Segui la freccia

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare strutture più complesse: i vettori.	Vettori e loro operazioni: addizione, moltiplicazione per un numero reale.	<u>Numeri e algoritmi</u> Lo spazio e le figure Argomentare e congetturare Risolvere e porsi problemi	

Contesto
Geometria analitica.

Nell'ambito del contesto indicato è presentata un'applicazione dei vettori in matematica, assai diversa dalle applicazioni in fisica, che mette in evidenza, senza formalizzare troppo, la loro caratteristica di classe di equivalenza. Apre anche una finestra sullo spazio dove il metodo classico non è più utilizzabile, mentre l'equazione vettoriale si estende senza difficoltà.
Questa attività può essere proposta nella terza o nella quarta classe sia come complemento alla teoria classica sia come teoria principale.

Descrizione dell'attività
Partendo dal piano si ricava l'equazione vettoriale di una retta per l'origine; con la regola del parallelogrammo si passa in modo naturale alla retta che non passa per l'origine. Si pone l'accento sul vettore che indica la direzione della retta. Usando le coordinate dei punti si trova l'equazione parametrica e da questa, con semplici passaggi algebrici, quella cartesiana. A questo punto si ricorda che una retta è individuata da due punti. Si chiede agli studenti di individuare il vettore che indica la direzione della retta che passa per i punti dati: si ritrovano così le equazioni precedenti osservando la formula classica della retta per due punti da un nuovo angolo. L'estensione allo spazio avviene in modo naturale, semplicemente aggiungendo una coordinata.

<u>Prima fase</u>
Si scrive l'equazione della retta passante per l'origine e per il punto $A(3;2)$. Essa è fatta da multipli del vettore $A - O = \boldsymbol{v}$, per cui la sua equazione può essere scritta $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{v}$.
Se una retta non passa per l'origine, ma è parallela alla retta precedente (ovvero ha la stessa direzione del vettore $\boldsymbol{v}$), la regola del parallelogrammo ci fa intuire che un suo qualsiasi punto ha come vettore posizione $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, dove $\boldsymbol{w}$ è un vettore posizione di un qualsiasi punto della retta.
Ad esempio:

Se $\boldsymbol{v} = (3;2)$ e $\boldsymbol{w} = (4;5)$, l'equazione $\boldsymbol{r} = k\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ diventa il seguente sistema $\begin{cases} x = 3k + 4 \\ y = 2k + 5 \end{cases}$

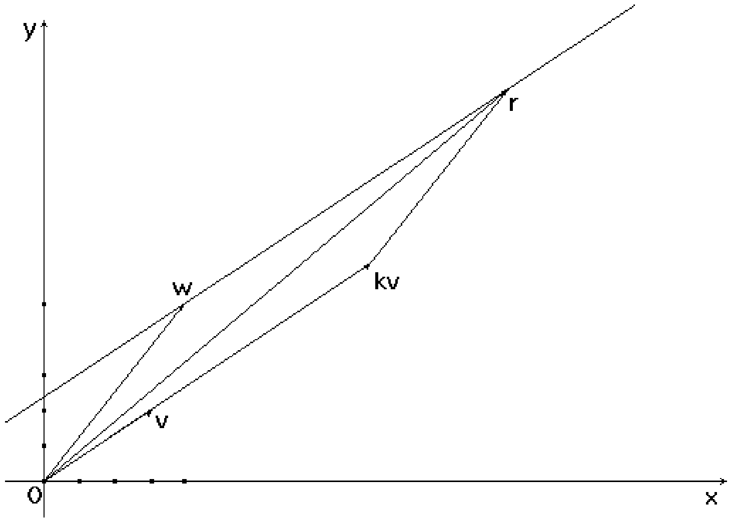

Figura 1

<u>Seconda fase</u>

Si sa che una retta è individuata da due punti. Si vuole trovare l'equazione cartesiana della retta individuata dai punti $A(2; 4)$, $B(3; 7)$. È importante far notare che questa retta ha la direzione del vettore $B - A = \boldsymbol{v} = (1; 3)$ e passa per il punto A.
Si può verificare che cambiando l'ordine di A e B l'equazione della retta non cambia.
Si scriva ora l'equazione cartesiana esprimendo k in funzione di x e di y ed uguagliando.
Cosa c'è al denominatore di queste due frazioni?
Si può generalizzare la questione mettendo coordinate generiche di punti, $(x_1; y_1)$ $(x_2; y_2)$, e arrivando così alla formula della retta per due punti, letta in un modo diverso.

Possibili sviluppi

1. Si può trasferire la questione allo spazio: i punti sono individuati da tre coordinate, i vettori hanno, rispetto alla base canonica, 3 componenti.
Che cosa cambia?
2. Si possono ripetere gli esercizi della parte precedente nello spazio semplicemente estendendo le formule ad una terza coordinata.

Elementi di prove di verifica

1. Trovare l'equazione della retta che ha la direzione del vettore $\boldsymbol{v} = (-1;5)$ e passa per il punto $B(-2;4)$.
2. Trovare l'equazione della retta parallela alla retta $\begin{cases} x = k + 2 \\ y = -2k - 3 \end{cases}$ e passante per il punto $C(1; -4)$.
3. Trovare l'equazione della retta perpendicolare alla retta $\begin{cases} x = -3k + 2 \\ y = k - 3 \end{cases}$ e passante per il punto $D(-2; -3)$.
4. Nei casi precedenti trovare l'equazione cartesiana delle rette (basta ricavare k e sostituire)
5. L'equazione cartesiana della retta è del tipo $ax + by + c = 0$. Che relazione c'è tra il vettore di componenti $a;b$ e il vettore direzione della retta? Qual è la distanza della retta $ax + by + c = 0$ dall'origine? Qual è la distanza della retta $ax + by + c = 0$ da un punto $P(x_0; y_0)$?