La trigonometria e il mondo reale

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Analizzare in forma problematica la risolubilità dei triangoli rettangoli e risolverli. Utilizzare la trigonometria in semplici problemi nell'ambito di altri settori disciplinari.	Seno, coseno e tangente di un angolo. Coordinate polari. Relazioni trigonometriche nel triangolo rettangolo.	Spazio e figure. Risolvere e porsi problemi.	Astronomia, Fisica, Topografia, Geografia della terra.

Contesto
Trigonometria e applicazioni.

Questa attività può essere proposta nel secondo biennio, quando gli studenti conoscono gli elementi fondamentali di geometria piana in particolare le similitudini. Il contesto è quello della trigonometria e delle sue applicazioni.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in quattro fasi e prevede l'introduzione di seno, coseno e tangente di un angolo acuto, la loro applicazione alla risoluzione dei triangoli rettangoli e alla risoluzione di semplici problemi legati al mondo reale.

Prima fase
L'insegnante presenta agli studenti le finalità dell'attività evidenziando che si introdurranno alcune nozioni utili a risolvere problemi di misura di grandezze.
Analizzando la Figura 1 l'insegnante fa notare che, dato un angolo acuto AOB (indicato con α), preso sul lato OB un punto P, considerata la proiezione Q di P su OA, i tre rapporti tra i segmenti PQ e OP, OQ e OP, e PQ e OQ rimangono costanti al variare di P.

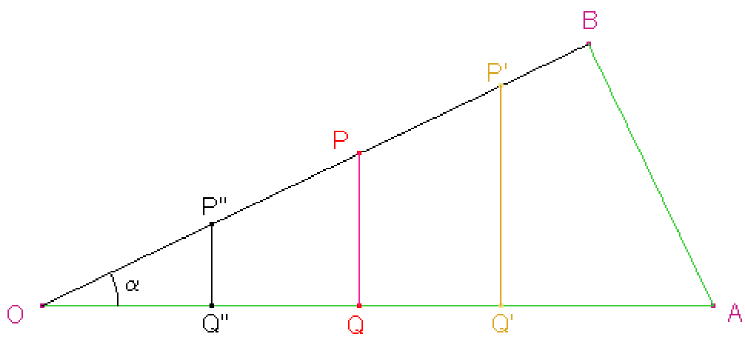

Figura 1

I valori di tali rapporti variano solo al variare dell'angolo α e sono univocamente determinati per ogni sua ampiezza. Si può dunque dire che variano in funzione dell'angolo ovvero che sono funzioni dell'angolo α, indicati rispettivamente con $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$.

L'insegnante può anche proporre agli studenti di esplorare la situazione attraverso misure effettuate su carta millimetrata con righello e goniometro o usando un software di geometria.
Questa prima fase porta all'introduzione delle nozioni di seno, coseno e tangente di un angolo acuto e consente di iniziare a proporre semplici esercizi di risoluzione di triangoli rettangoli.
La familiarità con i valori delle funzioni seno, coseno e tangente può essere ottenuta anche considerando triangoli rettangoli particolari, come quelli ottenuti dividendo a metà un triangolo equilatero o un quadrato. In questi casi, infatti, gli studenti devono solo applicare le loro conoscenze per ricavare i rapporti che caratterizzano le diverse situazioni.

<u>Seconda fase</u>
L'insegnante mette in evidenza la relazione tra seno, coseno, tangente e il valore associato dell'angolo e invita a riflettere sulle difficoltà che si presentano nel calcolare, in generale, tali valori, chiedendo, per esempio, "qual è il seno dell'angolo di ampiezza 7 gradi ?".
Tutto ciò può anche essere utilizzato come spunto motivante per un approfondimento storico sull'evoluzione degli strumenti di calcolo: dalle tavole alle calcolatrici, al software di geometria. Gli studenti, a questo punto, possono elaborare una tabella attraverso cui esaminare come, al variare dell'angolo, varino seno, coseno e tangente.
È utile sottoporre alla riflessione degli studenti i problemi che si presentano quando si deve calcolare il valore di tali funzioni cercando di operare opportune approssimazioni con l'uso di strumenti di calcolo.

<u>Terza fase</u>
L'insegnante, dopo aver suddiviso la classe in piccoli gruppi, propone i seguenti problemi. I problemi riportati sono presentati per argomento: i primi due propongono delle attività di scoperta di proprietà di figure, gli altri trattano questioni legate al mondo reale.

1. Teorema della corda.

   La lunghezza L di una corda AB di una circonferenza è sempre data da $L = 2r \operatorname{sen}\alpha$, in cui r è il raggio della circonferenza, α è l'ampiezza di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono sulla corda AB e che sono inscritti nell'arco maggiore tra quelli individuati da AB (Figura 2).

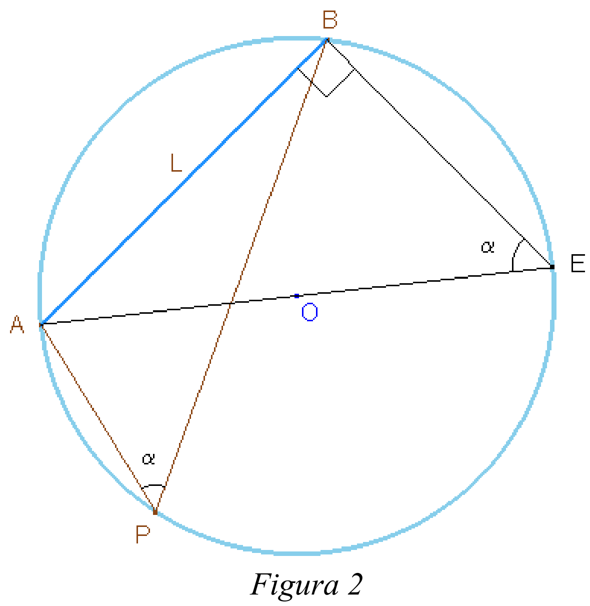

Figura 2

   L'estensione di questo teorema anche agli angoli inscritti nell'arco minore verrà fatta dopo aver generalizzato le funzioni goniometriche ad un angolo qualunque.

2. L'area di un triangolo ABC di cui sono noti due lati, AC e AB, e l'angolo compreso α, si può ottenere come semiprodotto fra i due lati e il seno dell'angolo compreso. Individuare una strategia per giungere a questa relazione (Figura 3).
   L'insegnante guida gli studenti a osservare come l'altezza del triangolo ABC relativa al lato AB sia il cateto del triangolo rettangolo ACH che è opposto all'angolo α e a esprimere l'area cercata come

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \alpha .$$

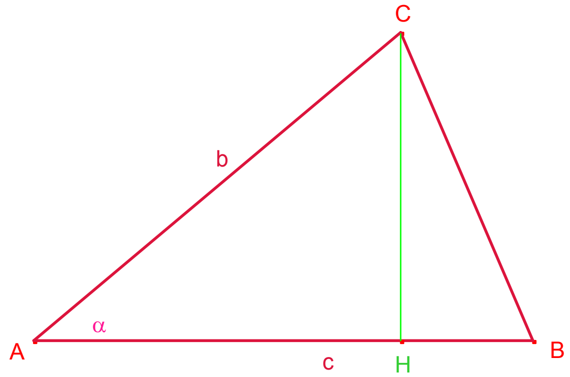

Figura 3

3. Una scala lunga 4 m è appoggiata a un muro in modo da toccarlo ad un'altezza di 3,6 m. Quale angolo forma la scala con il pavimento ? …e con il muro ?
4. Si vuole installare su una terrazza di Roma un pannello solare quadrato, con il lato lungo 3 m. I costruttori raccomandano di installare il pannello in modo che formi con il piano orizzontale un angolo di 10° inferiore a quello della latitudine del luogo (trovandosi Roma alla latitudine di 41°, il pannello dovrà essere inclinato di 31°). A che altezza dal pavimento della terrazza arriverà la sommità del pannello ?
5. Quando una strada sale di 20 m, su una distanza orizzontale di 100 m, si dice che la pendenza è del 20%. Quanto vale l'angolo di inclinazione della strada (rispetto all'orizzontale)?
6. Aristarco di Samo nel III secolo a. C. affronta il seguente problema: "Quando la Luna si presenta come una perfetta mezzaluna, l'angolo fra le visuali del Sole e della Luna è inferiore ad un angolo retto per un trentesimo di quadrante (90°); quanto è più lontano dalla Terra il Sole rispetto alla Luna ?"
   Il problema si può schematizzare con un triangolo LAS, rettangolo in L, di cui si conosce l'angolo
   Â = 87° e si vuol ricavare il rapporto AS/AL?
   Risolvere i seguenti quesiti:
   a. calcolare il rapporto AS/AL con l'angolo Â = 87°;
   b. calcolare il rapporto AS/AL, con le attuali misure che forniscono Â = 89° 51';
   c. confrontare i risultati ottenuti.

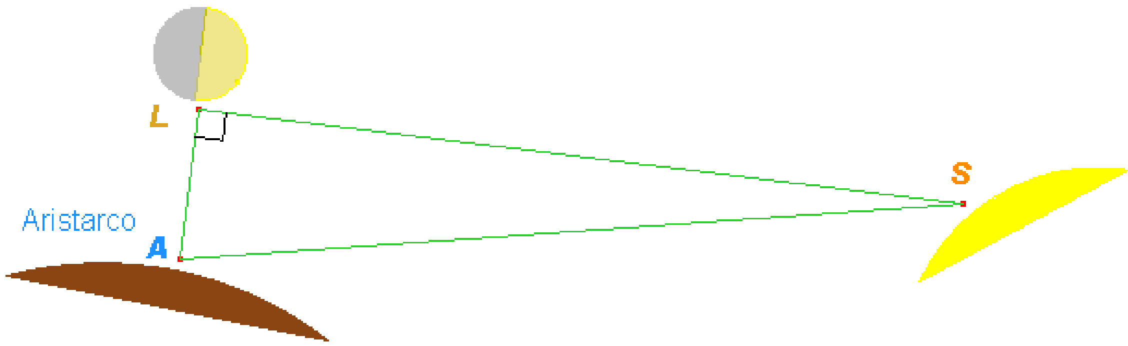

Figura 4

7. Dalla cima di una scogliera alta 50 m si vede una nave sotto un angolo di 20° rispetto all'orizzontale. Quanto dista la nave dalla scogliera?
8. Un ponte lungo 80 m attraversa un fiume formando un angolo di 50° con le sponde; qual è la larghezza del fiume?
9. Un faro è posto su un'isola. Elaborare una strategia per stimare la distanza del faro dalla spiaggia.
10. Quale strategia per la misura della profondità di un pozzo ?
11. Quale strategia per la misura dell'altezza della torre di Pisa ?

<u>Quarta fase</u>

Finora sono state analizzate situazioni relative ad angoli acuti, ma se l'angolo fosse ottuso? Per ampliare l'argomento e anche per introdurre le coordinate polari si può proporre agli studenti lo studio del radar, strumento indispensabile per la navigazione aerea e marittima, ma di cui spesso si ignora il funzionamento.
L'insegnante propone agli studenti la fotografia di un radar oppure lo mostra "funzionante" ricorrendo ai giochi di simulazione per il computer. Quando il radar è in funzione, una semiretta "spazza" lo schermo girando in senso antiorario; la presenza di un ostacolo che si trova nella direzione in cui punta la semiretta è segnalata dall'accendersi di un puntino luminoso.
Il problema da porsi è: come individuare la posizione dell'ostacolo?
Si può schematizzare la situazione nel seguente modo (Figura 5):

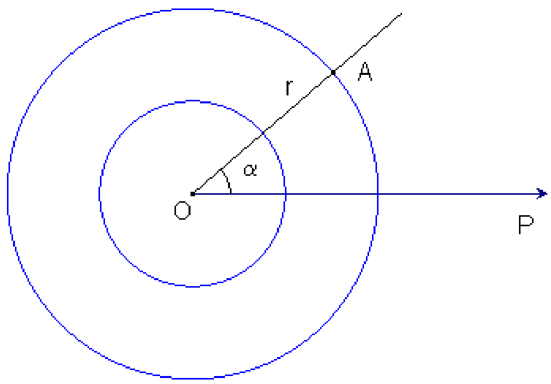

Figura 5

Sullo schermo si leggono direttamente due numeri: la distanza OA = r e l'angolo α che ha descritto la semiretta OA, a partire dalla posizione OP.

L'insegnante sottolinea perciò agli studenti che la posizione del punto A sullo schermo è quindi individuata da r e α, detti raggio e anomalia; precisa che il punto O è detto *polo* e la semiretta OP *asse polare*.
Dalla localizzazione del punto mediante tale coppia di numeri, legata al funzionamento del radar si può poi passare ad esprimere la posizione su una carta geografica, ricorrendo alle più consuete latitudine e longitudine: si traducono, dunque, le coordinate polari in coordinate cartesiane. L'asse polare viene fatto coincidere con il semiasse positivo delle *x* e gli studenti possono ora esprimere la posizione del punto considerato con le coordinate polari. Da questo o da altri esempi simili l'insegnante può prendere spunto per introdurre anche i valori di seno, coseno e tangente per angoli maggiori di 90°, senza limitarsi al I quadrante.
Dopo queste osservazioni il seno e il coseno di un angolo sono definiti per angoli compresi fra 0° e 360°, ovvero per un angolo qualunque.
A questo punto l'insegnante guida gli studenti al passaggio dalle coordinate polari alle coordinate cartesiane con l'introduzione della circonferenza goniometrica.

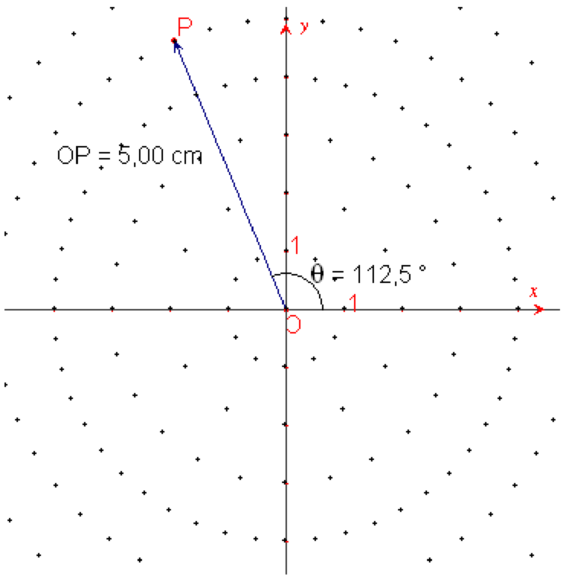

Figura 6

Possibili sviluppi
1. Misura del raggio terrestre (Eratostene).
2. Problematiche delle misurazioni a distanza: ieri e oggi.
3. Riflessione e rifrazione della luce.
4. Introduzione storica alla trigonometria.