L’algebra si sposa con la geometria

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Calcolare somma, prodotto, quadrato di polinomi.	I polinomi e le loro operazioni (addizione e moltiplicazione). Polinomi in una indeterminata.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure	Storia

Contesto
Configurazioni geometriche.

Si vuole proporre un metodo grafico per la risoluzione di particolari equazioni. L’obiettivo è quello di spostare l’attenzione dal mero calcolo risolutivo al significato dell’equazione e alle relazioni che intercorrono tra i coefficienti dei suoi termini.
L’attività può essere proposta quale fase conclusiva delle attività sulle abilità di calcolo esercitate nei vari insiemi numerici e e di quelle sulle equivalenze tra figure, coniugando i due aspetti attraverso la ricerca e la visualizzazione delle soluzioni intere positive di un’equazione.

Descrizione dell’attività
Il più grande dei matematici greci classici è stato Eudosso (408 a.C – 355 a.C.), secondo soltanto ad Archimede: il suo primo grande contributo alla matematica fu una nuova teoria delle proporzioni.
I nuovi rapporti incommensurabili, scoperti dai Greci, furono considerati anch’essi come numeri. Essi comparivano nei ragionamenti geometrici, mentre i numeri interi e i rapporti di numeri interi comparivano sia in geometria sia nello studio generale delle grandezze.
La teoria di Eudosso ebbe numerose conseguenze: da un lato favorì una netta separazione tra il numero e la geometria, dall’altro spinse i matematici greci verso la geometria. Come risolvevano i Greci il problema della necessità dei numeri nel lavoro scientifico, nel commercio e nelle altre attività pratiche? Certo è che la rappresentazione geometrica dei numeri irrazionali e delle operazioni con essi non è, anche oggi, molto pratica. Può darsi che sia logicamente soddisfacente pensare a $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ come all’area di un rettangolo, ma se si avesse bisogno di conoscere questo prodotto per comprare della “moquette”, difficilmente si riuscirebbe a calcolarlo.
Nel periodo classico, le persone colte non si lasciavano coinvolgere in problemi pratici; si poteva pensare a tutti i rettangoli della geometria senza preoccuparsi minimamente della dimensione effettiva di alcun rettangolo. Il pensiero matematico fu in tal modo separato dai bisogni reali e i matematici non sentirono alcun bisogno di migliorare le tecniche aritmetiche e algebriche.
Nel periodo alessandrino (dal 300 a.C. fino al 600 d.C. circa) furono abbattute le barriere fra classi colte e schiavi e gli uomini colti cominciarono ad interessarsi degli affari pratici: anche la geometria divenne quantitativa. In altre parole, la matematica utilizzata nella vita quotidiana era una matematica fatta con i numeri interi e con frazioni di termini interi (cioè frazioni in cui numeratore e denominatore sono numeri interi).
Con la presente attività, a partire da semplici equazioni, traducendo in oggetti geometrici i suoi termini e procedendo con il metodo delle deduzioni locali, si vuole proporre un’ampia riflessione tra le equazioni e le loro soluzioni ricercate in insiemi numerici in cui non siano sempre possibili le operazioni fondamentali.

Si prenda in considerazione l'equazione di primo grado del tipo $c \cdot x = a \cdot b$. Si può pensare in questo modo: c per x è l'area di un rettangolo di base c e altezza x, allo stesso modo a per b è l'area di un rettangolo di base a e altezza b; il segno di uguaglianza sta ad indicare che le due figure sono equivalenti. È bene riferirsi ad un esempio numerico del tipo:

$$2x = 3 \cdot 4 \qquad (1)$$

L'equazione ci fornisce l'area di un rettangolo di base 4 e altezza 3. Si vuole sapere quanto vale la base di un rettangolo ad esso equivalente e avente l'altezza pari a 2.
La costruzione geometrica favorisce l'intuizione

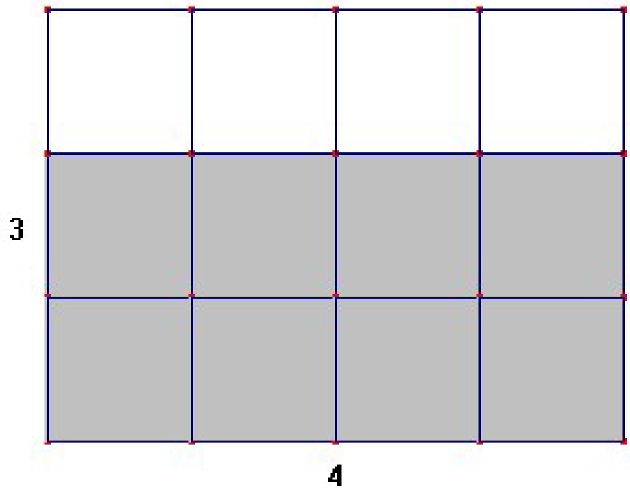

Figura 1

Si provi ora a costruire un rettangolo equivalente (significa usare lo stesso numero di quadrati) e con altezza pari a 2 (disponendoli in fila per due).

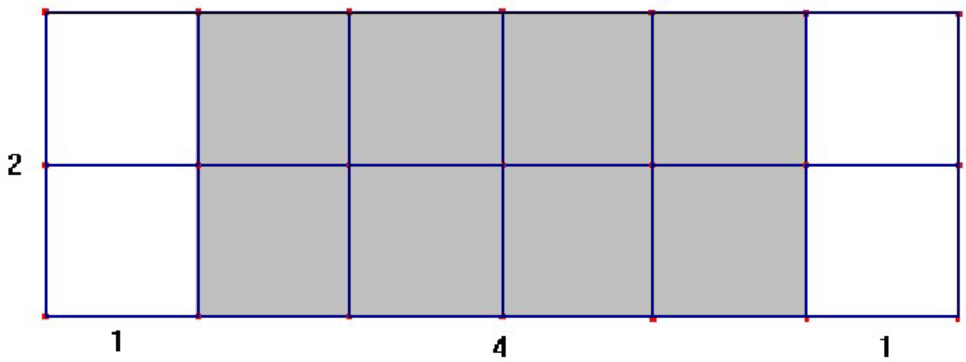

Figura 2

Dalla Figura 2 è facile intuire che la soluzione è 6.
Ha senso, a questo punto, a titolo di esercizio, applicare lo stesso metodo per l'equazione $2x = 3 \cdot 5$. Una costruzione analoga alla precedente non è, in questo caso, possibile. Si apre allora la discussione: le due equazioni, dal punto di vista formale, sono identiche, si diversificano però dalla relazione tra i coefficienti; nel primo esempio c è sottomultiplo di b, nel secondo il coefficiente c è primo con gli altri due. Si può concludere che un'equazione del tipo (1) ha soluzioni intere solo se $a \cdot b$ è multiplo di c.
E allora come ci si comporta nel caso in cui $a \cdot b$ e c sono primi tra loro?
Sicuramente non si possono avere soluzioni intere. Ha senso, tuttavia, porsi il problema di risolvere in generale un'equazione del tipo $c \cdot x = a \cdot b$

Si consideri la Figura 3.

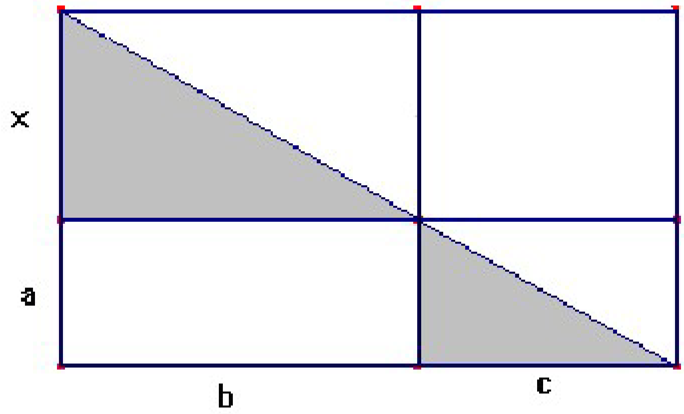

Figura 3

Dalla relazione di similitudine fra i triangoli rettangoli di cateti *a*, *c* e *x, b* consegue che $a{:}c=x{:}b$; essa rappresenta l'equazione assegnata (prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi), da cui si ricava $x=\frac{ab}{c}$. Mettendo a confronto i risultati dei due esempi, si può pensare che il secondo metodo sia quello più completo,. Infatti se *ab* è multiplo di *c*, *x* è intero, diversamente *x* è razionale. Questo significa che nella generalizzazione del problema, si può discutere sull'importanza del concetto di gruppo per l'insieme **Q** dei numeri razionali rispetto alla divisione e sulla relazione di inclusione tra l'insieme **N** dei numeri naturali e l'insieme **Q**.
Si passa ora alla ricerca delle soluzioni intere positive della seguente equazione di secondo grado ad una incognita ed a coefficienti interi:

$$x^2+10x=39 \qquad (2)$$

Si procede per via geometrica.

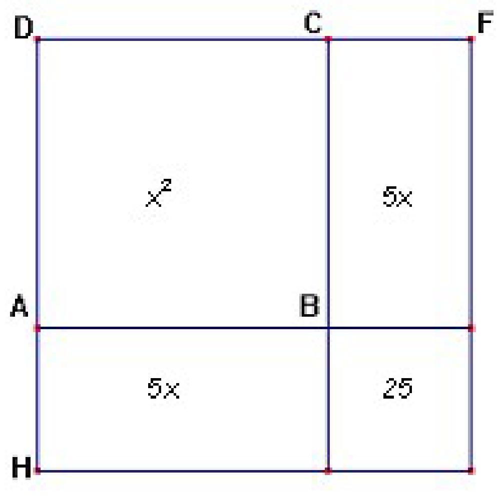

Figura 4

Sia la misura del segmento $\overline{AB}$ il valore dell'incognita *x* e si costruisca su esso il quadrato *ABCD*. Si prolunghino *DA* e *DC* di 5 tali che siano $\overline{AH}=5$ e $\overline{CF}=5$. Costruendo il quadrato di lato *DH* si ottiene un quadrato la cui area è data dalla seguente relazione

$$x^2+10x+25\,.$$

Dal confronto con la (2) si ottiene:

$$x^2+10x+25=39+25$$

$$(x+5)^2 = 64$$
$$(x+5)^2 = 8^2$$

due potenze che hanno lo stesso esponente sono uguali se e solo se sono uguali le basi. Si ha, dunque, che *DH*, lato del quadrato considerato nella Figura 4, misura 8 e x misura 3.
Ma le soluzioni non sono due?
Risolvendo algebricamente l'equazione, le soluzioni sono 3 e -13, ma, avendo limitato la ricerca alle soluzioni appartenenti all'insieme numerico $\mathbb{N}$, si deve accettare 3 e non -13.
In questi casi il metodo geometrico è efficace, in quanto a priori seleziona l'insieme numerico in cui si cerca la soluzione.
Questo metodo, proposto da Erone, va sotto il nome di metodo del completamento del quadrato; in effetti, si tratta di sommare ad ambo i membri quel numero, 25 nell'esempio, che consente di completare il quadrato a primo membro e di estrarre poi la radice quadrata. Se il radicando è un quadrato perfetto, si hanno soluzioni intere positive, diversamente no.
C'è da fare ancora un'osservazione: possiamo applicare sempre questo metodo?
La risposta è chiaramente negativa.
È sempre possibile risolvere l'equazione algebricamente, ma non sempre si può utilizzare il metodo geometrico.

Elementi di prove di verifica

1. Si inventi un quesito di geometria che abbia come soluzione la seguente equazione $3x = 6 \cdot 5$ e la si risolva in $\mathbb{N}$.

2. Data la seguente equazione $6x = 2 \cdot 5$ è possibile stabilire, senza svolgere esplicitamente i calcoli, se la soluzione è intera o no? Giustificare la risposta.

3. È possibile applicare il metodo del completamento del quadrato alla seguente equazione $x^2 + x = 20$? Le soluzioni sono numeri interi o no? Giustificare le risposte.