La somma dei primi numeri naturali

Livello scolare: 2° biennio.

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Eseguire semplici fattorizzazioni di polinomi.	I polinomi e le loro operazioni.	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Algoritmi numerici e calcolo algebrico.

Nell'ambito di questo contesto l'attività proposta favorisce la produzione di congetture e la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. Una particolare enfasi è data al principio d'induzione come strumento per dimostrare proprietà che riguardano i numeri naturali.
Quest'attività può essere introdotta, nella forma che qui è proposta, in una terza o in una quarta classe, quando gli alunni hanno già acquisito abilità nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni e di sistemi di equazioni lineari, nella risoluzione di problemi che richiedono la determinazione di leggi che regolano la generazione di alcuni dati numerici disponibili.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di introdurre, affrontare e approfondire nozioni come quelle di problema, di successione di numeri naturali, di serie numerica. Consente anche di comprendere e approfondire tecniche come quelle delle differenze finite per determinare leggi polinomiali, della risoluzione di sistemi lineari, dell'applicazione del principio di induzione come strumento per dimostrare proprietà nell'insieme dei numeri naturali. Consente, infine, di avviare una riflessione sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*. L'uso delle tecnologie informatiche, in particolare del foglio elettronico, è particolarmente indicato.
Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi di studenti, chiedendo loro di riferire sulla discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto tra le strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone la situazione–problema sotto riportata a gruppi formati da tre–quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno).

Situazione – problema.

Situazione:

"Si consideri la somma dei primi due numeri naturali, poi la somma dei primi tre, poi quella dei primi quattro e così via …"

Problema:

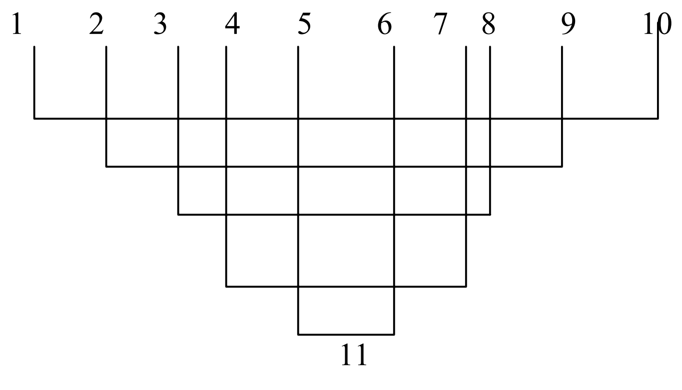
"Si determini una formula che esprima la relazione che lega la somma dei primi n numeri naturali al numero n di numeri naturali considerati."

L'insegnante può anche proporre, come suggerimento per quei gruppi di studenti che avessero difficoltà a capire che cosa s'intende per "somma dei primi *n* numeri naturali", la costruzione di una tabella del tipo:

n	Somma $S(n)$
2	$1 + 2 = 3$
3	$1 + 2 + 3 = 6$
4	$1 + 2 + 3 + 4 = 10$…
5	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
…	…
n	…

Tabella 1

L'insegnante può ottenere preziose informazioni anche osservando il modo nel quale gli studenti organizzano i dati. In un problema come questo l'organizzazione dei dati può essere risolutiva. Per esempio, l'idea del piccolo Gauss[1] (che la soma dei termini della successione equidistanti dal termine mediano è costante) può essere favorita dalla seguente organizzazione dei dati:



Un'organizzazione dei dati di questo tipo suggerisce immediatamente la formula $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Talvolta gli studenti ritengono che questa formula valga solo nel caso in cui n sia un numero pari. In questo caso è opportuno che l'insegnante, con ragionamenti anche differenti, li aiuti a capire che la formula vale per ogni n (per esempio si può dire che se n é dispari, ci si può ricondurre al caso di n

[1] Si dice che Gauss determinò in poco tempo e in questo modo, durante le elementari, la somma dei primi 100 numeri naturali, rispondendo alla richiesta del suo maestro che lo voleva tenere impegnato per un po' di tempo per potersi dedicare anche agli altri bambini.

pari considerando che $S(n)$ può essere scritta come $\frac{(n-1)n}{2}+n$ e invitare gli studenti a semplificare tale somma: $\frac{(n-1)n}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$).

Altre volte alcuni gruppi di studenti trovano una formula corretta grazie ad attente osservazioni, senza però capire bene perché funzioni; inoltre, talvolta, questa formula è equivalente, ma non uguale, a quella costruita seguendo il ragionamento del piccolo Gauss. In questo caso è bene chiedere agli studenti di dimostrare l'equivalenza delle diverse formule trovate.

Un'organizzazione dei dati del tipo di quella della prima tabella proposta favorisce la definizione per ricorrenza della successione che esprime la somma dei primi n numeri naturali:

$$\begin{cases} S(2)=3 \\ S(n)=S(n-1)+n \end{cases}$$

La determinazione di una legge di questo tipo è sicuramente facilitata dal lavorare in un ambiente del tipo di quello dei fogli elettronici. In tal caso, infatti, è possibile (e naturale, per chi è abituato a utilizzare un foglio elettronico) organizzare il foglio come qui di seguito suggerito (nella prima colonna, ottenuta con la formula = A2 + 1, ci sono i primi 30 numeri naturali e nella seconda colonna, ottenuta con la formula = A3 + B2, a partire dalla terza cella, c'è la somma dei primi 2, primi 3, primi 4, fino alla somma dei primi 30 numeri naturali):

n	S(n)
1	1
2	3
3	6
4	10
5	15
6	21
7	28
8	36
9	45
10	55
11	66
12	78
13	91
14	105
15	120
16	136
17	153
18	171
19	190
20	210
21	231
22	253
23	276
24	300
25	325
26	351
27	378
28	406
29	435
30	465

Tabella 2

È anche possibile chiedere agli studenti, che hanno utilizzato una formula del tipo $\begin{cases} S(2)=3 \\ S(n)=S(n-1)+n \end{cases}$, di determinare programmi che calcolino sia iterativamente sia ricorsivamente i valori della successione $S(n)$.

<u>Seconda fase</u>
L'insegnante avvia una discussione matematica alla presenza dell'intera classe, invitando i rappresentanti di alcuni gruppi a presentare la propria strategia risolutiva.
Nel caso in cui non siano state presentate da alcun gruppo, l'insegnante può anche suggerire le seguenti due ulteriori strategie.
Approccio geometrico:

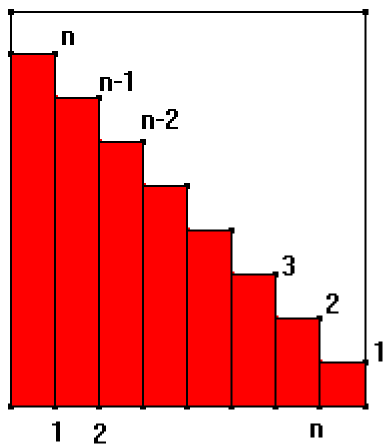


Figura 1

Organizzare i dati in questo modo consente di notare immediatamente, quasi senza bisogno di spiegare (almeno per alcuni studenti), che 1 + 2 + 3 + …. + n – 1 + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ (ossia metà dell'area del quadrato di lato n + 1 rappresentato in Figura 1).

Approccio con le differenze finite:
La Tabella 2 costruita con un foglio elettronico e prima riportata può essere arricchita di importanti informazioni, fornite dalle colonne che riportano le differenze prime e seconde dei valori della successione $S(n)$:

N	S(n)	Diff. prime	Diff. seconde
1	1		
2	3	2	
3	6	3	1
4	10	4	1
5	15	5	1
6	21	6	1
7	28	7	1
8	36	8	1
9	45	9	1
10	55	10	1
11	66	11	1
12	78	12	1
13	91	13	1
14	105	14	1
15	120	15	1
16	136	16	1
17	153	17	1
18	171	18	1
19	190	19	1
20	210	20	1
21	231	21	1
22	253	22	1
23	276	23	1
24	300	24	1
25	325	25	1
26	351	26	1
27	378	27	1
28	406	28	1
29	435	29	1
30	465	30	1

Tabella 3

Poiché le differenze seconde sono costanti, allora $S(n)$ varia quadraticamente con n, ossia

$$S(n) = an^2 + bn + c$$

Si tratta di determinare a, b, c. Servono, quindi, tre condizioni, per esempio quelle date dalle prime tre righe della Tabella 3, che danno luogo al sistema lineare:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=3 \\ 9a+3b+c=6 \end{cases}$$

Il sistema dà come soluzioni $a = b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, in accordo con le altre soluzioni.

L'insegnante, dopo aver commentato le differenti strategie risolutive e dopo averne eventualmente suggerite altre, avendo cura di soffermarsi sui limiti e potenzialità di ciascuna (limiti e potenzialità che non valgono in assoluto, ma che in genere sono relative al risolutore), potrebbe passare a riflettere sulle diversità che caratterizzano i metodi di computazione per iterazione e per ricorsione[2].

[2] Vedere a questo proposito l'attività "Concentrazione di un farmaco nel sangue", presente nel nucleo Relazioni e funzioni.

Infine dovrebbe avviare una discussione–riflessione su cosa voglia dire giustificare la correttezza di un procedimento risolutivo in matematica: la discussione ha lo scopo di evidenziare l'importanza e la centralità in matematica della dimostrazione, che ha, fra le sue funzioni, certamente quella di esplicitare la relazione di conseguenza logica tra assiomi e teorema di una teoria. L'insegnante può far notare che nei procedimenti risolutivi presi in considerazione è ben chiara la tesi da dimostrare ($S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$), mentre è meno chiara qual è la teoria di riferimento, cioè quella nella quale avviene la dimostrazione (per esempio, quali sono gli assiomi da cui si parte e, addirittura, qual è il campo della matematica cui ci si riferisce, visto che si sono utilizzate anche conoscenze di geometria per risolvere un problema aritmetico).
Il tema è culturalmente ed epistemologicamente interessante (può essere fatto risalire al dibattito che fu particolarmente serrato agli inizi del Novecento tra dimostrazioni pure ed impure) e, secondo l'interesse e la partecipazione della classe, può essere approfondito, anche con il contributo di colleghi di altre discipline. Sicuramente, però, è l'occasione per una significativa e semplice applicazione del principio di induzione per dimostrare una proprietà dei numeri naturali.

Dimostrazione per induzione:
Base: $S(2) = 3$, infatti $1 + 2 = 3$
Passo induttivo:
Ipotesi: $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ Tesi: $S(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Infatti: $S(n+1) = S(n) + n + 1$ (per definizione)

$S(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1$ (per Ipotesi)

Quindi: $S(n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, che è la tesi

Allora, poiché vale la base e il passo induttivo, la proprietà vale per ogni $n > 1$ (ma anche per $n = 1$: basta porre per definizione $S(1) = 1$).

Possibili sviluppi
- Dimostrazioni, per induzione, di alcune proprietà che riguardano i numeri naturali.
- Riflessione sul significato di una teoria.
- Riflessione sul ruolo della dimostrazione nell'organizzazione, nella sistemazione e nella comunicazione delle conoscenze matematiche.

Elementi di prove di verifica

Congetture e dimostrazioni con i numeri naturali

1. Trova la somma dei primi 100 numeri dispari. Trova la somma dei primi n numeri dispari.

2. Trova la somma dei primi 100 numeri pari. Trova la somma dei primi n numeri pari.

3. Determina una formula che dia la somma dei primi n numeri naturali multipli di 3.

4. Determina una formula che dia la somma dei quadrati dei primi n numeri pari.