L'algoritmo per la divisione dei polinomi

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	La divisione dei polinomi.	Numeri e algoritmi	

Contesto
Calcolo algebrico.

Questa attività può essere introdotta all'inizio del secondo biennio, quando gli alunni affrontano l'argomento della divisione dei polinomi.

Descrizione dell'attività
L'attività si propone di tradurre in un programma di calcolo l'algoritmo euclideo (delle sottrazioni successive) per la divisione dei polinomi. Tale algoritmo si basa sul seguente teorema:
"Dati due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, definiti su uno stesso campo numerico **F** (che solitamente è il campo **Q** dei numeri razionali o il campo **R** dei numeri reali), con $B(x) \neq 0$, esiste un'unica coppia di polinomi $Q(x)$ ed $R(x)$ (detti *quoziente* e *resto*, rispettivamente) tali che si abbia:

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \qquad (1)$$

dove $R(x)$ ha grado minore del grado di $B(x)$."

Osservazione. Quando il grado di $A(x)$ è maggiore o uguale al grado di $B(x)$ il grado del quoziente $Q(x)$ è uguale alla *differenza* dei gradi di $A(x)$ e $B(x)$. Se il grado di $A(x)$ è minore del grado di $B(x)$, allora, banalmente, risulta $Q(x) = 0$ e $R(x) = A(x)$.

Si illustra innanzi tutto l'algoritmo con un esempio concreto che può essere il seguente. Si vuole eseguire la divisione con resto del polinomio:

$$A(x) = x^3 + 2x + 3$$

per il polinomio:

$$B(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Si esegue la divisione tra il termine di grado massimo di $A(x)$ e il termine di grado massimo di $B(x)$, chiamando $Q_1(x)$ il quoziente. Risulta:

$$Q_1(x) = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{1}{2}x .$$

Si calcola ora il primo resto parziale: si moltiplica $B(x)$ per $Q_1(x)$ e si sottrae il prodotto da $A(x)$; il polinomio ottenuto è il primo resto parziale $R_1(x)$. Nel caso in esame si ottiene:

$$A(x) - B(x) \cdot \frac{1}{2}x = x^3 + 2x + 3 - (2x^2 - 3x + 1) \cdot \frac{1}{2}x = x^3 + 2x + 3 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = R_1(x)$$

$R_1(x)$ non può essere il resto della divisione in quanto il suo grado *non* è minore del grado del polinomio divisore $B(x)$. Si possono, allora, ripetere, con le opportune modifiche, i passaggi precedenti. Si calcola il secondo quoziente parziale $Q_2(x)$, dividendo i termini di grado massimo di $R_1(x)$ e $B(x)$. Si ottiene:

$$Q_2(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2}{2x^2} = \frac{3}{4}.$$

Si determina poi il secondo resto parziale moltiplicando $B(x)$ per $Q_2(x)$ e sottraendo tale prodotto da $R_1(x)$. Si ottiene:

$$R_1(x) - B(x)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 - (2x^2 - 3x + 1)\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} = R_2(x)$$

Ora il procedimento ha termine perché il grado di $R_2(x)$ è inferiore al grado di $B(x)$. Sommando membro a membro le due relazioni si ha:

$$A(x) - B(x)\cdot\frac{1}{2}x = R_1(x)$$

$$R_1(x) - B(x)\cdot\frac{3}{4} = R_2(x)$$

e semplificando, si ottiene:

$$A(x) - B(x)\cdot\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right) = R_2(x) = \frac{15}{4}x + \frac{9}{4}.$$

È, pertanto, naturale assumere il polinomio $\frac{15}{4}x + \frac{9}{4}$ come *resto* $R(x)$ e il polinomio $\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$, somma dei quozienti parziali $Q_1(x)$ e $Q_2(x)$, come *quoziente* $Q(x)$ della divisione di $A(x)$ per $B(x)$.

Di solito a questi calcoli si dà un assetto che ne facilita l'esecuzione. L'esempio che è stato appena svolto può essere, infatti, così esposto:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +\ 0\cdot x^2 & +\ 2x & +\ 3 & 2x^2 - 3x + 1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\ \frac{3}{2}x^2 & -\ \frac{1}{2}x & & \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \\ \cline{1-4}
 & \frac{3}{2}x^2 & +\ \frac{3}{2}x & +\ 3 & \\
 & -\frac{3}{2}x^2 & +\ \frac{9}{4}x & -\ \frac{3}{4} & \\ \cline{1-4}
 & & \frac{15}{4}x & +\ \frac{9}{4} &
\end{array}$$

Alcuni programmi di calcolo simbolico, come DERIVE e MAPLE, possiedono delle funzioni che forniscono immediatamente il quoziente e il resto della divisione tra polinomi. In particolare, nel caso di DERIVE, sono presenti le funzioni QUOTIENT e REMAINDER che, applicate all'esempio precedente, forniscono il seguente risultato

```
#1:   QUOTIENT(x^3 + 2·x + 3, 2·x^2 - 3·x + 1)
```

$$\#2: \quad \frac{x}{2} + \frac{3}{4}$$

```
#3:   REMAINDER(x^3 + 2·x + 3, 2·x^2 - 3·x + 1)
```

$$\#4: \quad \frac{15\cdot x}{4} + \frac{9}{4}$$

Risulta, comunque, interessante utilizzare tale programma (che resta uno dei più utilizzati a livello didattico) per simulare il procedimento che si esegue manualmente. Definendo opportune funzioni e utilizzandole nei passaggi, diventa più facile capire l'algoritmo della divisione. Ripetendo con DERIVE il precedente esempio, si ottiene come primo resto:

#1: $A(x) := x^3 + 2\cdot x + 3$

#2: $B(x) := 2\cdot x^2 - 3\cdot x + 1$

#3: $Q1(x) := \dfrac{x^3}{2\cdot x^2}$

#4: $\dfrac{x}{2}$

#5: $B(x)\cdot Q1(x)$

#6: $x^3 - \dfrac{3\cdot x^2}{2} + \dfrac{x}{2}$

#7: $R1(x) := A(x) - B(x)\cdot Q1(x)$

#8: $\dfrac{3\cdot x^2}{2} + \dfrac{3\cdot x}{2} + 3$

e, iterando il procedimento, si ottiene, come previsto:

#9: $Q2(x) := \dfrac{\frac{3}{2}\cdot x^2}{2\cdot x^2}$

#10: $\dfrac{3}{4}$

#11: $B(x)\cdot Q2(x)$

#12: $\dfrac{3\cdot x^2}{2} - \dfrac{9\cdot x}{4} + \dfrac{3}{4}$

#13: $R2(x) := R1(x) - B(x)\cdot Q2(x)$

#14: $\dfrac{15\cdot x}{4} + \dfrac{9}{4}$

#15: $Q(x) := Q1(x) + Q2(x)$

#16: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4}$

Si vuole ora vedere come tradurre in un programma per una calcolatrice grafico-simbolica l'algoritmo precedentemente illustrato. Si comincia con l'osservare che un polinomio di grado n:

$$a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

è univocamente determinato dalla sequenza ordinata dei suoi $n + 1$ coefficienti. L'algoritmo per la divisione dei polinomi opera appunto su tali sequenze, che in gergo informatico sono dette *liste*. Occorre dunque munirsi innanzi tutto di una funzione che prenda in ingresso un dato polinomio e fornisca in uscita la relativa lista dei coefficienti: la funzione *pcoef* provvede a tale compito. Le figure seguenti mostrano come costruire tale funzione utilizzando una calcolatrice grafico-simbolica, predisposta a lavorare in modalità esatta, onde evitare che la funzione entri in un ciclo infinito. Come si può notare, è trattato a parte il caso in cui sia introdotto il polinomio nullo, per evitare un funzionamento scorretto della funzione.

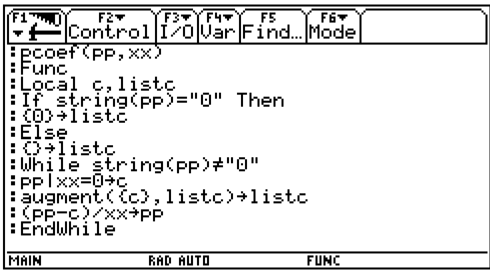

Figura 1

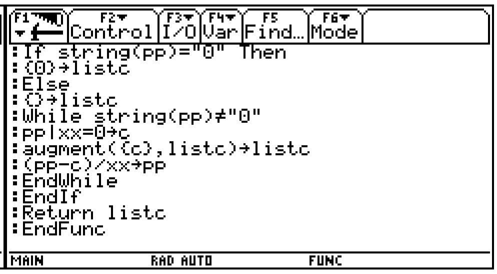

Figura 2

Dall'esame delle due figure si può osservare che i diversi coefficienti sono determinati uno alla volta partendo dal termine noto (che abbiamo precedentemente indicato con a_0). Infatti si comincia a porre uguale a zero il valore della variabile (che possiamo, per semplicità, indicare con x) e si determina in tal modo a_0. Poi si sottrae a_0 e si divide per x, ottenendo in tal modo un polinomio di grado $n-1$. Nel polinomio così ottenuto si pone $x = 0$ e si determina a_1. Si procede, quindi, allo stesso modo fino ad aver determinato tutti i coefficienti.
Muniti della funzione *pcoef*, si può tradurre l'algoritmo cercato nella funzione *quores* che prende in ingresso i due polinomi *dividendo* e *divisore* e fornisce in uscita i due polinomi *quoziente* e *resto*. Il programma che realizza tale funzione è riportato nelle figure seguenti:

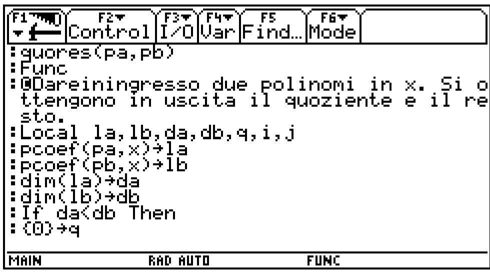

Figura 3

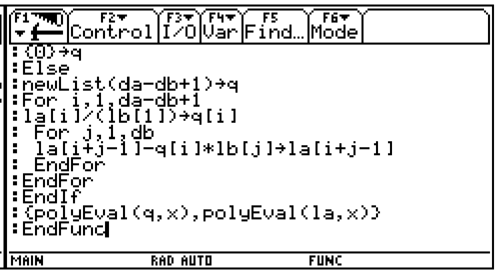

Figura 4

Come si può osservare i due cicli *For* innestati determinano sostanzialmente a ogni iterazione i quozienti e i resti parziali visti nel precedente esempio. Inoltre tale programma utilizza il comando *polyEval*, che interpreta gli n elementi di una lista come i coefficienti di un polinomio di grado $n-1$. Nel caso dei polinomi precedentemente utilizzati si ottiene il seguente risultato:

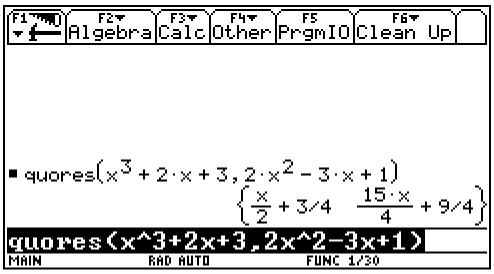

Figura 5

che, ovviamente, coincide con quanto ottenuto precedentemente.
Gli strumenti di calcolo simbolico producono il quoziente e il resto della divisione dei polinomi attraverso lo "sviluppo" della frazione polinomiale come somma di fratti semplici.