Dalla frazione al numero decimale: esploriamo

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Stabilire se una divisione (frazione) dà luogo a un numero decimale periodico o non periodico. Scrivere un numero decimale come somma di multipli di potenze di 10 ad esponente intero. Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico.	Il teorema fondamentale dell'aritmetica.	<u>Numeri e algoritmi</u> Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare e dimostrare	Informatica

Contesto
Calcolo aritmetico. Storia della matematica.

La verifica ed il consolidamento delle necessarie abilità di calcolo con i numeri (naturali e razionali), di cui è opportuno verificare il possesso da parte degli allievi all'inizio del percorso di matematica al primo biennio, può essere condotta attraverso attività diverse (analisi e rappresentazione di semplici indagini condotte nella classe, risoluzione di problemi con percentuali, …). L'attività qui proposta si colloca al termine di queste verifiche, prima di passare alla formalizzazione delle strutture indotte dalle operazioni nei diversi insiemi numerici. Essa intende da una parte consolidare negli studenti la consapevolezza e la padronanza dell'uso degli strumenti di calcolo elementare, dall'altra fornire loro un buon bagaglio di esperienze significative cui far riferimento, per contesti ed esempi applicativi, quando saranno introdotti, nel seguito degli studi, strumenti più formali.

Descrizione dell'attività
L'attività si articola in momenti di calcolo manuale con i numeri naturali, le frazioni e i numeri decimali, anche in basi diverse da 10, e in momenti di esplorazione e riflessione di proprietà. L'uso degli strumenti di calcolo è motivata dalla necessità di poter condurre in modo più ricco ed esteso questa sorta di sperimentazione con "oggetti" della matematica che, seppure utili come strumenti per risolvere problemi di contesti reali, assumono qui una loro autonomia e diventano essi stessi un interessante ambito di esplorazione e di riflessione.

Il percorso procede per domande alle quali si cercherà di dare risposte utilizzando gli strumenti (concettuali e di calcolo) che gli studenti hanno a disposizione.

<u>Domanda 1</u>: Data una frazione ridotta ai minimi termini, in quali condizioni la frazione è espressa (in base dieci) da un numero decimale finito?

Le frazioni sono date come rapporto di numeri naturali: i concetti coinvolti sono l'equivalenza delle frazioni, la scomposizione (in particolare l'unicità della fattorizzazione) di un numero naturale, il numero decimale finito come frazione che ha per denominatore una potenza di 10.

È agevole osservare, anche in modo informale, che la frazione è espressa da un numero decimale finito soltanto se il denominatore ha come fattori primi esclusivamente il 2 oppure il 5, che sono i soli fattori della base.
È utile verificare, anche carta e penna, qualche caso, con esempi a conferma e con controesempi.

<u>Domanda 2</u>: In una frazione, che si esprime con un numero decimale finito, che relazione c'è tra il denominatore e il numero delle cifre della parte decimale?

Anche in questo caso è semplice osservare che il numero di cifre decimali è l'esponente maggiore tra la potenza di base 2 e quella di base 5 nella fattorizzazione del denominatore. Infatti, per avere una frazione, equivalente alla data, che abbia una potenza di 10 al denominatore basta moltiplicare per la potenza mancante.
Per condurre o confermare queste osservazioni può essere utile utilizzare un ambiente di calcolo che elabori la frazione in modo esatto, cioè come coppia di numeri naturali.
Ecco un esempio con un software di calcolo simbolico.

#1: $\frac{13}{40}$

#2: 0.325

#3: $\frac{13}{2^3 \cdot 5}$

#4: $\frac{13 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2}$

#5: $\frac{325}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2}$

Figura 1

La frazione introdotta nella riga #1 è espressa nella riga #2 come numero decimale finito. Si osserva che il numero decimale ha 3 cifre.
A riga #3 il denominatore è scomposto in fattori: la fattorizzazione ha solo potenze di 2 e di 5.
L'esponente più alto delle due potenze al denominatore è 3, esattamente come il numero di cifre dopo la 'virgola' del numero decimale.
Per avere al denominatore una potenza di 10 (la minima possibile) occorre moltiplicare per 5^2: in questo modo il denominatore è 1000.
Moltiplicando per 5^2 il numeratore si ottiene proprio la parte decimale del numero (325).

<u>Domanda 3</u>: Cosa succede alla espressione decimale della frazione (ridotta) se questa ha al denominatore un fattore che non è divisore della base?

Per la proprietà della unicità della fattorizzazione dei numeri naturali, nessuna potenza di 10 può contenere come fattore il denominatore se questo ha un fattore primo diverso da 2 e da 5. Questa proprietà è usata in tanti contesti dell'aritmetica ed è quindi opportuno richiamarla in modo esplicito e non darla per scontata, anche se non la si può certamente dimostrare ad allievi di questa età. La conseguenza è che la frazione non può essere espressa da nessun numero decimale finito perché questo corrisponderebbe ad una frazione che ha per denominatore una potenza di 10.

Come dimostrare, o almeno giustificare intuitivamente, il fatto che il numero decimale, che esprime una frazione, se non è finito, è necessariamente periodico? Gli allievi sanno già calcolare con la divisione il numero decimale corrispondente ad una frazione: la dimostrazione parte da questa conoscenza. Nel calcolo il divisore è il denominatore. Quando nel calcolo si trova come resto 0, il processo ha termine e quindi il numero decimale è finito. D'altra parte, se nel calcolo si ritrova un resto già incontrato in precedenza, il processo si ripete con la stessa sequenza indefinitamente.
Nella divisione (tra numeri naturali) il resto è minore del divisore: per questo il numero dei possibili resti nel calcolo del numero decimale è minore del denominatore. Di conseguenza nel calcolo del numero decimale corrispondente ad una frazione i casi sono due: o dopo qualche passo si trova

resto 0 e quindi il numero decimale è finito, oppure si ritrova uno dei resti (il cui numero è minore del denominatore) già calcolato in precedenza e quindi il numero decimale è periodico. In questo ultimo caso la lunghezza del periodo è minore del denominatore della frazione.

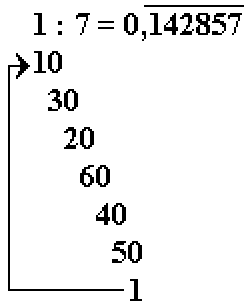

Figura 2

La risposta alla terza domanda passa attraverso la sequenza dei resti trovati nel calcolo del numero decimale.
Prendiamo in esame un caso particolare: la frazione 1/7 si esprime con il numero decimale $0,\underline{142857}$ (qui le cifre del periodo sono sottolineate per comodità tipografica). La sequenza dei resti è 1, 3, 2, 6, 4, 5. Poiché l'ultimo passo ha prodotto come resto 1, che è il primo nella sequenza dei resti, la sequenza dei resti, e quindi anche delle cifre del numero decimale, si ripete all'infinito.

Il calcolo fatto nella figura 2 del numero decimale corrispondente ad 1/7 offre l'opportunità di fare qualche osservazione sulle regolarità delle cifre del periodo quando al denominatore ci sono numeri particolari (in questo caso primi). Lo scopo di queste osservazioni è di stimolare la curiosità degli allievi, di abituarli a formulare congetture e di sottoporle a verifiche per vedere se si tratta di mere coincidenze o di fatti che si possono generalizzare, di esprimere in modo corretto argomentazioni. Queste abilità sono la premessa necessaria alle attività di dimostrazione alle quali saranno avviati successivamente.
Una verifica 'sperimentale' di queste congetture troverà utile l'uso di strumenti di calcolo e potrà essere occasione per qualche attività di stesura di semplici programmi.

Prima osservazione: 142857 x 7 = 999999 il numero che si ottiene isolando il periodo moltiplicato per il denominatore dà un numero fatto da *tanti nove quante le cifre del periodo* (o se si vuole anche $10^6 - 1$). Questa è esattamente la regola della frazione generatrice dei numeri periodici, solo espressa al contrario, che almeno un tempo era bagaglio comune della scuola media.

Seconda osservazione: $142857 \times 2 = 285714$
$142857 \times 3 = 428571$
………………………
Il numero delle cifre del periodo ha questa curiosa proprietà: se lo si moltiplica per un numero minore di 7, produce un numero che ha la stessa sequenza di cifre spostata di qualche posto. La dimostrazione è immediata osservando il processo di calcolo del numero decimale.

Terza osservazione: 142 + 857 = 999 spezziamo il numero del periodo in due parti (di tre cifre ciascuna), la somma dei due numeri ottenuti è una sequenza di cifre 9. Questa è la curiosità più sorprendente di questo tipo di numeri, che naturalmente si ritrova anche per altri denominatori primi, ma la cui dimostrazione è più complicata.
La proprietà può anche essere espressa così: le cifre della seconda parte del periodo sono le complementari rispetto a 9 delle corrispondenti cifre della prima parte.

Si possono provare quali di queste proprietà si ritrovano con 1/11, 1/13 oppure 1/17.

Soprattutto l'ultimo caso, che produce una sequenza di 16 cifre, suggerisce l'opportunità di disporre di un programma che, dati due numeri come numeratore e denominatore, ne calcoli il corrispondente numero decimale. La stesura del programma naturalmente va proposta agli allievi più motivati o con maggiore autonomia nell'uso degli strumenti informatici. Nulla impedisce però di usare il programma predisposto per le osservazioni che verranno suggerite nel seguito. Per i numeri decimali finiti il programma deve calcolate tutte le cifre decimali, mentre se il numero decimale è periodico si chiede che vengano calcolate tutte le cifre del periodo.
Nel primo caso si eseguirà la divisione finché il resto è 0, nel secondo finché si ritrova il resto iniziale del periodo. Ed è proprio questo il problema posto dalla quarta domanda, la cui risposta è necessaria per scrivere il programma che calcola il numero decimale di una frazione.

<u>Domanda 4</u>: Data una frazione ridotta, come si determina il numero di cifre della parte decimale che precede il periodo (antiperiodo) nel numero decimale corrispondente?

Scomponiamo in fattori il denominatore della frazione: possiamo raccogliere le potenze di 2 e di 5 in un primo fattore del denominatore e tutte le altre nel secondo. In modo formale possiamo scrivere:

$\frac{m}{n} = \frac{m}{2^h 5^k p} = \frac{1}{2^h 5^k} \cdot \frac{m}{p}$ dove compare una frazione strettamente decimale e una frazione nella quale il denominatore è primo con 10. Il numero delle cifre dell'antiperiodo dipende solo dalla prima frazione ed è quindi (vedi Domanda 1) il massimo tra gli esponenti della potenza di 2 e di 5 contenute nella fattorizzazione del denominatore.

Data la frazione m/n (ridotta), il calcolo delle cifre dell'antiperiodo si può fare in questo modo:

antiperiodo(*n*)
n numero naturale dato (la lunghezza dell'antiperiodo dipende solo da *n*);
a numero naturale per il calcolo della lunghezza dell'antiperiodo;

assegna 0 ad *a*: all'inizio l'antiperiodo è vuoto

finché *n* è divisibile per 10
  assegna *n*/10 a *n*
  aumenta *a* di 1

finché *n* è divisibile per 2
  assegna *n*/2 a *n*
  aumenta *a* di 1

finché *n* è divisibile per 5
  assegna *n*/5 a *n*
  aumenta *a* di 1

la lunghezza dell'antiperiodo è *a*.

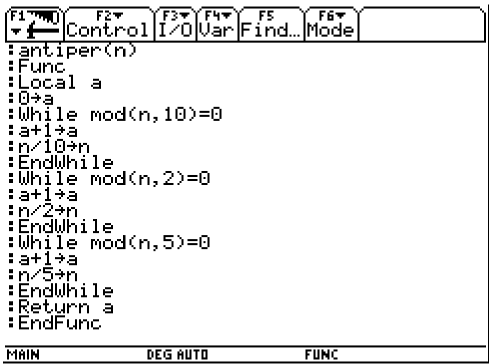

Figura 3

La Figura 3 contiene il listato della funzione scritto per una calcolatrice programmabile. Ecco ora alcune applicazioni della funzione antiper(*n*).

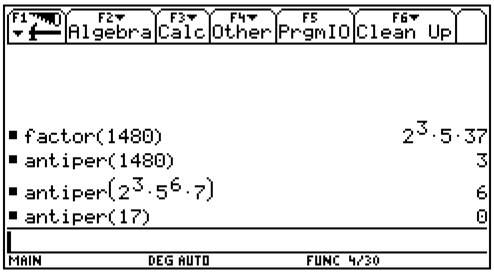

Figura 4

Nello schermo della calcolatrice a sinistra compare la riga immessa e a destra la risposta calcolata.
Nella scomposizione in fattori primi di 1480 il 2 compare con esponente 3, mentre il 5 ha esponente 1. Il numero di cifre dell'antiperiodo di 1480 è 3. Prendendo un numero già fattorizzato, l'antiperiodo ha la lunghezza prevista. Naturalmente 17 è primo e quindi in base 10 non ha antiperiodo.

Possiamo ora descrivere la funzione che produce il numero decimale di una frazione.
Numerodecimale(n,d)

n e d numeri naturali	rappresentanti il numeratore ed il denominatore della frazione
a numero naturale	per la lunghezza dell'antiperiodo
m numero naturale	per il massimo comun divisore tra numeratore e denominatore da usare per ridurre la frazione ai minimi termini
r numero naturale	che conterrà il resto al termine del calcolo delle cifre dell'antiperiodo: se il resto è 0 il calcolo ha termine e il numero decimale è finito, se invece è diverso da 0 sarà l'elemento di confronto per stabilire quando ha termine il periodo
s stringa di caratteri	nella quale saranno raccolte le cifre del numero decimale a mano a mano che sono calcolate; in s si userà la virgola per separare la parte intera da quella decimale e il segno: per separare, se serve, l'antiperiodo dal periodo.

primo passo:	Ridurre la frazione ai minimi termini.
secondo passo:	Calcolare la parte intera della frazione ed assegnarla come stringa a s, conservare in n il primo residuo della frazione.
terzo passo:	Calcolare le cifre dell'antiperiodo. Con la funzione *antiper* si calcola il numero di cifre dell'antiperiodo: questo numero stabilisce quante volte va fatto il calcolo delle cifre successive alla virgola da aggiungere alla destra della stringa s. Si osservi il ruolo della base di rappresentazione, il 10, sia nel calcolo della lunghezza (nella funzione *antiper*), sia nel calcolo delle cifre: questo sarà utile quando si vorrà applicare l'algoritmo ad altre basi di rappresentazione.
quarto passo:	Se il resto dell'ultima divisione è 0 il calcolo del numero decimale ha termine (numero decimale finito), altrimenti si calcolano le cifre del periodo. Si conserva il resto iniziale del periodo: quando si ritroverà nel calcolo lo stesso resto il procedimento ha termine. Prima di aggiungere a s la prima cifra del periodo si inserisce un segno di separazione ":".

Una possibile traduzione nel linguaggio della calcolatrice programmabile è la seguente. Usiamo ancora la forma della funzione, che restituisce il risultato nell'ambiente di calcolo, per poter fare sul numero decimale prodotto qualche elaborazione successiva.

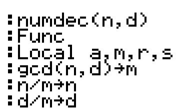

Figura 5

numdec(n,d) è una funzione che restituisce come sequenza di caratteri il numero decimale,
Local definisce le variabili di calcolo interne alla funzione.
La funzione gcd(n,d) è predefinita nella calcolatrice e calcola il MCD dei numeri n e d.

```
:antiper(d)→a
:string(intDiv(n,d))&"."→s
:mod(n,d)→n
:While a>0
:10*n→n
:s&string(intDiv(n,d))→s
:mod(n,d)→n
:a-1→a
:EndWhile
```

Figura 6

Calcolo delle cifre dell'antiperiodo. La funzione predefinita della calcolatrice intDiv(n,d) calcola il quoto (intero) nella divisione di n per d che corrisponde alla cifra da calcolare; la funzione mod(n,d) calcola il resto nella stessa divisione e produce il nuovo resto.
While … EndWhile descrive un ciclo che è eseguito quando la condizione iniziale è verificata. L'operatore & tra stringhe le concatena.

```
:If n>0 Then
:s&":"→s
:n→r
:Loop
:10*n→n
:s&string(intDiv(n,d))→s
:mod(n,d)→n
:If n=r
:   Goto fine
:EndLoop
:Lbl fine
:EndIf
:Return s
:EndFunc
```

Figura 7

Se il resto è 0, il calcolo è finito. Altrimenti si mette in coda a s il segno ":" che indica l'inizio del periodo.
Dopo aver registrato in r il resto di confronto, comincia il ciclo di calcolo delle cifre del periodo. Il ciclo Loop … EndLoop non ha mai fine: per terminare il processo occorre uscire dal ciclo con l'istruzione Goto <etichetta>, dove <etichetta> indica la riga di programma Lbl <etichetta> da cui riprendere il processo. Nel nostro caso l'istruzione di uscita è eseguita quando nella divisione intera si trova un resto uguale al resto iniziale.

Vediamo ora qualche applicazione della funzione numdec(n,d).

```
■ numdec(5,24)            "0.208:3"
■ numdec(5,240)           "0.0208:3"
■ numdec(3,2^4·7)         "0.0267:857142"
■ numdec(3,2^4·5^2)       "0.0075"
```

Figura 8

Il numero decimale è calcolato come stringa: non è possibile avere come risultato un *numero* se si vuole mantenere il segno di separazione tra l'antiperiodo ed il periodo.
Negli esempi sono evidenziate alcune delle proprietà dei numeri decimali già richiamate in precedenza.

```
■ numdec(1,17)     "0.:0588235294117647"
■ numdec(10,17)    "0.:5882352941176470"
■ numdec(15,17)    "0.:8823529411764705"
■ numdec(14,17)    "0.:8235294117647058"
■ numdec(4,17)     "0.:2352941176470588"
■ numdec(6,17)     "0.:3529411764705882"
■ numdec(9,17)     "0.:5294117647058823"
numdec(5,17)
MAIN        DEG AUTO        FUNC 7/30
```

Figura 9

17 è un numero primo e la frazione 1/17 produce un numero decimale periodico con 16 cifre di periodo.
Tutte le frazioni n/17, con n da 1 a 16, producono la stessa sequenza di cifre solo spostate. Scegliendo opportunamente i numeratori, le sequenze risultano spostate ogni volta di un posto.

Anche 13 è un numero primo, ma 1/13 ha 6 cifre di periodo. In questo caso le sequenze *circolari* di cifre sono due:

```
■ numdec(1,13)     "0.:076923"
■ numdec(10,13)    "0.:769230"
■ numdec(9,13)     "0.:692307"
■ numdec(12,13)    "0.:923076"
■ numdec(3,13)     "0.:230769"
■ numdec(4,13)     "0.:307692"
numdec(2,13)
MAIN        DEG AUTO        FUNC 6/30
```

Figura 10

```
■ numdec(2,13)     "0.:153846"
■ numdec(7,13)     "0.:538461"
■ numdec(5,13)     "0.:384615"
■ numdec(11,13)    "0.:846153"
■ numdec(6,13)     "0.:461538"
■ numdec(8,13)     "0.:615384"
MAIN        DEG AUTO        FUNC 6/30
```

Figura 11

Si era osservato nelle pagine precedenti che i semiperiodi di 1/7 davano per somma 999. Questo fatto vale anche in altri casi? La Figura 12 a destra mostra alcuni altri casi e vuole essere un invito per condurre qualche esplorazione ulteriore su questo tema.

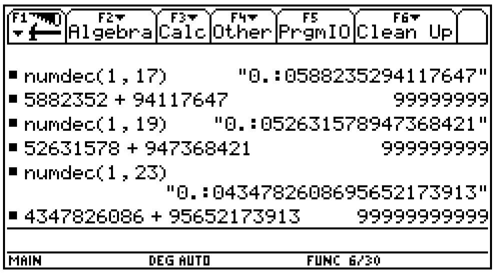

Figura 12

Possibili sviluppi

- Una prima estensione delle attività proposte può riguardare lo studio della relazione tra n, numero naturale, e la lunghezza del periodo di 1/*n*. Si può modificare la funzione numdec(*n*,*d*) in modo che produca solo la lunghezza del periodo della frazione. Poiché la lunghezza del periodo non dipende dal numeratore (se la frazione è ridotta in minimi termini) la funzione può avere come argomento il solo denominatore e considerare sempre 1 come numeratore. Si è già detto che la lunghezza del periodo di 1/n è minore di n: solo alcuni numeri primi hanno lunghezza del periodo pari a n-1 (massima possibile). Ad esempio 17 ha periodo 16, mentre 13 ha periodo 6.
  Si osserva la seguente proprietà per la lunghezza del periodo, qui espressa per 7: 7 ha periodo 6, 49 ha periodo 42, 7^3 ha periodo 6 x 7^2, in generale 7^k ha periodo 6 x 7^{k-1}.
- Le funzioni per la lunghezza dell'antiperiodo e per il calcolo del numero decimale possono essere adattate a qualche altra base di rappresentazione, ad esempio la base 2 o la base 6. Con esse si possono poi ripetere le osservazioni fatte con la base 10; in particolare si può evidenziare il fatto che la frazione 1/10 scritta in forma razionale in base 2 è periodica con tutte le ben note problematiche del calcolo approssimato con il computer.
- La sequenza dei resti nel calcolo del numero decimale corrispondente a m/n, con $m < n$ e con numero di cifre del periodo massimo (si provi, ad esempio, con $n = 541$), appare *del tutto* imprevedibile e ben distribuita (compaiono tutti i numeri compresi tra 1 e 540). Se dividiamo i resti di questa sequenza per n, otteniamo una sequenza di numeri < 1 distribuiti in modo apparentemente casuale e che possono rappresentare un modello semplificato della generazione di numeri casuali utilizzati dal computer per le simulazioni.

Elementi di prove di verifica

Numeri finiti e numeri periodici.

1. Quali delle seguenti frazioni produce numeri decimali finiti e quali periodici?
3/40, 5/15, 3/7, 7/35

2. Calcola la scrittura decimale di 1/13. Quante sono le cifre del periodo? Quante potevano essere al massimo?

3. Il numero di cifre del periodo di 1/37 è 3. Quante sono le cifre dell'antiperiodo di 1/3700?

A caccia di numeri periodici.

4. Si osservi che $10^6 - 1 = 999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$. I numeri 7 e 13 hanno lunghezza del periodo 6. Quali sono i numeri *candidati* ad avere 4 cifre di periodo e quali le hanno effettivamente?