La radice di due va a teatro: dove si siede?

Livello scolare: 1° biennio

Abilità Interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare in modo consapevole gli strumenti di calcolo automatico. Approssimare a meno di una fissata incertezza risultati di operazioni con numeri decimali.	I numeri decimali e il calcolo approssimato. L'insieme dei numeri reali.	<u>Numeri e algoritmi</u> Spazio e figure Argomentare, congetturare e dimostrare	Filosofia greca

Contesto
Visualizzazioni geometriche e storia dei numeri.

La scoperta di segmenti incommensurabili presso i Greci produsse una profonda crisi nella concezione matematica del tempo. Ancora oggi, gli studenti evidenziano gran difficoltà nell'acquisire il concetto di numero irrazionale.
L'attività proposta coinvolge gli studenti in una rappresentazione di un passo tratto dal testo greco: il "*Menone*" di Platone, particolarmente significativo se rielaborato, in maniera adeguata, utilizzando la rappresentazione grafico-geometrica.
Può essere introdotta, nel primo biennio, dopo aver affrontato lo studio dei numeri naturali e razionali a livello operativo e strutturale.

Descrizione dell'attività
Il metodo socratico, favorito dalla visualizzazione delle figure, si alterna con quello euristico-dinamico: gli studenti, investiti del ruolo di scopritori, analizzano la figura, procedendo per gradi e, mediante successive intuizioni, tentativi e verifiche, arrivano alla conquista del concetto. L'apprendimento in situazione richiede un forte impegno da parte dell'insegnante che, oltre a coinvolgere lo studente nell'attività, ne deve anche guidare le intuizioni nella giusta direzione.
La sistematizzazione del processo spetta, nella fase conclusiva, all'insegnante che deve presentare questo numero con un nuovo simbolo (s'introduce il simbolo $\sqrt{2}$).

<u>Prima fase</u>
L'insegnante, dopo aver consegnato agli studenti copia del passo tratto dal testo originale del "Menone", li invita prima ad una lettura individuale e poi ad una rielaborazione dello stesso, inserendo, laddove è opportuno, il riferimento alla visualizzazione geometrica di cui devono corredare il testo.
La scoperta dell'incommensurabilità, oggi, al contrario di quanto non lo sia stato al tempo degli antichi greci, è facilitata dall'utilizzo di moderni strumenti informatici che conferiscono al disegno geometrico una grande potenzialità di apprendimento. Corredare il passo di Platone con una serie di illustrazioni significa, quindi, rivisitare un testo classico, di grande valenza didattica, in chiave moderna.
Socrate propone un problema geometrico ad un giovane, servo dell'amico Menone, senza particolari conoscenze matematiche.

[…]
Menone: Sì Socrate, ma in che senso dici che non apprendiamo e quello che denominiamo apprendere è reminiscenza? Puoi insegnarmi che sia davvero così?

Socrate: Non è certo facile, ma per amor tuo, ugualmente mi ci impegno. Chiama uno di questi molti servi del tuo seguito, quello che vuoi, sì che proprio in lui possa darti la dimostrazione che desideri.
[…]

Disegnare il quadrato avente area pari al doppio di quello assegnato

[…]
Socrate: Dimmi, ragazzo, l'area del quadrato come questo che vedi in figura, la conosci?

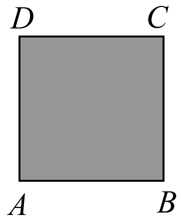

Figura 1

Ragazzo: La conosco.
S: È dunque un'area quadrata avente uguali tutti questi lati $AB = BC = CD = DA$ che sono quattro.
R: Precisamente.
S: Ora quest'area potrebbe essere e più grande e più piccola?
R: Precisamente.
S: Se pertanto il lato *AB* fosse due piedi, e questo *AD* fosse pure due piedi, di quanti piedi dovrebbe essere l'intero?
R: Quattro, o Socrate.
S: Or si potrebbe avere un'altra area doppia di questa, e tale da avere tutti e quattro i lati uguali come questa?
R: Sì.
S: E di quanti piedi sarà?
R: Di otto.
S: Su via provati a dirmi quanto sarà ciascun lato di essa. Il lato di questa è di due piedi: che cosa sarà il lato di quella doppia?
R: È chiaro, o Socrate, che sarà il doppio.
[….]
S: Dunque il lato sarebbe il doppio di *AB* se ne aggiungessimo un altro *BL* della stessa misura da questa parte?

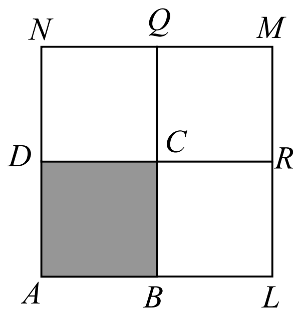

Figura 2

R: Precisamente.
S: E da questo lato *AL*, tu dici, nascerà l'area di otto piedi, quando quattro siano di tal misura?
R: Sì.
S: Disegniamone dunque da questo quattro uguali: non dovrebbe essere questa (*ALMN*) l'area che tu dici esser di otto piedi?
R: Precisamente.

S: Ma in essa ve ne sono quattro, queste (*ABCD*, *BLRC*, *CRMQ*, *DCQN*), ciascuna delle quali è uguale a questa (*ABCD*), che è di quattro piedi?
R: Sì.
S: Quanto dunque diventa? Non quattro volte tanto?
[….]
R: Sì, il quadruplo.
S: Dal lato doppio dunque non si ottiene un'area doppia ma quadrupla.
R: Dici vero.
S: E quattro volte quattro fanno sedici: o che no?
R: Sì.
[….]
S: Provati ora a dire di che misura credi che debba essere.
R: Di tre piedi.
S: Dunque, se ha da essere di tre piedi, aggiungiamo (ad *AB*) la metà di questo (cioè di *MQ*), e si avranno i tre piedi. Infatti questi (*AB*) sono due e questo (*BO*) uno. E si ha quest'area che tu dici (*AOPT*) .

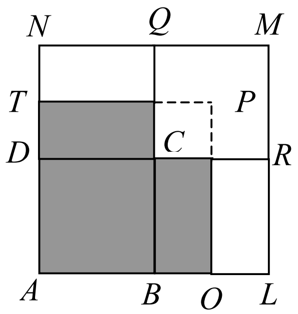

Figura 3

R: Sì.
S: Ma se da questa parte (*AO*) è di tre piedi, e da questa (*AT*) è di tre, l'area intera non diventa di tre piedi?
R: È evidente.
[…]
S: Non si ha dunque punto da un lato di tre piedi l'area di otto piedi.
R: No affatto.
S: E allora da quale? Provati a dircelo esattamente; e se non vuoi dire un numero, mostraci almeno da quale (fare qualche tentativo sulla figura).
R: Ma per Giove, o Socrate, io non lo so.
[…]
S: Dimmi dunque tu. La nostra area di quattro piedi non è questa qui (*ABCD*)? (vedi Figura 4).
R: Capisco.
[…]

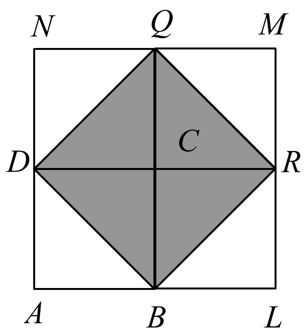

Figura 4

S: E che? Tutto questo intero (*ALMN*) quante volte è più grande di questo (*ABCD*)?
R: Quattro volte.
S: E a noi occorrevano due volte, ti ricordi?

R: Perfettamente.
S: Ora questa linea che si stende (*DB*, *BR*, *RQ*, *QD*), da un angolo all'altro non taglia essa per metà ciascuna di queste aree?
R: Sì.
S: Si hanno dunque quattro linee uguali che racchiudono quest'area (*DBRQ*).
R: Si hanno.
S: Ora osserva, di che misura è quest'area?
R: Non capisco.
S: Non sono quattro queste aree, e ciascuna linea trasversale non ne ha tagliata di dentro la metà di ciascuna? O non ti pare?
R: Sì.
S: Quante dunque di tali ve ne sono in questo (*DBRQ*)?
R: Quattro.
S: E quante in questo (*ABCD*)?
R: Due.
S: E il quattro del due che cosa è?
R: Il doppio.
S: Questo dunque, (*DBRQ*) di quanti piedi sarà?
R: Di otto piedi.
S: (Partendo) da quale linea?
R: Da questa (*DB*)
S: Da quella che va da un angolo all'altro dell'area di quattro piedi?
R: Sì.
S: Or questa gli intendenti la chiamano diagonale, e se questa (*DB*) ha nome diagonale, dalla diagonale, dunque, come tu dici, si potrebbe ottenere l'area doppia.
R: Perfettamente, o Socrate.

Fatta ora la conoscenza con questo nuovo numero, il passo successivo è quello di individuarne il comportamento operativo per notare come nelle applicazioni siffatti numeri si comportino diversamente da quelli fino ad ora conosciuti.
Avvalendosi del Teorema di Pitagora, è possibile passare, con l'uso di un software di geometria dinamica e con un procedimento ricorsivo, a partire dal segmento di misura $\sqrt{2}$, alla costruzione di più segmenti aventi per misura un numero irrazionale.

<u>Seconda fase</u>
Come si costruiscono geometricamente i numeri irrazionali del tipo $\sqrt{n}$?
A partire dal segmento unitario, si costruisce il triangolo rettangolo isoscele la cui ipotenusa misura $\sqrt{2}$ (cfr. prima fase).
A partire dal segmento (cateto) di misura $\sqrt{2}$, si costruisce il triangolo rettangolo avente per cateto minore il segmento unitario. Si ottiene così l'ipotenusa che misura $\sqrt{3}$.
Iterando tale procedimento è possibile individuare le misure di segmenti espresse mediante radici quadrate di numeri interi positivi.

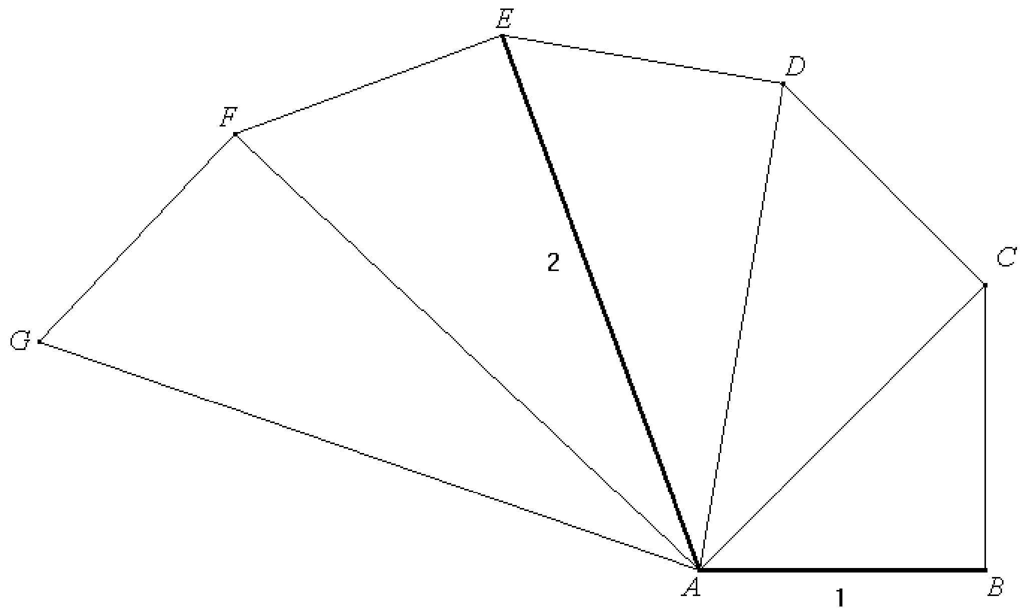

Figura 5

<u>Terza fase</u>

A partire dalla Figura 5 ha senso riportare i segmenti su una retta passante per *O* per eseguire le ordinarie operazioni tra segmenti (addizione e sottrazione) al fine di far osservare il diverso comportamento operativo dei numeri irrazionali rispetto a quelli fino ad ora studiati.

Lo stesso metodo di costruzione, riferito ad un piano cartesiano monometrico ortogonale, consente di rappresentare i numeri irrazionali sulla retta orientata.

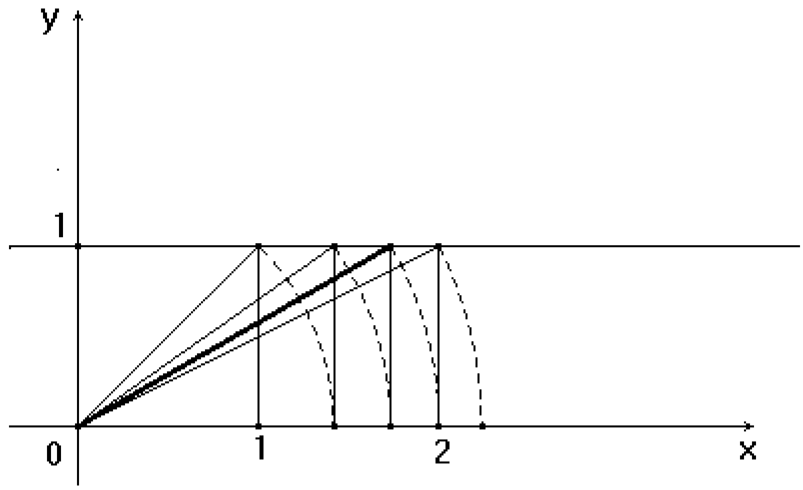

Figura 6

A questo punto occorre far osservare agli studenti, ad esempio, che $\sqrt{2}$ è un numero compreso tra 1 e 2, ma ciò non è sufficiente a far comprendere il concetto d'incommensurabilità. Si ricercano allora, con l'uso di una calcolatrice grafico-simbolica e per successive approssimazioni (due, tre, quattro, … cifre significative), i corrispondenti valori decimali di $\sqrt{2}$ come riportato nel seguente esempio.

x	y1
1.	1.
1.1	1.21
1.2	1.44
1.3	1.69
1.4	1.96
1.5	2.25
1.6	2.56
1.7	2.89

x=1.4

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 1

x	y1
1.4	1.96
1.41	1.9881
1.42	2.0164
1.43	2.0449
1.44	2.0736
1.45	2.1025
1.46	2.1316
1.47	2.1609

x=1.41

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 2

x	y1
1.41	1.9881
1.411	1.990921
1.412	1.993744
1.413	1.996569
1.414	1.999396
1.415	2.002225
1.416	2.005056
1.417	2.007889

x=1.414

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 3

x	y1
1.414	1.999396
1.4141	1.9996788
1.4142	1.9999616
1.4143	2.0002445
1.4144	2.0005274
1.4145	2.0008103
1.4146	2.0010932
1.4147	2.0013761

x=1.4142

MAIN RAD AUTO FUNC

Tabella 4

Gli studenti potrebbero, a titolo di esercizio, anche con l'uso di una semplice calcolatrice, costruire un'ulteriore tabella con le successive approssimazioni, verificando così che i numeri irrazionali, avendo la parte decimale formata da infinite cifre non periodiche, non possono essere espressi da una frazione né possono costituire un'unità di misura confrontabile con segmenti di misura finita.

Elementi di prove di verifica

1. Si può richiedere, la costruzione geometrica di $2\sqrt{2}$ (Figura 7).

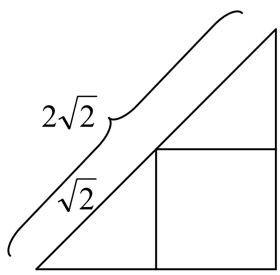

Figura 7

2. Come esempio di confronto si può richiedere la costruzione geometrica di $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ per far discutere sul risultato ora ottenuto in relazione a quelli precedenti.