Moto di un proiettile

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Avere familiarità con crescenza, decrescenza, positività, massimi e minimi di una funzione. Leggere in un grafico le proprietà di crescenza e decrescenza, l'esistenza di massimi e minimi. rappresentare graficamente e risolvere problemi che si formalizzano con sistemi di secondo grado. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Equazioni e disequazioni di secondo grado. Esempi di funzioni e dei loro grafici. Le funzioni seno, coseno e tangente.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Spazio e figure Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di Matematica	Fisica

Contesto
Applicazioni goniometriche.

Questa attività può essere proposta in una classe di un secondo biennio nella quale siano già stati introdotti i concetti di seno e coseno di un angolo acuto e trattati i primi elementi di cinematica (almeno le equazioni orarie del moto rettilineo uniformemente accelerato e il moto di caduta libera di un grave). Il contesto di riferimento è quindi quello scolastico dei primi elementi di fisica e l'attività dovrebbe, al tempo stesso, giovarsi di questo contesto e contribuire a consolidare alcune conoscenze che gli studenti hanno conseguito nei corsi di fisica. Attraverso un esempio storicamente significativo[1], si introducono, per un caso particolare, le equazioni parametriche di un luogo geometrico (una parabola con asse verticale) che è oggetto di studio di geometria analitica che, in quanto funzione quadratica, costituisce uno degli argomenti indicati nel tema "*Relazioni e funzioni*" del primo biennio.

Descrizione dell'attività
L'attività si struttura in tre fasi. La prima consiste in una discussione qualitativa sul moto di un proiettile e in una successiva sistemazione quantitativa condotta dall'insegnante. Nella seconda fase, grazie anche all'uso di software di manipolazione simbolica, si propongono agli studenti quesiti finalizzati alla costruzione di tecniche utili a risolvere problemi di moto del proiettile utilizzando le sole leggi orarie. Nella terza fase si determina, a partire dalle leggi orarie, l'equazione cartesiana della traiettoria.
L'uso degli strumenti informatici è fortemente consigliato nella conduzione di quest'attività.

<u>Prima fase</u>
L'insegnante propone agli studenti di descrivere qualitativamente la traiettoria del moto di un oggetto lanciato con un angolo diverso da 0 rispetto alla verticale. Dopo una discussione di carattere

[1] Le ricerche volte allo studio del moto dei corpi e, in particolare, al moto di un proiettile, sono state, nel XVII secolo, oggetto di attenzione e finanziamenti considerevoli.

qualitativo, tesa soprattutto ad ascoltare le risposte degli studenti, evidenziando quelle più adatte a preparare la trattazione più formale e quantitativa, l'insegnante fa riflettere sul fatto che il moto di un proiettile, trascurando altre forze che non siano quella di gravità, avviene in due dimensioni.
Scomponendo il moto in due direzioni fra loro ortogonali, delle quali una coincidente con quella della forza di gravità, si ottiene un moto uniformemente accelerato lungo una direzione e rettilineo uniforme lungo l'altra.
Un esempio di possibile introduzione del problema del moto di un proiettile viene qui accennata:
un moto parabolico è caratterizzato da una velocità iniziale v_0 (in m/s) e da un angolo di tiro α (si tratta dell'angolo formato dalla direzione di tiro con l'asse orizzontale). Il suo moto orizzontale è uniforme, con velocità costante uguale a $v_0 \cos(\alpha)$. Quindi, assumendo che, nell'istante t=0, il punto si trovi nell'origine, la posizione orizzontale è descritta dalla funzione

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t.$$

Che cosa succede verticalmente? È come se lanciassimo un sasso verso l'alto. La velocità verticale varia, perché la forza di gravità determina un'accelerazione diretta verticalmente verso il basso. Se non ci fosse l'accelerazione di gravità la velocità verticale sarebbe costante, pari a $v_0 \sin(\alpha)$.
Invece l'accelerazione di gravità, che si indica con g e che vale circa 9,8 m/s^2, produce una diminuzione della velocità pari a g m/s ogni secondo. Quindi la velocità verticale varia nel tempo con la seguente legge: $v(\mathrm{t}) = v_0 \sin(\alpha) - gt$.
Come varia la posizione verticale? Consideriamo l'istante iniziale t=0 (in cui la velocità verticale vale $v_0 \sin(\alpha)$) e un istante qualsiasi t (in cui la velocità verticale vale $v_0 \sin(\alpha)-gt$); nell'intervallo di tempo da 0 a t, poiché la velocità varia uniformemente, la velocità media è uguale a $\frac{v_0 \sin(\alpha) + v_0 \sin(\alpha) - gt}{2} = \frac{2v_0 \sin(\alpha) - gt}{2} = v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} gt$.
Se nell'intervallo di tempo che va da 0 a t (cioè in t secondi) un punto si muove con velocità media pari a $v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} gt$, allora percorre uno spazio (in metri) $\mathrm{s}(t) = \left(v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2} gt \right) t$. Quindi la sua posizione verticale è data dalla funzione $y = v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} gt^2$.
Quindi le funzioni parametriche di un moto parabolico caratterizzato da velocità iniziale v_0 e angolo di tiro α sono espresse con le seguenti funzioni:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

<u>Seconda fase</u>
L'insegnante propone agli studenti il seguente problema da svolgersi con l'aiuto di un software di manipolazione simbolica, utilizzando eventualmente le calcolatrici grafico - simboliche[2].

Si lancia un sasso con una velocità iniziale v_0 = 10 m/s in direzione α = 60°; assumendo g=9,8 m/s^2:
a) scrivere le funzioni parametriche del moto;
b) in ambiente Parametric[3] impostare xt1= e yt1= secondo le funzioni stabilite;
c) in ambiente Window[4] ponete tmin=0 e tmax uguale ad un numero opportuno di secondi (non troppo grande; quanto resta in aria un sasso lanciato a 60° con velocità 10 m/s?). Ponete xmin=0 e xmax uguale ad un numero opportuno di metri (quanto procede il sasso in orizzontale prima di

[2] Nel prosieguo dell'attività si fa riferimento a un ambiente tipico di alcune calcolatrici grafico – simboliche. Non è difficile riformulare le richieste adeguandole al particolare strumento utilizzato. Eventualmente è anche possibile riformulare l'attività senza riferirsi ad alcun software.
[3] Ci si riferisce all'ambiente del software nel quale è possibile definire funzioni parametriche.
[4] Ci si riferisce all'ambiente del software nel quale è possibile ridefinire la finestra grafica nella quale rappresentare le funzioni che si definiscono.

cadere a terra?). Ponete ymin=0 e ymax uguale ad un numero opportuno (quale altezza massima potrà raggiungere, all'incirca, il sasso?). In Y=Editor, con il cursore su xt1= oppure su yt1= settate F6 Style, Path, in modo da vedere una "pallina" che si muove lasciando dietro di sé la traiettoria. Finalmente andate in Graph e osservate il moto. Se occorre, cambiate i parametri in Window, in modo da osservare bene il moto sullo schermo della calcolatrice;
d) osservando il grafico e usando qualunque metodo riteniate opportuno rispondete alle seguenti domande:

- Quanti metri percorre il sasso in orizzontale prima di cadere a terra? Questa distanza si chiama *gittata* del moto parabolico.
- Per quanti secondi rimane in aria prima di cadere a terra? Questo intervallo di tempo si chiama *tempo di volo*.
- Quanto in alto sale? Cioè qual è l'altezza massima raggiunta?

e) Che cosa succede se, mantenendo la stessa velocità iniziale, si cambia l'angolo di tiro? Compilate la Tabella 1. Approssimate le distanze ai centimetri e gli angoli al decimo di grado.

v_0 (m/s)	α (°)	gittata (m)	tempo di volo (s)	altezza max (m)
10	10°			
10	30°			
10	40°			
10	50°			
10	60°			
10	80°			

Tabella 1

f) Che cosa succede se, mantenendo lo stesso angolo di tiro, si cambia la velocità iniziale? Compilate la Tabella 2. Approssimate le distanze ai centimetri e gli angoli al decimo di grado.

v_0 (m/s)	α (°)	gittata (m)	tempo di volo (s)	altezza max (m)
2	60°			
5	60°			
10	60°			
15	60°			
20	60°			
30	60°			

Tabella 2

Terza fase

L'insegnante sistema e organizza i risultati raggiunti dagli studenti nelle due precedenti fasi e dimostra, a partire dalle leggi del moto (ossia dalle due funzioni parametriche $x(t)$ e $y(t)$) che l'equazione cartesiana della traiettoria del moto di un proiettile è $y = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2(\alpha)}x^2$.

Dimostra inoltre, che la gittata risulta allora $\frac{2v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$ e fa notare che l'altezza massima corrisponde all'ordinata del vertice della parabola che descrive la traiettoria.

Possibili sviluppi

- Determinazione delle leggi della velocità del proiettile e, in particolare, determinazione della velocità con cui tocca terra.

- Funzioni che esprimono un moto armonico.
- Equazioni parametriche di una circonferenza e relazioni tra moto armonico e moto circolare uniforme.

Elementi di prove di verifica

1. Calcolo di gittate, altezza massima e tempo di volo
Si consideri un moto parabolico con $v_0 = 10$ m/s e $\alpha=55°$. Dopo aver approssimato sul grafico[5] della calcolatrice la gittata, l'altezza massima e il tempo di volo, calcolarli ($g = 9{,}8$ m/s^2).

Quale deve essere la velocità iniziale di un corpo puntiforme lanciato con direzione 30° se si vuole che la gittata sia di 50 m ($g = 9{,}8$ m/s^2)?

Un sasso viene lanciato verso l'alto (quindi con direzione 90°). A che velocità deve essere lanciato se si vuole che arrivi fino a un'altezza massima di 12 m ($g = 9{,}8$ m/s^2)?

[5] Questa richiesta ha senso soprattutto se si utilizzano software che consentono di percorrere con un cursore i punti del grafico indicando, contemporaneamente, il valore delle coordinate dei punti toccati.