Origami, riga e compasso, software geometrico

Livello scolare: 1° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi. Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà.	<u>Spazio e figure</u> Argomentare e dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Disegno

Contesto
Regolarità e simmetrie nel piano.

Il contesto di riferimento per questa attività è quello scolastico della geometria elementare, ma anche quello di esperienze legate al piegamento della carta, all'osservazione di regolarità e simmetrie in oggetti del mondo reale e, quindi, un contesto anche determinato da esperienze di carattere empirico e percettivo.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in tre fasi. Nella prima vengono presentate due costruzioni con la piegatura della carta di un pentagono regolare (una approssimata e una, in teoria, esatta). Nella seconda fase viene presentata una costruzione del pentagono regolare con riga e compasso; nella terza la costruzione del pentagono regolare è effettuata in un ambiente di software di geometria. Tutte e tre le fasi vengono realizzate in un contesto di "apprendistato cognitivo", con l'insegnante che propone le costruzioni, evidenziando i momenti più significativi delle stesse e gli studenti che imparano osservando e imitando l'insegnante. L'obiettivo è quello di far nascere negli studenti la domanda "perché?", ossia l'esigenza di dimostrare perché una data costruzione funziona. In questo caso il ruolo della dimostrazione non è tanto quello di convincere che una costruzione è corretta, quanto quello di spiegare perché è corretta. L'insegnante può limitarsi a fornire alcune idee che evidenzino le caratteristiche delle costruzioni effettuate, preparando la strada per un approccio sistematico al problema di trovare la dimostrazione che potrà essere risolto solo nel secondo biennio.
Qui di seguito vengono presentate le tre fasi con una breve descrizione delle azioni che l'insegnante può compiere nella conduzione dell'attività.

Prima fase

Il pentagono da un foglio quadrato.

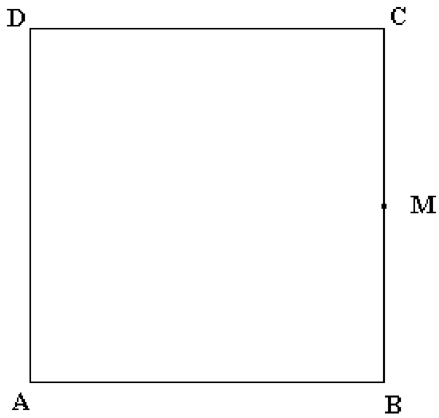


Figura 1

Quando mostro le operazioni di piegatura della carta non mi serve un linguaggio particolarmente curato. La comunicazione si basa sui gesti e i termini “questo” e “quello” abbondano. Quando invece voglio descrivere in un testo la costruzione, il linguaggio si deve precisare e diventa inevitabile introdurre notazioni.

La Figura 1 è un foglio quadrato: con gli allievi è interessante discutere sui modi possibili di “squadrare” un foglio qualsiasi. I vertici del quadrato sono indicati con lettere maiuscole. Il punto M è il punto medio del lato BC ottenuto piegando la carta in modo da far coincidere il vertice C con B.

Si piega il quadrato lungo la diagonale AC in modo da far coincidere i vertici B e D. Nelle notazioni dei testi di origami si usano simboli specifici per indicare l’orientamento delle pieghe (a valle, a monte …) di solito elencati in premessa. Qui può bastare la figura per rendere esplicito il tipo di piega richiesto (Figura 2).

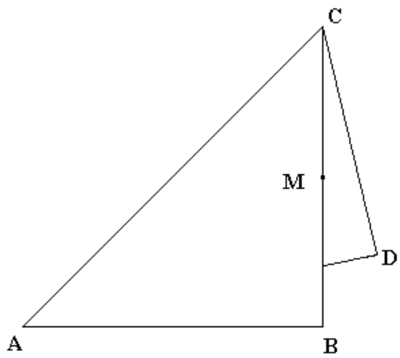


Figura 2

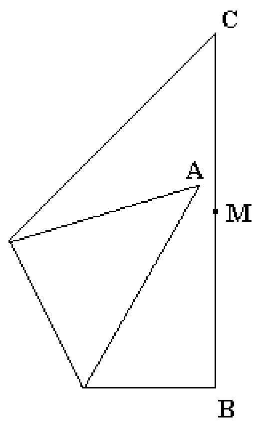


Figura 3

Portiamo ora il vertice A a coincidere con il punto M (Figura 3).

Pieghiamo il lato KM portando il vertice C verso il retro (Figura 4) e, successivamente, l’angolo HKM sul davanti in modo da sovrapporre la nuova piega con KC (Figura 5).

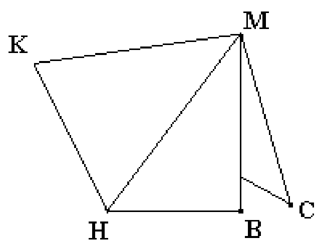


Figura 4

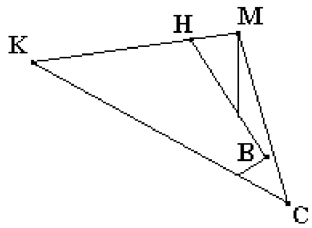


Figura 5

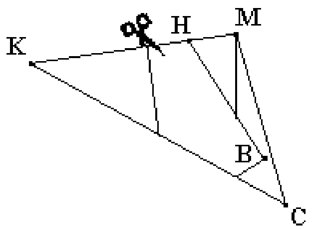


Figura 6

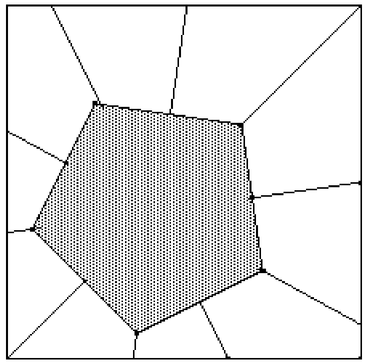


Figura 7

Dopo aver marcato una piegatura perpendicolare al lato KM (per far questo basta far coincidere nel piegare il triangolo KCM il lato KM con se stesso), la si ritagli come in Figura 6. Riaprendo il quadrato compare il pentagono in negativo (Figura 7); naturalmente il pentagono positivo è lo sviluppo del triangolo ritagliato.
Ma si tratta proprio di un pentagono regolare? La figura ottenuta lo sembra proprio, se si è fatta la costruzione con buona cura e usando un foglio di carta non troppo spesso.

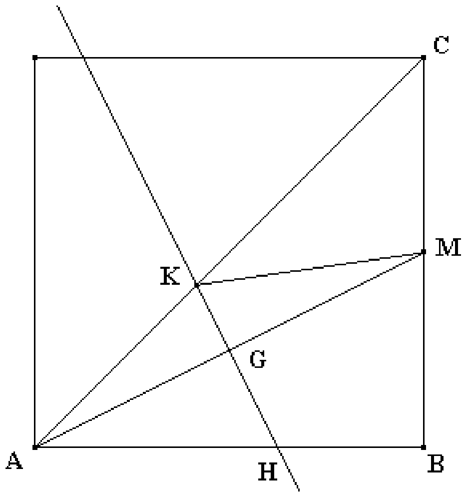
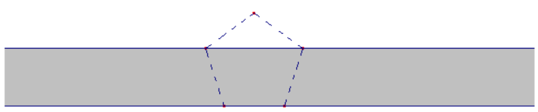
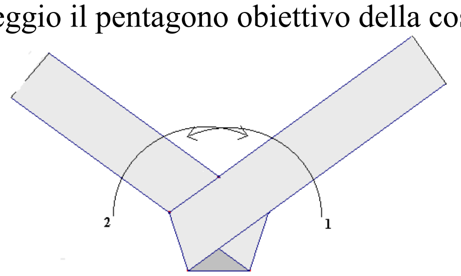


Figura 8

La costruzione non è esatta, anche se produce un "buon" pentagono la cui regolarità dipende piuttosto dalla cura con cui lo si costruisce.
Osserviamo la figura: M è punto medio di BC e la retta HK è asse del segmento AM (per costruzione). Gli angoli (uguali) AKG e GKM sono angoli al cento del pentagono e quindi dovrebbero misurare 72°.
Nel triangolo ABM, la tangente dell'angolo BAM è ½ e quindi l'angolo misura 26,5651°.
Per differenza, l'angolo GAC misura (45-26,5651)°=18,4346° e quindi AKG, suo complementare, è di 71,5651° con un errore inferiore al mezzo grado.

La dimostrazione del fatto che la costruzione non è esatta fa uso della trigonometria, dato che si calcola l'angolo con l'arcotangente, e quindi non è proponibile a questo livello scolastico, ma potrà essere ripresa come simpatica applicazione nel secondo biennio. Per ora ci si può accontentare di una verifica operativa. Dopo aver ritagliato il pentagono si può verificare subito se è "sufficientemente" regolare: si aprono il quadrato e il pentagono e si cerca di riposizionare la parte ritagliata nel foro. Si osserverà che le due figure combaciano solo in una posizione, mentre ci sarà una differenza anche marcata quando si ruota il pentagono.
Ecco ora una costruzione "teoricamente" esatta, ma che nella pratica può dare risultati meno apprezzabili della precedente: il pentagono dal nastro (striscia di carta a bordi paralleli).
Per ottenere il pentagono si annoda una striscia di carta come è descritto (in tre passi) dalle figure seguenti (nella prima è indicato con un tratteggio il pentagono obiettivo della costruzione).





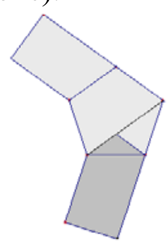


Figure 9 – 10 - 11

Seconda fase

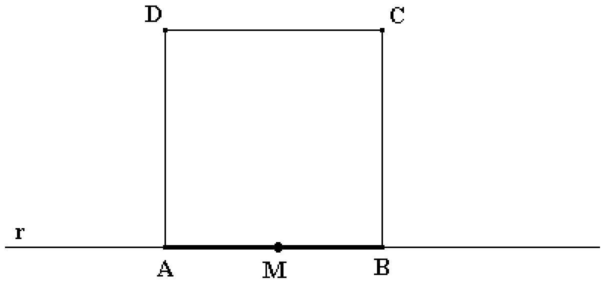


Figura 12

È dato il segmento AB; si costruiscono la retta r, il quadrato ABCD e M punto medio del segmento AM.

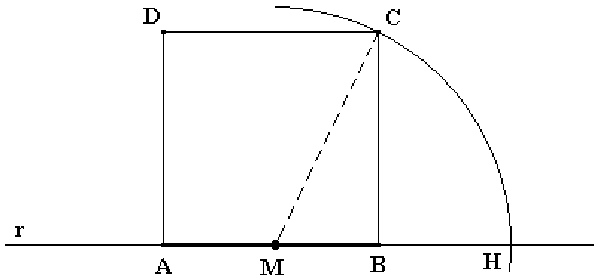


Figura 13

Puntando il compasso in M, con apertura MC, si porta la circonferenza ad intersecare la retta r in H.

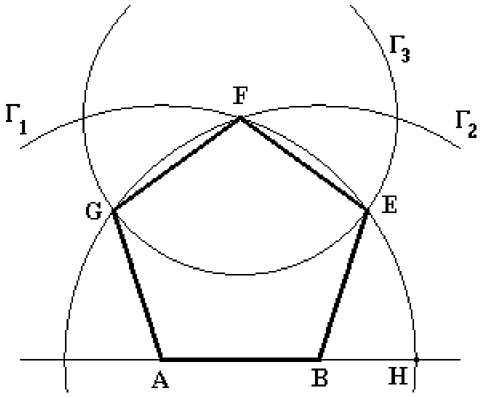


Figura 14

Con il compasso di apertura AH, si tracciano le circonferenze Γ_1 e Γ_2. Sia F il punto di intersezione delle due circonferenze.
Puntando in F, con apertura del compasso AB, si traccia la circonferenza Γ_3 che interseca le due precedenti nei punti E e G.
I punti A, B, E, F, G sono vertici di un pentagono regolare.

Anche in questo caso ci si ferma a livello operativo, lasciando la dimostrazione come esercizio da proporre nel secondo biennio quando saranno disponibili le equazioni di secondo grado.
Senza giungere a formalizzare la dimostrazione della costruzione, si può far osservare agli allievi il fatto che AB è "parte aurea" del segmento AH. Infatti, considerando la seconda figura di questa costruzione, possiamo esprimere le relazioni:

$$\overline{AH} = \overline{AM} + \overline{MH}, \quad \overline{BH} = \overline{AH} - \overline{AB}$$

$$\overline{MC}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BC}^2$$

Posto $\overline{AM} = x$, possiamo verificare che vale la relazione del "rapporto aureo" per AB su AH.

$$(x + x\sqrt{5}) : 2x = 2x : (x\sqrt{5} - x)$$

Da questo segue, per la costruzione fatta nella figura 14, che le diagonali del pentagono ABEFG, e cioè AE, AF, BF e BG sono uguali tra loro e hanno come "parte aurea" il lato AB.

Fase 3. Il pentagono con un software geometrico
La costruzione proposta parte da due punti: il centro della circonferenza circoscritta al pentagono e un vertice del pentagono.

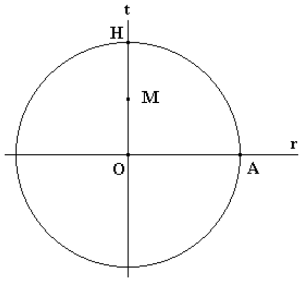


Figura 15

O è il centro della circonferenza circoscritta al pentagono, A un suo vertice.
Si traccia la circonferenza di centro O e raggio OA.
Si disegna la retta r passante per OA.
Per O si porta la perpendicolare t ad r. La retta t interseca la circonferenza in H.
Si disegna il punto M, medio del segmento OH.

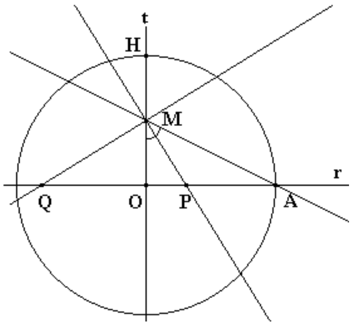


Figura 16

Si disegnano le bisettrici, interna ed esterna, dell'angolo OMA. Le due bisettrici intersecano la retta r nei punti P e Q.

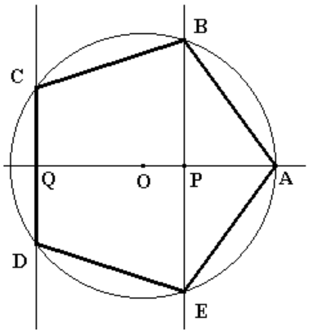


Figura 17

Per i punti P e Q si portano le perpendicolari alla retta r; queste intersecano la circonferenza nei punti B, C, D ed E. I punti A, B, C, D ed E sono vertici di un pentagono regolare.
La costruzione ora descritta può essere definita come procedura che, a partire da due punti dati, produce l'intera sequenza dei vertici. La procedura "pentagono" può essere usata per una prima conferma che il pentagono ottenuto è regolare: basta riapplicarla ai punti O e B e osservare che vengono nuovamente riottenuti gli stessi vertici.

Che cosa offre in più il software geometrico che non si può ottenere con le costruzioni manuali o con la riga e il compasso? L'esempio seguente mostra un'attività che non sarebbe possibile senza uno strumento che disegni "di colpo" un pentagono, dati centro e vertice.

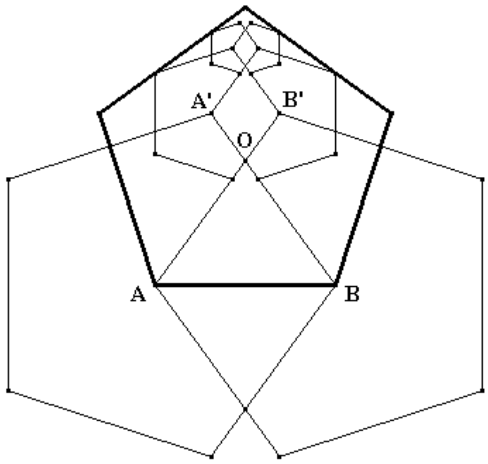


Figura 18

Si parte da due punti A e B. Si costruiscono i pentagoni "contrapposti" di centro A e vertice B e, viceversa, di centro B e vertice A. Nei due pentagoni costruiti si individuano i vertici A' e B' con i quali si ripete la costruzione. Il processo può essere ripetuto più volte: si ottengono due belle successioni di pentagoni che "convergono".
Ma, *sorpresa*, se prendiamo il punto O intersezione dei lati AB' e BA' e disegniamo il pentagono di centro O e vertice B, il pentagono ha lato AB e, soprattutto, *inscatola* le due sequenze di pentagoni.
Per questo livello scolare è sufficiente osservare e congetturare, ma la figura può essere un esercizio interessante sulle omotetie nel secondo biennio.

Possibili sviluppi

- Altri confronti tra costruzioni con piegatura della carta, con riga e compasso e con software di geometria.
- Cenni di dimostrazione di correttezza delle più semplici costruzioni proposte.
- Riflessioni sul ruolo della riga e del compasso come strumenti teorici nella geometria euclidea.

Elementi di prove di verifica

1. Poligoni con numero di lati pari a potenze di due
Dato un foglio di carta qualsiasi, piegare il foglio una volta, piegare di nuovo il foglio facendo coincidere la piega. Riaprire il foglio: come sono le due pieghe? Come mai?
Richiudere il foglio secondo le piegature; tagliare il foglio piegato in modo da ottenere un triangolo rettangolo, riaprire. Che figura geometrica si ottiene? Se a foglio ripiegato si taglia il triangolo rettangolo in modo che sia isoscele, quale figura si otterrà una volta aperto?
Con un foglio piegato come sopra, si piega nuovamente in modo che i due lati coincidano (angolo al vertice di 45°). Ritagliare perpendicolarmente ad uno dei due lati (in due modi) e in maniera da avere un triangolo isoscele. Quali figure si ottengono nei tre casi?
Come si può ottenere con la piegatura della carta un poligono di 16 lati? E di 32?

2. Quadrati e triangoli con riga e compasso
Costruire un quadrato con riga e compasso. Sempre con riga e compasso costruire un triangolo equilatero con lo stesso lato all'interno del quadrato. Sul lato adiacente del quadrato, costruire all'esterno del quadrato il triangolo equilatero di stesso lato. Tracciare la retta che passa per i vertici costruiti dei due triangoli equilateri: che cosa si osserva?

3. Il foglio punteggiato con un software geometrico
Dati due punti presi come estremi del lato di un quadrato, definire la procedura che costruisce gli altri due vertici.
Con questa procedura si costruiscano punti del piano a partire sempre da punti costruiti in precedenza. Come sono i punti ottenuti?