Un gioco con tre dadi

Livello scolare: 1° biennio

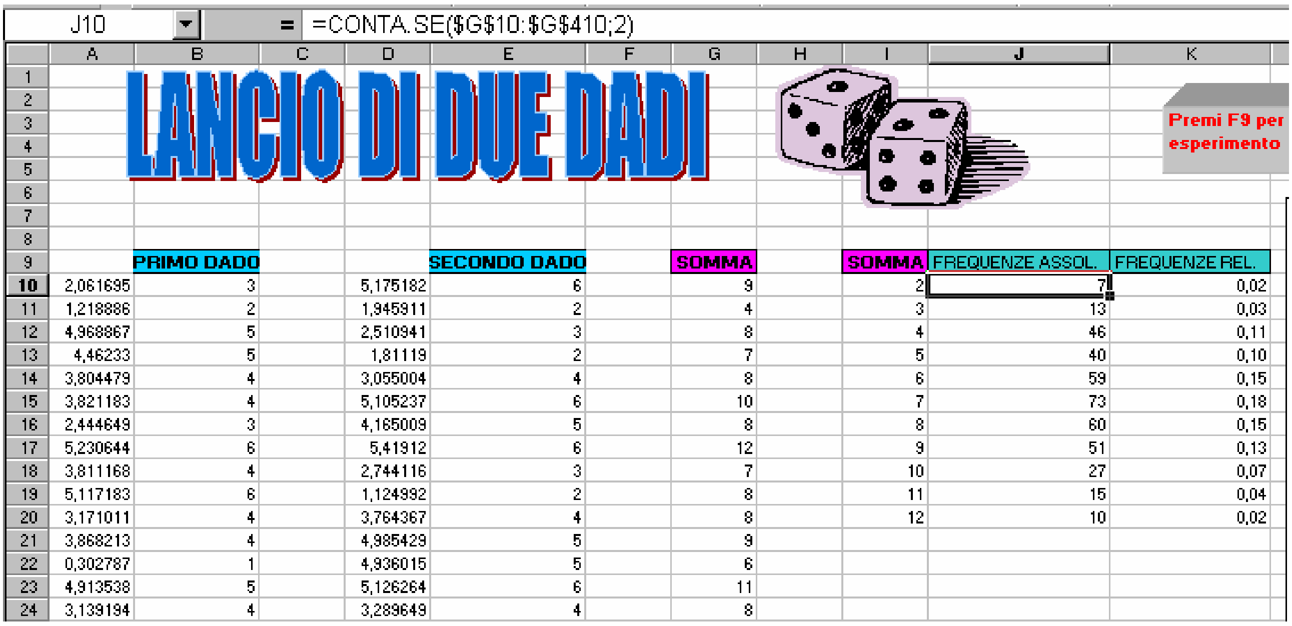
Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Costruire lo spazio degli eventi in casi semplici e determinarne la cardinalità. Valutare la probabilità in diversi contesti problematici. Distinguere tra eventi indipendenti e non.	Eventi e operazioni con gli eventi. Significato della probabilità e sue valutazioni.	<u>Dati e previsioni</u> Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Giochi

Contesto
Giochi, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico, in particolare riguarda l'ambito probabilistico; ha anche aspetti collegati al contesto dei giochi.
Questa attività può essere introdotta anche al primo anno di biennio dopo aver trattato le distribuzioni di frequenze e aver introdotto le definizioni di probabilità. Non occorrono né i teoremi sulle probabilità né altri concetti. L'attività ha lo scopo di indurre ad una individuazione corretta dello spazio degli eventi, in modo che gli studenti sappiano distinguere tra evento (uscita di un certo risultato nei dadi) ed evento elementare. L'obiettivo è condurre gli studenti alla scoperta che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità e che la probabilità dipende dal modo in cui l'esperimento è definito.
Per la simulazione al computer sono necessari alcuni prerequisiti di conoscenza del foglio elettronico: come si inseriscono i dati, come si inserisce una formula, come si copia una formula, riferimenti relativi e assoluti alle celle, come si crea un grafico. Le funzioni "Casuale( )" e "Conta.Se( )" possono essere introdotte anche in questo contesto.

Descrizione dell'attività
L'insegnante propone il seguente problema: lancia tre dadi e, ad ogni lancio, elimina il dado col punteggio maggiore annotando la somma dei due dadi rimasti (se quelli col punteggio maggiore sono due, eliminarne uno qualsiasi).
Per una migliore comprensione del problema l'insegnante suggerisce una lettura attenta del testo e chiede agli studenti di esemplificare qualche situazione che si può verificare. Pone alla fine la domanda:
I risultati sono gli stessi che nel lancio di due dadi?

<u>Prima fase</u>
Il problema si può affrontare dopo aver trattato preliminarmente il lancio di due dadi.
L'insegnante guida gli studenti a costruire il grafico di frequenze per il lancio di due dadi dopo aver effettuato l'esperimento manualmente o tramite la simulazione al computer ed aver calcolato la somma dei punteggi ottenuti.
Il foglio elettronico, riportato in Figura 1, è stato costruito riportando nella colonna B le uscite del primo dado e nella colonna E le uscite del secondo dado (ottenuti tramite la funzione casuale); nella colonna G si è effettuata la somma. Per poter calcolare le frequenze assolute e relative (colonne J e K) si è usata la funzione "Conta.Se( )".



J10 =CONTA.SE($G$10:$G$410;2)

LANCIO DI DUE DADI

Premi F9 per esperimento

	A	PRIMO DADO	D	SECONDO DADO	SOMMA	SOMMA	FREQUENZE ASSOL.	FREQUENZE REL.
10	2,061695	3	5,175182	6	9	2	7	0,02
11	1,218886	2	1,945911	2	4	3	13	0,03
12	4,968867	5	2,510941	3	8	4	46	0,11
13	4,46233	5	1,81119	2	7	5	40	0,10
14	3,804479	4	3,055004	4	8	6	59	0,15
15	3,821183	4	5,105237	6	10	7	73	0,18
16	2,444649	3	4,165009	5	8	8	60	0,15
17	5,230644	6	5,41912	6	12	9	51	0,13
18	3,811168	4	2,744116	3	7	10	27	0,07
19	5,117183	6	1,124992	2	8	11	15	0,04
20	3,171011	4	3,764367	4	8	12	10	0,02
21	3,868213	4	4,985429	5	9			
22	0,302787	1	4,936015	5	6			
23	4,913538	5	5,126264	6	11			
24	3,139194	4	3,289649	4	8			

Figura 1

Nel caso si sia effettuata la simulazione al computer l'insegnante invita ad osservare le colonne in cui sono riportati i risultati relativi al primo ed al secondo dado e chiede se i dadi sono truccati. Come sono tra loro i punteggi dei due dadi? Come avvengono i lanci?

Dall'esame del grafico in Figura 2 gli studenti possono dedurre che i casi centrali sono i più frequenti. Da cosa dipende?

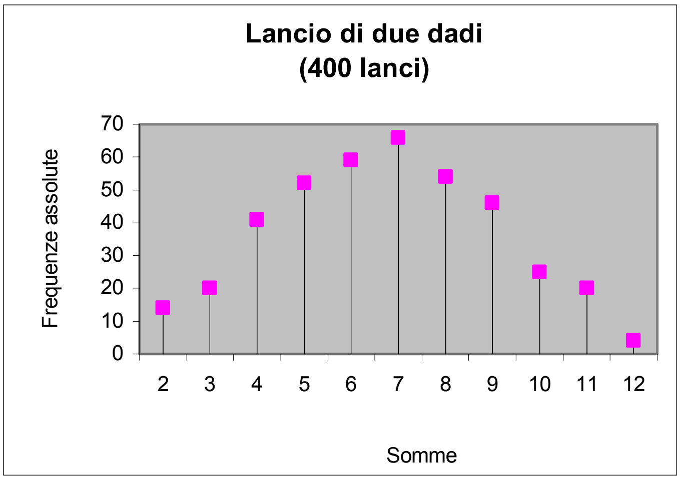


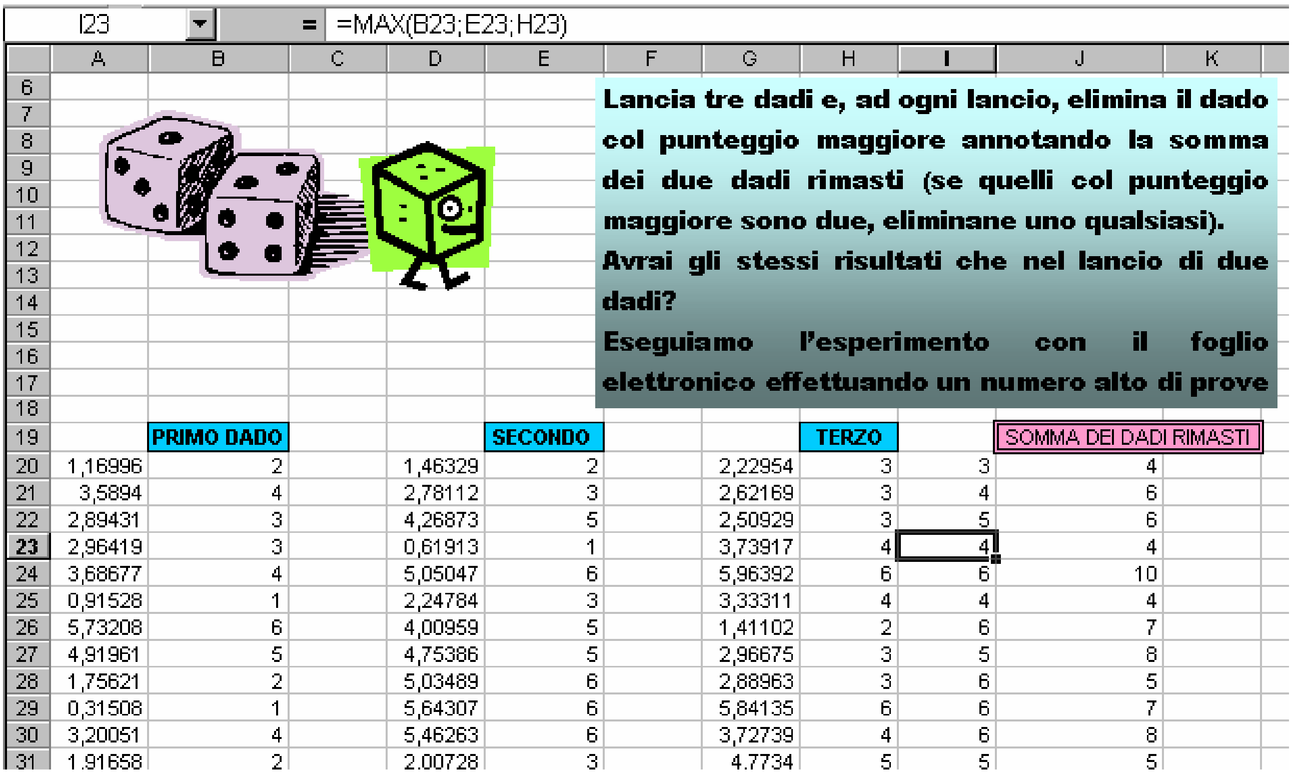
Figura 2

Si invitano gli studenti a valutare le probabilità dei diversi eventi possibili.
I casi possibili nel lancio di due dadi sono tutte le coppie che si possono ottenere associando una faccia del primo dado con una qualunque del secondo dado $6 \cdot 6 = 36$.
Non tutti i risultati, però, hanno la stessa probabilità: infatti, ad esempio, il numero 6 si può ottenere in più modi che non il numero 3.
Gli studenti saranno guidati a compilare la seguente tabella.

EVENTO	**Modalità di presentazione**	**Numero casi possibili**	**Probabilità**
uscita del 2	1+1	1	1/36
uscita del 3	1+2 2+1	2	2/36
uscita del 4	1+3 2+2 3+1	3	3/36
uscita del 5	1+4 2+3 3+2 4+1	4	4/36
uscita del 6	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	5	5/36
uscita del 7	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	6	6/36
uscita del 8	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	5	5/36
uscita del 9	3+6 4+5 5+4 6+3	4	4/36
uscita del 10	4+6 5+5 6+4	3	3/36
uscita del 11	5+6 6+5	2	2/36
uscita del 12	6+6	1	1/36
Totale		36	1

Si pongono agli studenti le seguenti domande: perché il grafico sperimentale non risulta perfettamente simmetrico come ci si aspetterebbe dalla valutazione di probabilità? Il grafico avrebbe avuto un andamento più vicino alle previsioni se il numero di lanci fosse stato maggiore?
Si può invitare gli studenti a ripetere la simulazione con un numero maggiore di lanci.
Il foglio elettronico permette agevolmente sia di ripetere più volte l'esperimento con lo stesso numero di lanci (basta premere un tasto per vedere simultaneamente come si modifica il grafico) sia di variare il numero di lanci.
L'insegnante guida gli studenti ad osservare che il grafico muta anche se il numero di lanci è identico. Perché? Quante sono le simulazioni di lanci che si possono fare, fissato il numero di lanci? Allora l'insieme di *n* lanci studiato ed osservato è forse un "campione casuale"?
Appare, inoltre, chiaro che all'aumentare del numero dei lanci la frequenza si avvicina alla valutazione teorica di probabilità.
Si può concludere che su un gran numero di prove ci si può attendere di avere frequenze di uscita sempre più vicine alla valutazione di probabilità?
E' un primo approccio alla legge dei grandi numeri.

<u>Seconda fase</u>
Nella fase successiva si propone il problema dei tre dadi .
Si invitano gli studenti ad eseguire l'esperimento lanciando i dadi ed effettuando un numero alto di prove. Si possono far lavorare gli studenti in gruppo e far loro costruire il grafico delle frequenze.
E' opportuno comunque far ripetere l'esperimento con una simulazione al computer.
Il foglio elettronico, riportato in Figura 3, è stato costruito riportando nella colonna B le uscite del primo dado, nella colonna E le uscite del secondo e nella colonna H le uscite del terzo (ottenute tramite la funzione casuale); per calcolare la somma dei dadi rimasti(colonna J), dopo aver scartato il punteggio maggiore, si è utilizzata, per ogni terna di valori, la funzione "Max( )", che restituisce il valore massimo.



I23 = =MAX(B23;E23;H23)

Lancia tre dadi e, ad ogni lancio, elimina il dado col punteggio maggiore annotando la somma dei due dadi rimasti (se quelli col punteggio maggiore sono due, eliminane uno qualsiasi).
Avrai gli stessi risultati che nel lancio di due dadi?
Eseguiamo l'esperimento con il foglio elettronico effettuando un numero alto di prove

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
19		PRIMO DADO			SECONDO			TERZO		SOMMA DEI DADI RIMASTI	
20	1,16996	2		1,46329	2		2,22954	3	3	4	
21	3,5894	4		2,78112	3		2,62169	3	4	6	
22	2,89431	3		4,26873	5		2,50929	3	5	6	
23	2,96419	3		0,61913	1		3,73917	4	4	4	
24	3,68677	4		5,05047	6		5,96392	6	6	10	
25	0,91528	1		2,24784	3		3,33311	4	4	4	
26	5,73208	6		4,00959	5		1,41102	2	6	7	
27	4,91961	5		4,75386	5		2,96675	3	5	8	
28	1,75621	2		5,03489	6		2,88963	3	6	5	
29	0,31508	1		5,64307	6		5,84135	6	6	7	
30	3,20051	4		5,46263	6		3,72739	4	6	8	
31	1,91658	2		2,00728	3		4,7734	5	5	5	

Figura 3

Dall'esame del grafico di Figura 4 gli allievi possono notare il diverso andamento ottenuto in questo esperimento rispetto a quello relativo al lancio di due dadi.

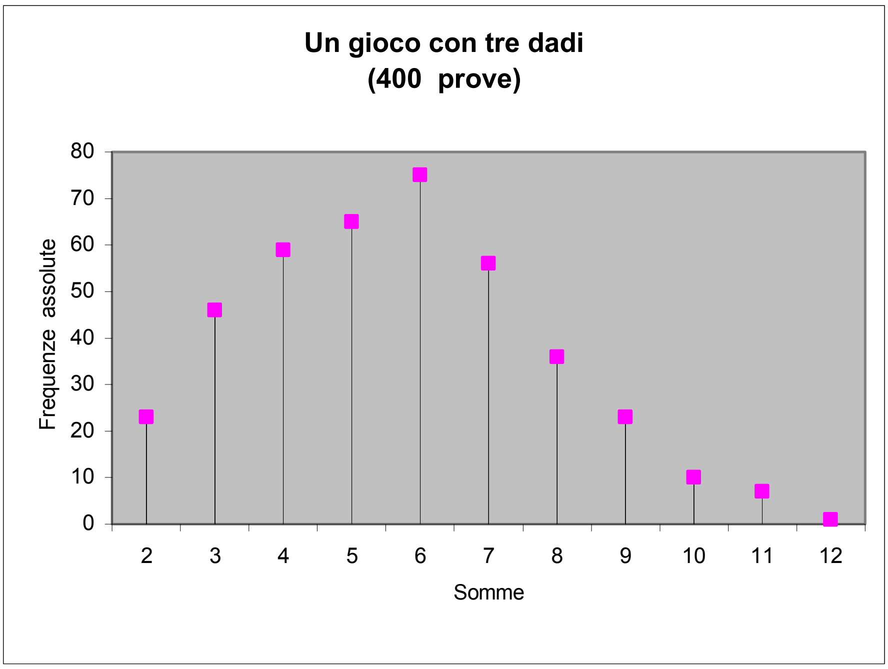
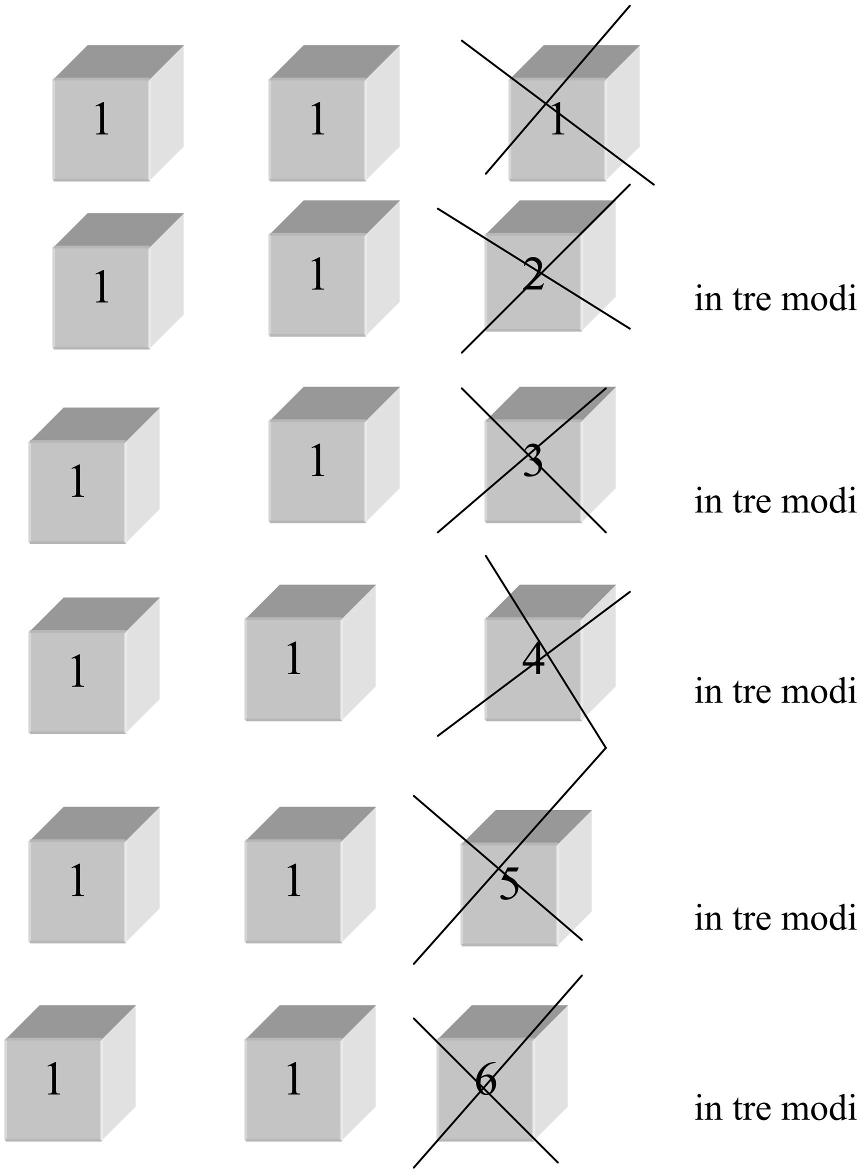
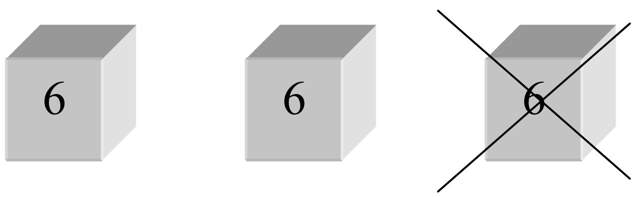


Figura 4

Si faranno riflettere gli allievi sul fatto che, anche se gli eventi sono sempre l'uscita dei numeri da 2 a 12, il fatto di aver eliminato l'esito del terzo dado, quello col punteggio maggiore, non può essere ignorato. Si invitano, poi, gli allievi a calcolare i diversi casi possibili per ogni evento.
Per esempio l'evento E_1 : "uscita del 2" e l'evento E_2 "uscita del 12" non hanno in questo caso la stessa probabilità .
Infatti, l' evento E_1 si realizza in 16 modi:



mentre l'evento E_2 si realizza in un sol modo:



In questo problema i casi possibili sono $6^3 = 216$.

A questo punto si invitano gli studenti a calcolare la probabilità dei diversi eventi, dividendoli in gruppi perché il calcolo seppure semplice è un po' laborioso, e si ottiene:

P(uscita del 2) = $16/6^3$ P(uscita del 3) = $27/6^3$ P(uscita del 4) = $34/6^3$
P(uscita del 5) = $36/6^3$ P(uscita del 6) = $34/6^3$ P(uscita del 7) = $27/6^3$
P(uscita del 8) = $19/6^3$ P(uscita del 9) = $12/6^3$ P(uscita del 10) = $7/6^3$
P(uscita del 11) = $3/6^3$ P(uscita del 12) = $1/6^3$

Le valutazioni teoriche si accordano con i risultati ottenuti ?