Triangoli equilateri e parabole

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	<u>Spazio e figure</u> Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	

Contesto
Geometria e aritmetica.

Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, nella seconda classe del secondo biennio, quando gli studenti hanno già acquisito una certa abilità nella rappresentazione analitica di oggetti geometrici, nella rappresentazione delle successioni e nell'uso di software di geometria e di manipolazione simbolica. Il contesto è quello della geometria e dell'aritmetica.
L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni. La soluzione del problema richiede la capacità da parte degli studenti di applicare in un unico contesto conoscenze e abilità diverse.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di applicare e approfondire i seguenti temi:
- il teorema di Pitagora,
- le proprietà dei triangoli equilateri,
- le proprietà sintetiche e analitiche della parabola,
- la somma dei primi *n* numeri dispari,
- la nozioni di funzione (in particolare la scrittura formale di una successione),
- la scelta di un sistema di riferimento cartesiano.

Proprio per questi motivi l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica "lunga", tipica del laboratorio di matematica.
La compresenza di approcci di tipo grafico, di tipo numerico e di tipo formale rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, in particolare dei software di geometria e dei programmi di manipolazione simbolica.
Si consiglia di proporre l'attività suddividendo la classe in piccoli gruppi di studenti, richiedendo di riportare successivamente la discussione avvenuta all'interno del gruppo classe relativamente alle

strategie risolutive. L'insegnante deve poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone agli studenti suddivisi in gruppi il seguente problema.

Problema.

Costruire dei triangoli equilateri lungo una retta, come mostrato nella Figura 1, con i lati di lunghezza 1, 3, 5, 7, …, 2n−1, …

Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta.

Determinare l'equazione della curva.

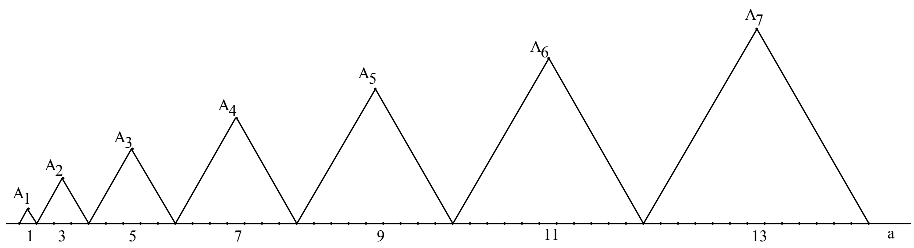

Figura 1

L'insegnante presenta e commenta il problema alla classe servendosi della Figura 1.

Seconda fase

Gli studenti disegnano con l'aiuto di un software di geometria e formulano congetture per descrivere la curva.

Consegna 1

Fissato un segmento unitario costruire i triangoli equilateri e i segmenti A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, …; variare la lunghezza del segmento unitario e descrivere quello che si osserva.

Si costruisce lavorando in gruppi la Figura 2, si discutono le osservazioni dell'attività di esplorazione; alla fine del confronto gli studenti congetturano che la curva sembra essere una parabola. L'insegnante propone la discussione della congettura.

Consegna 2

Costruire, con lo strumento "Conica" del software di geometria, la conica per i cinque punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e descrivere quello che si osserva.

Gli studenti disegnano la conica costruita dal software di geometria (Figura 3): è una parabola che sembra passare per tutti i punti costruiti e che ha per asse la retta *a*.

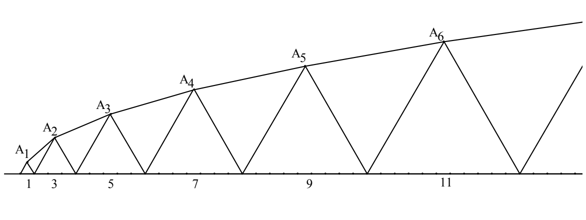

Figura 2

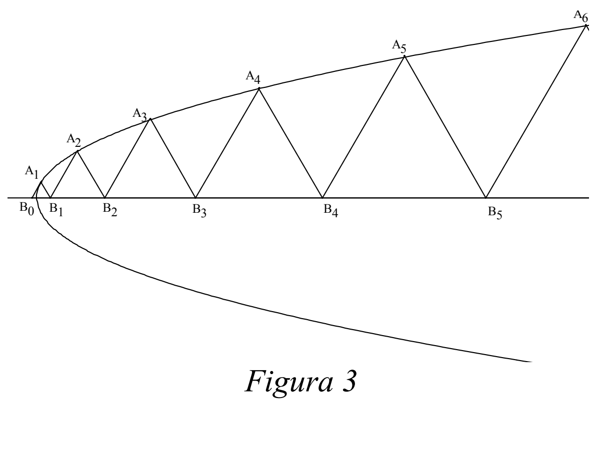

Figura 3

<u>Terza fase</u>
Gli studenti devono descrivere la parabola.

Consegna 3
Costruire con lo strumento “Luogo” del software di geometria le parabole che passano per il punto A_1 e hanno per asse la retta *a*. (Utilizzare la Figura 3).
Gli studenti devono utilizzare la definizione di parabola in modo consapevole: devono, ad esempio, fissare sulla retta *a* un punto qualsiasi F, costruire la retta *d* perpendicolare ad *a* tale che la distanza di A_1 da *d* sia uguale a A_1F e la parabola come luogo dei punti equidistanti da F e da *d* (Figura 4).

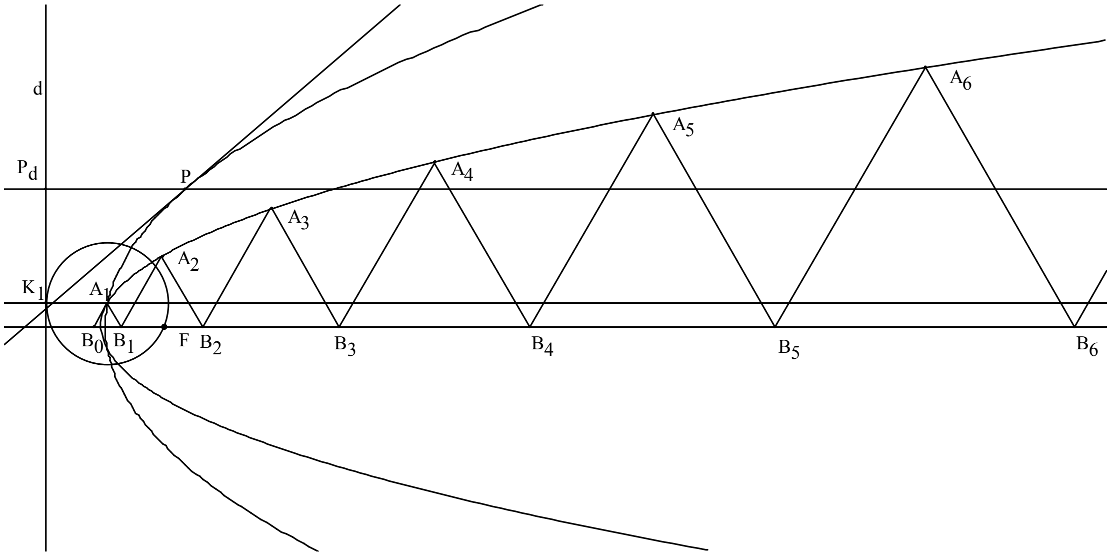

Figura 4

Consegna 4
Trascinare il punto F sulla retta a, descrivere quello che si osserva.
Gli studenti trascinano il punto F sulla retta a scoprono che la parabola disegnata come luogo di punti coincide con la parabola per i punti A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 se F coincide con il punto B_1 (Figura 5).

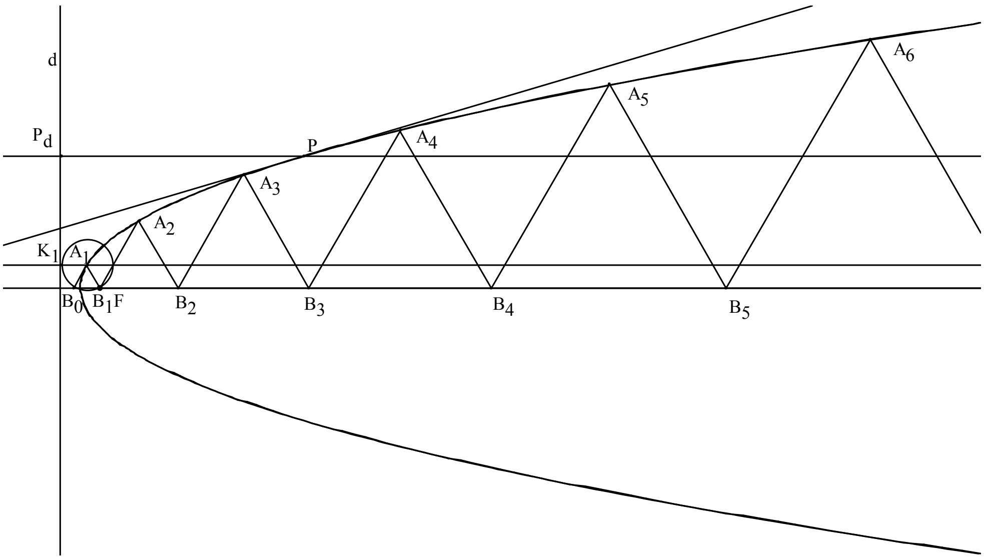

Figura 5

Con quest’ultima attività si conclude la fase di esplorazione e congettura sulla forma della parabola.

<u>Quarta fase</u>
Gli studenti devono dimostrare o confutare utilizzando per i calcoli anche un programma di manipolazione simbolico o una calcolatrice la seguente
Congettura
I punti A_2, A_3, A_4, …, appartengono alla parabola che ha il fuoco nel punto B_1 e passa per il punto A_1.
Devono quindi dimostrare o confutare che $A_nK_n = A_nF$, per ogni n.
Consegna 5
Determinare la distanza dei punti A_2, A_3, A_4, … dalla retta d.
L'insegnante può eventualmente suggerire il seguente procedimento (Figura 6):

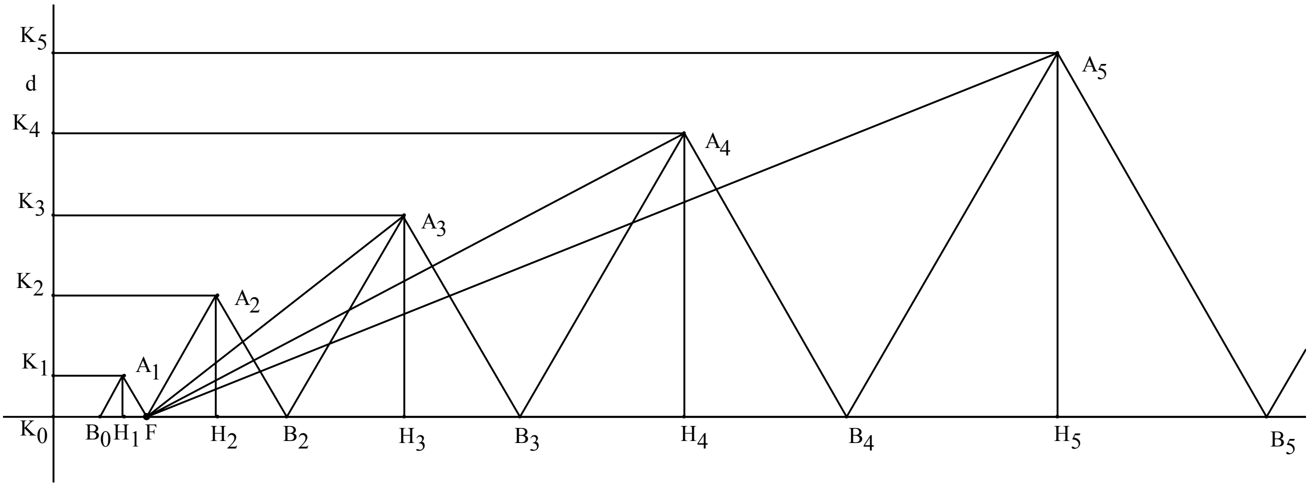

Figura 6

Il punto A_1 dista 1 dalla direttrice, infatti

$$K_1A_1 = K_0B_0 + B_0F - H_1F = 1/2 + 1 - 1/2,$$

il punto A_2 dista dalla direttrice 3, infatti:

$$K_2A_2 = K_0B_0 + B_0F + B_1B_2 - H_2B_2 = 1/2 + 1 + 3 - 3/2$$

il punto A_3 dista dalla direttrice 7, infatti

$$K_3A_3 = K_0B_0 + B_0F + B_1B_2 + B_2B_3 - H_3B_3 = 1/2 + 1 + 3 + 5 - 5/2.$$

Gli studenti utilizzano l'indicazione per calcolare la distanza del punto A_n da *d*.
Devono quindi scrivere la somma

$$K_nA_n = 1/2 + 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) - (2n-1)/2,$$

e osservare che si deve determinare la somma dei primi *n* numeri dispari

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)$$

calcolarla, anche con l'aiuto di una calcolatrice grafico simbolica (Figura 7):

$$K_nA_n = 1/2 + n^2 - (2n-1)/2 = (1 + 2n^2 - 2n + 1)/2 = n^2 - n + 1.$$

Consegna 6
Determinare la lunghezza dei segmenti FH_2, FH_3, …, FH_n .
Gli studenti devono ripetere le considerazioni fatte nella consegna precedente e con alcune variazioni ottengono (Figura 7):

$$FH_n. = 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1) - (2n-1)/2 = n^2 - 1 - (2n-1)/2 = n^2 - n - 1/2.$$

Consegna 7
Determinare la lunghezza dei segmenti A_2H_2, A_3H_3, …, A_nH_n.
Gli studenti determinano la lunghezza utilizzando le proprietà dei triangoli equilateri:

$$A_2H_2 = (3/2)\sqrt{3}, \; A_3H_3 = (5/2)\sqrt{3}, \; \ldots, \; A_nH_n = [(2n-1)/2]\sqrt{3}.$$

Consegna 8
Determinare la lunghezza dei segmenti A_2F, A_3F, …, A_nF.
La distanza di ciascun vertice dal fuoco può essere calcolata mediante il teorema di Pitagora applicato ai triangoli rettangoli A_nH_nF. Si ottiene allora (Figura 8):

$$A_nF = \sqrt{\left(n^2 - n - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = |n^2 - n + 1|.$$

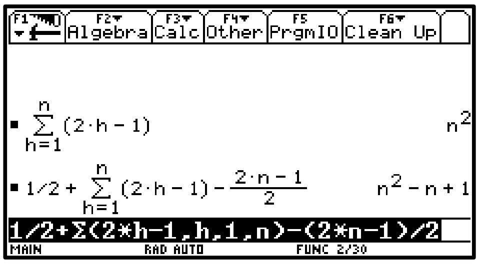

Figura 7

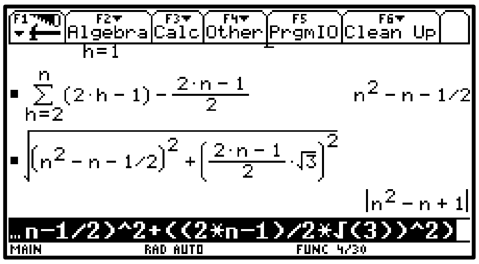

Figura 8

Gli studenti verificano, dunque, che l'ennesimo punto A_n è equidistante dalla direttrice e dal fuoco se

$$n^2 - n + 1 = |n^2 - n + 1|.$$

L'uguaglianza è vera, infatti i punti di coordinate $(n,\ n^2 - n + 1)$ appartengono alla parabola di equazione $y = x^2 - x + 1$ il cui grafico è situato nel semipiano delle ordinate positive.
Quindi tutti i punti appartengono alla parabola che ha per asse la retta a, per fuoco il punto F coincidente con il punto B_1 e per direttrice la retta d che dista 1 dal punto A_1.

<u>Quinta fase</u>
Gli studenti a questo livello scolare possono anche tradurre il problema in modo analitico.
Gli studenti, lavorando individualmente, devono affrontare i seguenti problemi:

a) scegliere in maniera opportuna il sistema di riferimento;
b) determinare le coordinate dei vertici dei triangolo utilizzando le esperienza fatte nelle attività precedenti;
c) determinare l'equazione della parabola per tre punti,
d) verificare per via analitica che il punto A_n appartiene alla parabola.

Il punto a) è abbastanza delicato, perché gli studenti potrebbero avere difficoltà a effettuare la scelta del sistema del riferimento cartesiano più opportuno.
Si discute questo problema con tutti gli studenti suggerendo di far coincidere, per esempio, l'asse delle ascisse con la retta a e l'origine degli assi con il punto H_1.
I punti b), c), d) sono analizzati con l'ausilio di una calcolatrice grafico simbolica, si demanda a questi strumenti lo sviluppo dei calcoli (Figura 9).

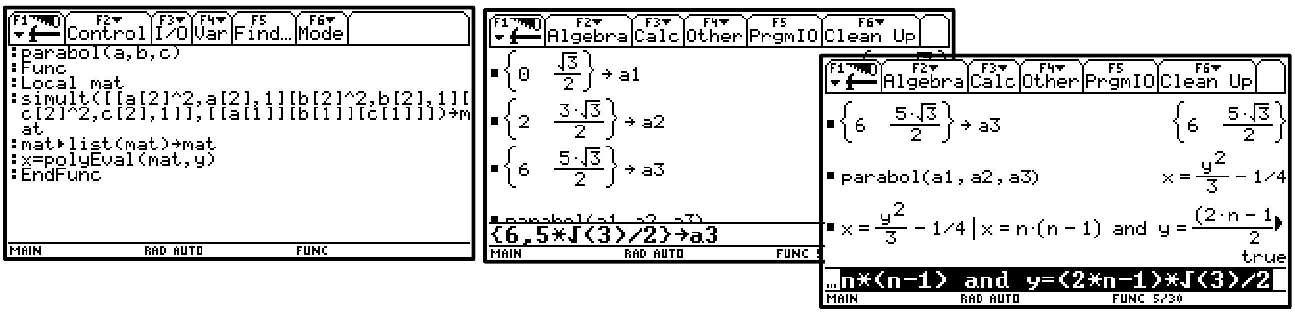

Figura 9

L'uso della calcolatrice grafico-simbolica impegna gli studenti nella ricerca di diverse strategie: ad esempio fissare l'asse delle ordinate coincidente con la retta *d* e l'asse delle ascisse coincidente con la retta *a*, scrivere rispetto a questo sistema le coordinate dei punti, determinare l'equazione della parabola e verificare l'appartenenza dei punti alla parabola; oppure ancora determinare l'equazione della parabola utilizzando le coordinate del fuoco e della direttrice. La ricchezza di approcci e la possibilità di discuterli tutti in tempi ragionevoli durante l'attività in classe può incoraggiare gli studenti alla partecipazione attiva, al confronto e alla collaborazione.

Possibili sviluppi

1. Dimostrare o confutare che i punti A_1, A_2, A_3, …, A_n,… appartengono al grafico della funzione $y = h\sqrt{x}$ per una scelta opportuna del parametro *h*.
2. Costruire su una retta una successione di triangoli equilateri con il lato di lunghezza 2, 4, 6, …. $2n$. Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta. Determinare l'equazione della curva.
3. Costruire su una retta una successione di triangoli isosceli simili con la base di lunghezza 1, 3, 5, 7, …, $2n-1$. Descrivere la curva individuata dai vertici non appartenenti alla retta. Determinare l'equazione della curva.