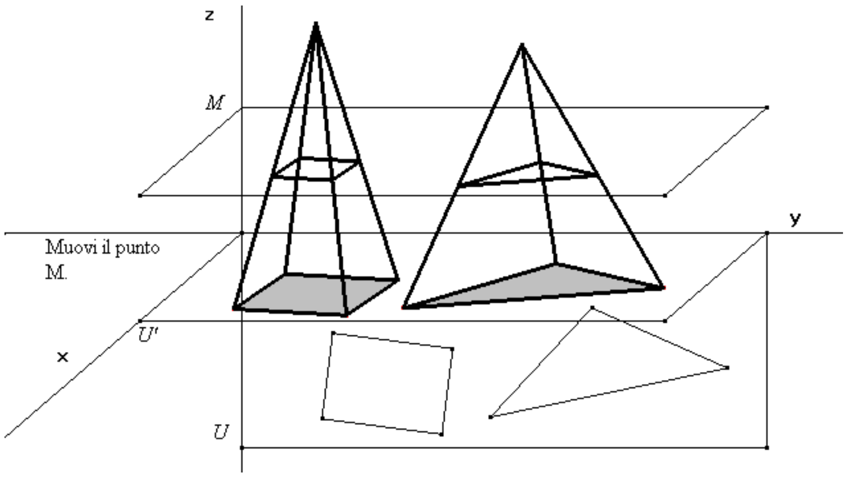


*Figura 7*

Una delle proposizioni più importanti nello studio del volume delle figure dello spazio afferma l'equivalenza tra un prisma a base triangolare e tre piramidi tra loro equivalenti.

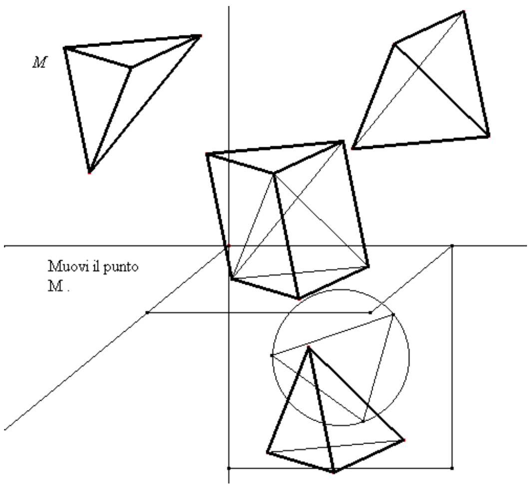


*Figura 8*

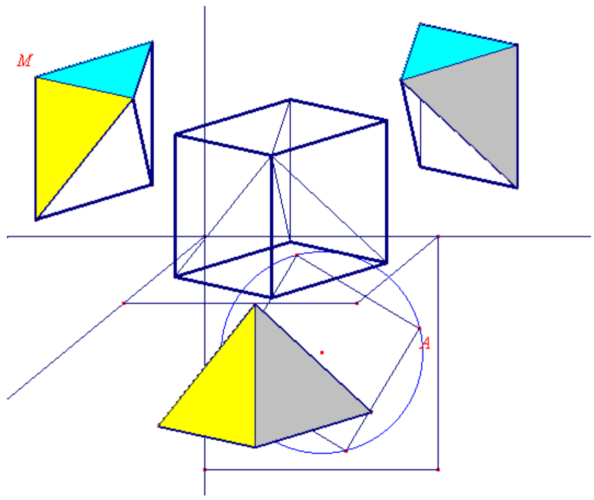


*Figura 9*

Per visualizzare questa proposizione si possono usare dei modelli fisici dei solidi geometrici oppure un software di geometria, con la possibilità di modificare interattivamente le caratteristiche del prisma e conseguentemente delle piramidi (Figura 8 e Figura 9).
Un'altra bella applicazione del principio di Cavalieri riguarda la determinazione del volume della sfera per via elementare. Si tratta della dimostrazione che fa uso della cosiddetta "scodella di Galileo" e che di solito viene svolta nelle classi dove non si ha a disposizione il calcolo integrale. Si dimostra che la sfera è equivalente alla figura detta "anticlessidra". L'anticlessidra si ottiene togliendo da un cilindro equilatero una "clessidra" formata da due coni uguali opposti al vertice O. Un cilindro circolare retto si dice "equilatero" se il diametro di base è uguale all'altezza. I coni che formano la clessidra hanno quindi l'altezza uguale al raggio di base.

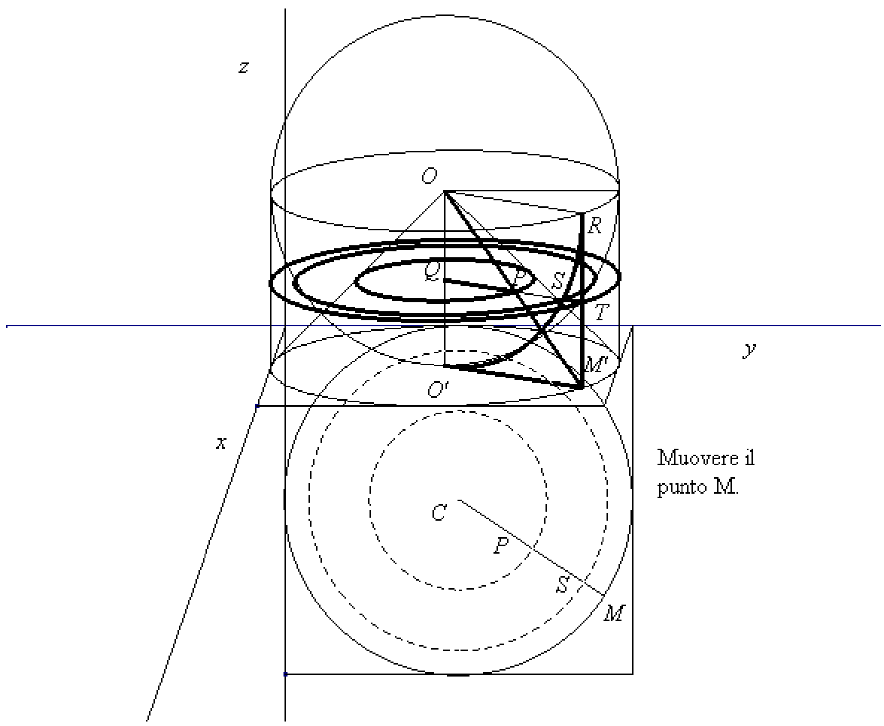


*Figura 10*

Nella dimostrazione citata viene usato il principio di Cavalieri per trovare l'equivalenza tra la "scodella di Galileo" e uno dei coni che formano la clessidra.
La dimostrazione è basata sull'equivalenza tra il cerchio di raggio *QP* e la corona circolare generata dal segmento *ST* in una rotazione completa attorno al punto *Q*.
Anche tale dimostrazione può essere visualizzata in modo dinamico con un software di geometria, spostando il punto *T* (Figura 10) si può visualizzare il variare del cerchio di raggio *QP* e della corona circolare generata da *ST*.

**Possibili sviluppi**

1. Determinazione del volume dell'ottaedro regolare, del volume del tetraedro regolare, …
2. Dal volume della sfera alla formula per la superficie della sfera; il "grande teorema" di Archimede (cilindro equilatero e sfera). Questa attività consente di presentare alcune questioni e approfondimenti anche con un approccio storico (il problema della misura; la "scodella" di Galileo; la nascita del calcolo integrale; …).

**Elementi di prove di verifica**

1. Disegna due poliedri equiscomponibili, ma che non siano nella relazione di Cavalieri.
2. Dato un cubo di spigolo *l* determina lo spigolo del cubo di volume doppio.
3. Dimostra che in un tetraedro le aree delle sue facce sono inversamente proporzionali alle relative altezze.
4. Trovare il volume di un ottaedro regolare di spigolo *l*.
5. Osservando la Figura 11, verifica che il volume di un tetraedro regolare è 1/4 del volume di un ottaedro che ha lo stesso lato.

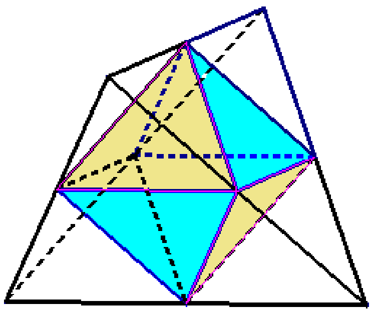

*Figura 11*

6. Un rettangolo di dimensioni *a* e *b* viene fatto ruotare di un giro completo attorno a uno dei suoi lati e genera così due cilindri. Hanno lo stesso volume?
7. I "tetrapack" (Figura 12), contenitori a forma di tetraedro regolare, sono costruiti a partire da un cilindro. Se il diametro del cilindro è 10 cm, trovare il volume del "tetrapak".

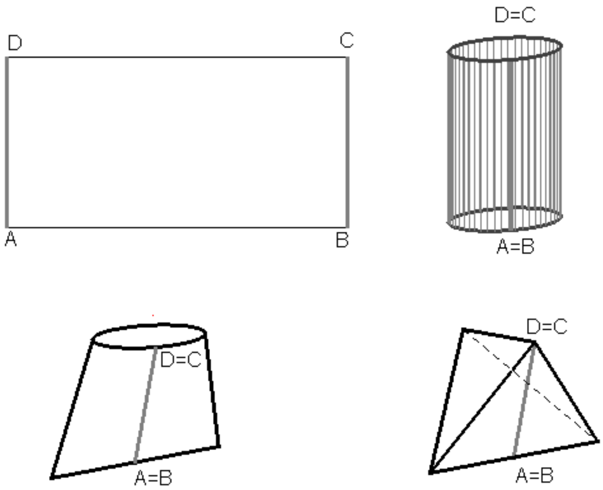


*Figura 12*

8. Un problema di Galileo sul cilindro (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*). Curvando in forma diversa due fogli rettangolari uguali (Figura 13), si ottengono due cilindri con lo stesso volume? I contadini del tempo di Galileo avevano capito che se con un pezzo di tela "più lungo per un verso che per l'altro", si costruisce la superficie laterale di un sacco, allora il sacco più basso e più largo contiene una maggiore quantità di grano.

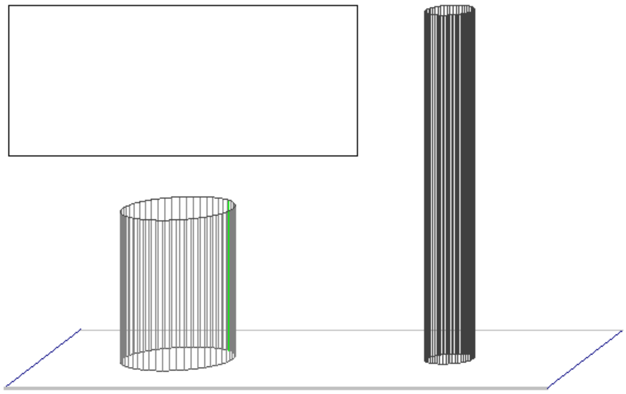

*Figura 13*