Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio. Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione. Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti.	Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.	<u>Spazio e figure</u> Argomentare, congetturare, dimostrare	Storia

Contesto
Storia della matematica.

L'attività può essere introdotta alla fine della prima classe, quando gli studenti sanno riconoscere e costruire poligoni equiscomponibili. Il contesto è quello della storia della matematica.
La proposta prende lo spunto dalla lettura di un racconto in cui si parla del teorema di Pitagora, "Una perla pericolosa" da *L'uomo che sapeva contare* di Malba Tahan (pseudonimo del matematico brasiliano Jùlio César de Mello e Souza), per suscitare o rinnovare negli studenti l'interesse per questo teorema e per la sua dimostrazione.
L'insegnante guida gli studenti a comprendere il corretto significato di verifica di una congettura in casi particolari, giungendo poi a saper distinguere, consapevolmente, tra verifica e dimostrazione.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta non solo offre una ripresa e un approfondimento di contenuti noti agli studenti, che infatti nella scuola media hanno già conosciuto e applicato il teorema di Pitagora, ma li guida anche ad argomentare correttamente.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante inizia con la lettura di una parte del racconto.
"Siamo assai impazienti", continuò lo Sceicco, "che tu ci aiuti a rispondere a una domanda posta dal principe Cluzir Shah. In quale modo gli indiani hanno contribuito al progresso della matematica e chi sono i geometri indiani che maggiormente si sono distinti in questa scienza?"
"Generoso Sceicco!", rispose Beremiz, "Il compito che tu mi affidi richiede cultura e obbiettività: cultura, per conoscere nei particolari la storia della scienza, obbiettività per analizzarla e giudicarla con criterio. D'altra parte, o Sceicco, ogni tuo desiderio è per me un ordine. Racconterò quindi a questa eletta compagnia, quale piccolo omaggio al principe Cluzir Shah, le poche cose che conosco sullo sviluppo della matematica nel paese del Gange."
"Nove o dieci secoli prima di Maometto viveva nell'India un famoso bramino di nome Apastamba. Questo sapiente, per istruire i preti sulla costruzione di altari e sul progetto di templi, scrisse un'opera chiamata Salvasūtra he contiene molti esempi matematici. È improbabile che questo trattato sia stato influenzato dalle teorie pitagoriche, dal momento che gli studiosi indiani non seguivano i metodi di indagine dei greci. Nelle sue pagine si trovano comunque numerosi teoremi e

regole per costruzioni geometriche. Per spiegare la costruzione di un altare, Apastamba propone di tracciare un triangolo rettangolo, i cui lati misurino rispettivamente 39, 36 e 15 centimetri; per risolvere il problema egli applica un teorema attribuito al greco Pitagora: "L'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sugli altri due lati". E, rivolgendosi allo sceicco Iezid, che ascoltava attentamente: "Sarebbe più facile spiegare questa famosa regola con un disegno". Lo Sceicco fece un cenno ai servitori, e subito due schiavi portarono una larga scatola piena di sabbia, sulla cui liscia superficie Beremiz si mise a tracciare figure e a effettuare calcoli per il Principe di Lahore, servendosi di una canna di bambù. "Ecco un triangolo rettangolo. Il suo lato maggiore si chiama ipotenusa. Costruiamo adesso un quadrato su ciascuno dei suoi lati: è facile dimostrare che il quadrato grande disegnato sull'ipotenusa ha esattamente la stessa area della somma degli altri due quadrati, confermando così la giustezza del teorema di Pitagora." (Figura 1).

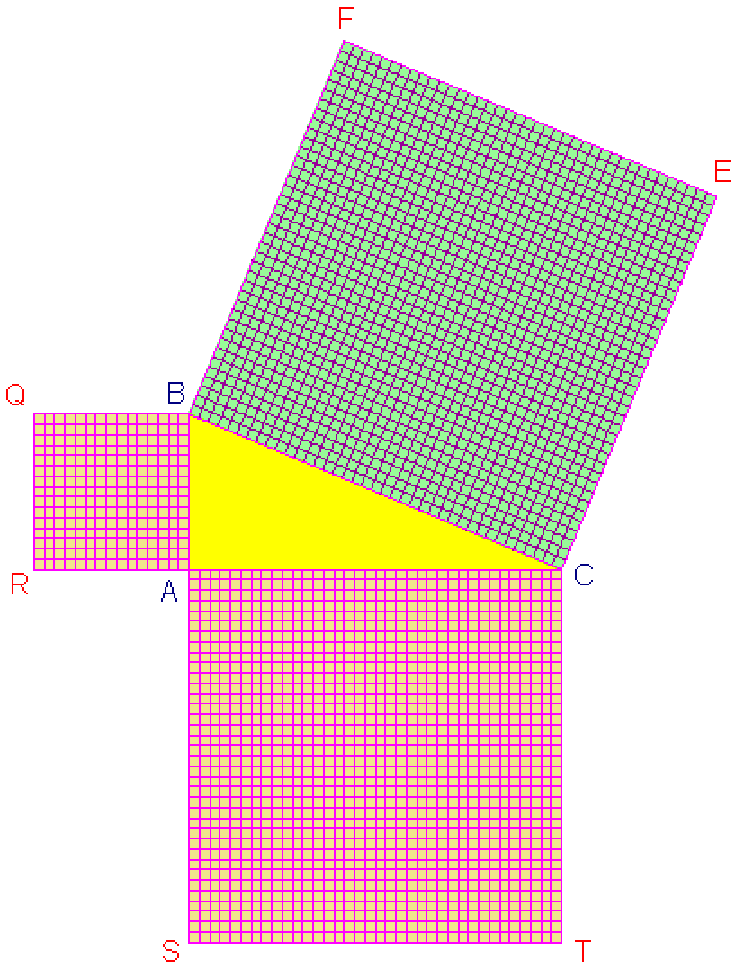

Figura 1

L'insegnante apre la discussione allo scopo di guidare gli studenti ad analizzare quanto viene descritto nel testo e a verificarlo con strumenti grafici o con un software di geometria.
Invita poi a ricercare e a costruire casi analoghi, ovvero triangoli rettangoli in cui i lati hanno misure espresse da numeri interi.

<u>Seconda fase</u>

L'insegnante prosegue proponendo agli studenti la lettura di un altro passo del racconto:
Il Principe chiese se la stessa regola fosse valida per tutti i triangoli. Al che Beremiz rispose solennemente: "È vera e costante per tutti i triangoli rettangoli. Posso affermare, senza tema di

smentita, che la legge di Pitagora esprime una verità eterna. Ancor prima che il sole splendesse nel firmamento, ancor prima che ci fosse aria da respirare, il quadrato dell'ipotenusa era uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati." Affascinato dalle spiegazioni di Beremiz, il Principe si rivolse con calore al poeta Iezid: "Come è meravigliosa la geometria, amico mio! Che scienza interessante! Dalle sue spiegazioni emergono due qualità atte a impressionare anche l'uomo più umile e sprovveduto: la chiarezza e la semplicità". E, sfiorando leggermente la spalla di Beremiz con la mano sinistra, gli chiese: "Questa scoperta degli antichi greci compare anche nel Salvasūtra di Apastamba?" Beremiz non esitò a rispondere. "Certamente, mio Principe!" disse. "Anche se il cosiddetto teorema di Pitagora compare nel Salvasūtra in una forma un po' diversa. Fu leggendo l'Apastamba che i preti appresero l'arte di costruire santuari, mettendo in relazione i triangoli rettangoli con i relativi quadrati".
L'insegnante sollecita la discussione allo scopo di suscitare le seguenti domande:
Tale proprietà vale per tutti i triangoli rettangoli o solo per quelli che hanno i lati con particolari misure? Attraverso quanto verificato si può rispondere a tale domanda?
Si vuole giungere in tal modo a far emergere la necessità di trovare altre vie per accertare la validità della proprietà per tutti i triangoli rettangoli.

Terza fase
Si propongono alcune dimostrazioni della validità del Teorema di Pitagora (esse non fanno ovviamente riferimento a misure particolari dei lati del triangolo).
a) L'insegnante propone di disegnare (Figura 2a) il triangolo rettangolo ACB, di costruire il quadrato BCKH sull'ipotenusa BC ed il quadrato AEFL che ha un angolo coincidente con l'angolo retto del triangolo rettangolo e i lati passanti per i vertici del quadrato BCKH.
Si invitano gli studenti a dimostrare l'uguaglianza dei quattro triangoli rettangoli.
Si procede poi a disegnare (Figura 2b) il triangolo ABC uguale al precedente, a completare il rettangolo ACSB, a costruire i quadrati ABRN e BSPQ, a completare il quadrato NCPT e a tracciare la diagonale TB del rettangolo RBQT.
Gli studenti dimostrano l'uguaglianza dei triangoli rettangoli, osservano che i quadrati AEFL e NCPT sono uguali. Deducono da ciò che il quadrato BCKH (Figura 2a) ha l'area uguale alla somma delle aree dei quadrati ABRN e BSPQ (Figura 2b).

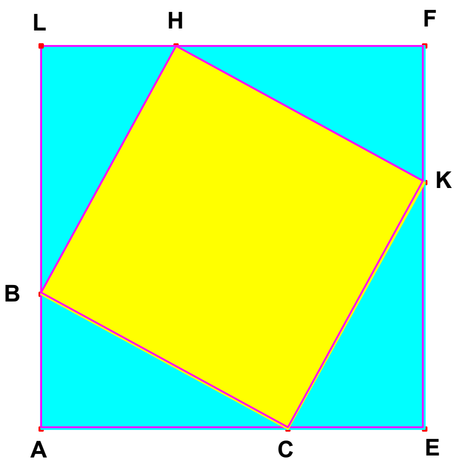

Figura 2a

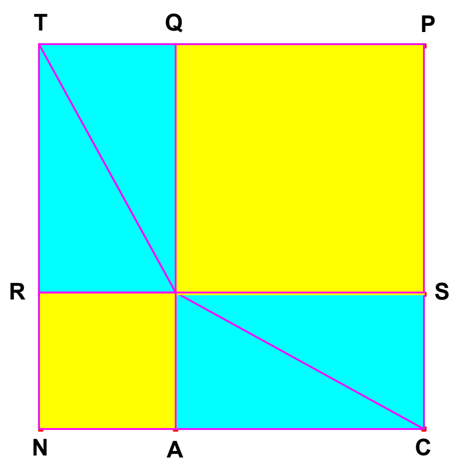

Figura 2b

b) Facendo riferimento alla Figura 2a, si può dare anche una dimostrazione che utilizza il calcolo algebrico.
Se a, b, c sono rispettivamente le misure dell'ipotenusa e dei cateti del triangolo ABC allora l'area del quadrato AEFL è $(b+c)^2$, che si può anche ottenere come somma delle aree dei quattro triangoli rettangoli uguali a ABC e del quadrato costruito sull'ipotenusa BC, ovvero $4\ (bc/2) + a^2$.

Uguagliando le espressioni algebriche che esprimono l'area del quadrato AEFL si ottiene l'uguaglianza $b^2 + c^2 = a^2$.
c) Si propone poi una dimostrazione attribuita al matematico arabo Thabit Ibn Qurra.
L'insegnante invita gli studenti a disegnare (Figura 3a) il triangolo rettangolo ACB, a costruire il quadrato BCEF sull'ipotenusa BC, a costruire i segmenti EN e FQ perpendicolari ad AC e il segmento BS perpendicolare a FQ.
Invita poi gli studenti a dimostrare che i triangoli CNE e FLE sono uguali a ACB e che i quadrilateri AQSB e QNEL sono quadrati con i lati uguali ai cateti di ACB.
Gli studenti disegnano ora la Figura 3b, uguale alla precedente, ma colorata in modo diverso facendo notare l'equivalenza tra il quadrato BCEF e i quadrati AQSB e QNEL.

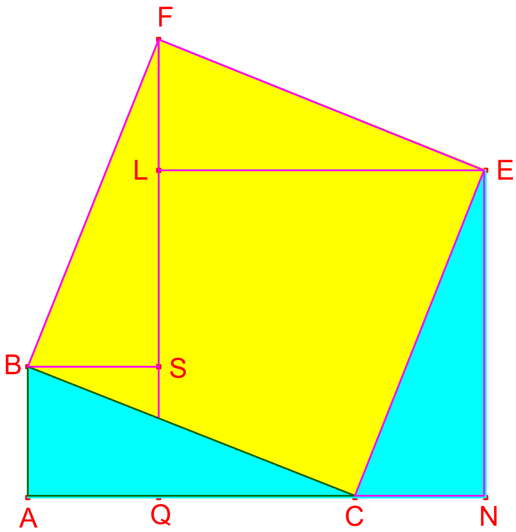

Figura 3a

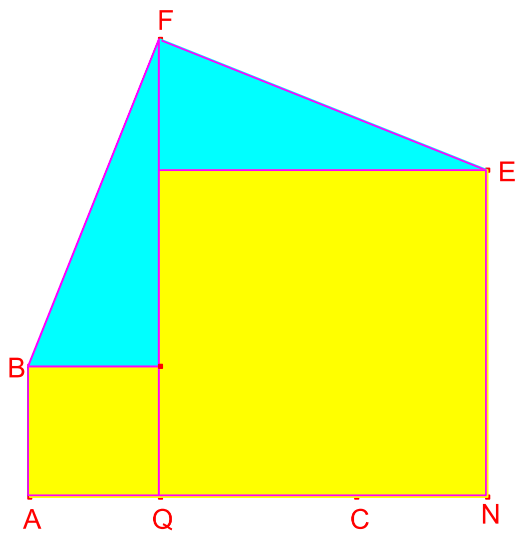

Figura 3b

d) L'insegnante può anche proporre la seguente dimostrazione (figura 4).

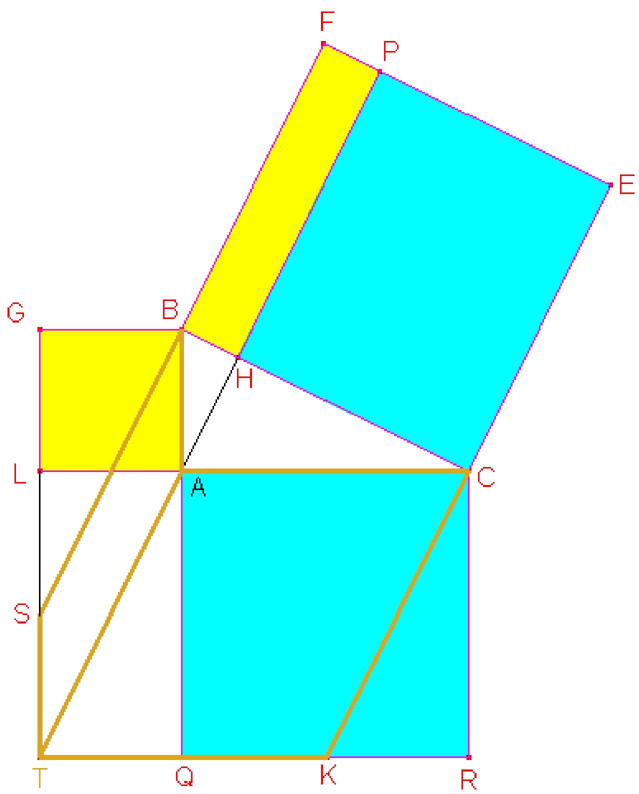

Figura 4

È dato il triangolo rettangolo ACB; si costruiscono i quadrati sui cateti e sull'ipotenusa, si traccia l'altezza relativa all'ipotenusa che interseca BC in H e FE in P.
Sapendo che il quadrato LABG è equivalente al rettangolo BHPF, perché entrambi sono equivalenti al parallelogramma ABST (primo teorema di Euclide) e che il quadrato AQRC è equivalente al rettangolo HCEP, perché entrambi equivalenti al parallelogramma TKCA, si ottiene la tesi.

Quinta fase
L'insegnante racconta agli studenti del modo in cui si dice che gli Egiziani costruissero gli angoli retti, avvalendosi di cordicelle con nodi equidistanti in numero uguale a quelli di terne pitagoriche, per esempio 3, 4, 5.
Facevano 11 nodi su una corda a distanza uguale tra loro. Fissavano quindi a terra i due capi della corda e, tenendo la corda tesa, la fissavano al terreno nel terzo e settimo nodo.

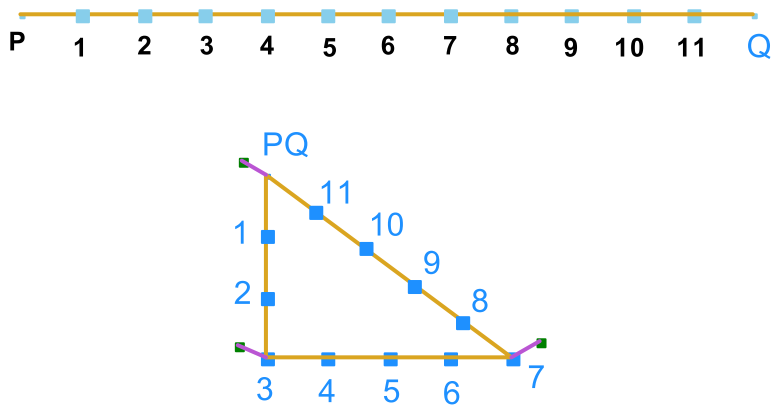

Figura 5

Si può chiedere agli studenti se ritengono questo procedimento equivalente a quanto visto finora o se osservano qualche differenza.
L'insegnante li guida a concludere che quanto fatto dagli Egiziani rappresenta l'operazione inversa. Le attività svolte in precedenza conducono alla dimostrazione di una proprietà dei triangoli rettangoli (il teorema di Pitagora), mentre il modo di procedere degli Egiziani si fonda sull'enunciato inverso: se i lati di un triangolo hanno misure tali che la somma dei quadrati di due è uguale al quadrato della terza allora il triangolo è rettangolo.

Sesta fase
Si vuole dimostrare l'inverso del teorema di Pitagora.
L'insegnante invita gli studenti a disegnare un triangolo (per esempio il triangolo ACB della Figura 6) che abbia i lati con misure tali che:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

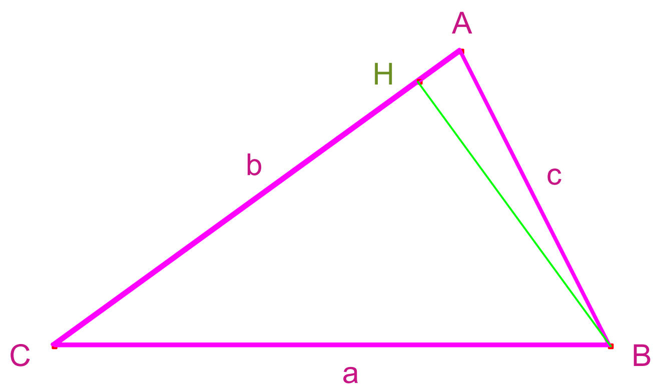

Figura 6

Se l'angolo in A formato dai lati minori non è retto (nella Figura 6 si suppone acuto), allora si può tracciare da uno dei vertici del lato più lungo (B) la perpendicolare al lato opposto (AC); si ottiene così un triangolo rettangolo (CBH), ma si viene a formare anche un triangolo rettangolo (AHB) in cui, applicando il teorema di Pitagora (dimostrato in precedenza), il cateto (BH) ha lunghezza uguale all'ipotenusa (AB) e questo non è possibile. L'angolo (in A) formato dai lati minori del triangolo dato deve essere retto.

Possibili sviluppi

I) Teorema di Pitagora sostituendo figure simili ai quadrati.

La proprietà espressa dal teorema di Pitagora è ulteriormente generalizzabile: non si verifica solo nel caso in cui vengano costruiti quadrati sui lati del triangolo rettangolo, ma vale anche in tutti quei casi in cui si costruiscono figure che hanno le aree proporzionali al quadrato del segmento su cui vengono opportunamente costruite. Ciò accade a figure tra loro simili come, per esempio, poligoni simili, poligoni regolari, parti simili di cerchio opportunamente costruite sui lati del triangolo rettangolo.

II) Terne pitagoriche.

Costruire triangoli rettangoli i cui lati abbiano come misura numeri naturali, ovvero guidare alla generazione di terne pitagoriche.