Le coniche come luoghi: un percorso costruttivo

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici. Risolvere semplici problemi riguardanti rette, circonferenze, parabole.	Circonferenza, parabola, ellisse, iperbole come luoghi di punti e come sezioni coniche.	Spazio e figure Relazioni e funzioni Argomentare, congetturare, dimostrare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Storia Disegno Storia dell'arte Fisica Astronomia

Contesto
Dalle coniche come sezioni e come luoghi alle loro equazioni.

L'attività è proposta per il primo anno del secondo biennio. Il contesto è quello delle coniche e delle trasformazioni geometriche.
Strumento privilegiato per svolgere il lavoro previsto è un software di geometria, che permette facilmente di costruire e visualizzare le coniche.
Prerequisiti necessari sono la conoscenza delle equazioni di primo e di secondo grado, del piano cartesiano e dell'equazione della retta.
Il contesto iniziale è quindi quello matematico, ma nello sviluppo dell'attività è possibile stabilire significativi collegamenti con la Fisica, l'Astronomia e Storia dell'arte.
Con l'aiuto del software di geometria viene proposto un percorso costruttivo che è basato sulla rivalutazione, anche nello studio delle coniche, degli aspetti intuitivi e di geometria sintetica in modo che queste curve non siano viste dagli studenti soltanto come particolari equazioni.

Descrizione dell'attività
Prima fase
Nello studio della geometria analitica accade spesso che l'aspetto sintetico delle figure venga messo da parte, dando una netta prevalenza al metodo analitico. Questo si verifica in particolare per il tema delle coniche nel quale prevale, già all'inizio, l'aspetto analitico, fino a "nascondere" quasi del tutto le proprietà geometriche di queste curve.
Un software di geometria, per la facilità che permette nel tracciare le coniche, può consentire di recuperare questo aspetto geometrico molto importante che tra l'altro storicamente è stato il primo.
Questa impostazione evidenzia meglio le proprietà delle coniche e rivaluta le costruzioni sintetiche, oltre a rendere conto del nome dato a queste curve. In tale contesto gli allievi quindi possono operare meglio una sintesi tra il metodo analitico e quello della geometria sintetica, che costituisce la particolarità della geometria analitica.
Le potenzialità del software geometrico permettono di presentare in modo costruttivo e dinamico, come se si avesse a disposizione una "macchina matematica", tali proprietà. In questa fase, durante l'attività in classe, si possono anche presentare figure animate, nelle quali le coniche sono generate come sezioni di un cono a doppia falda (Figura 1).

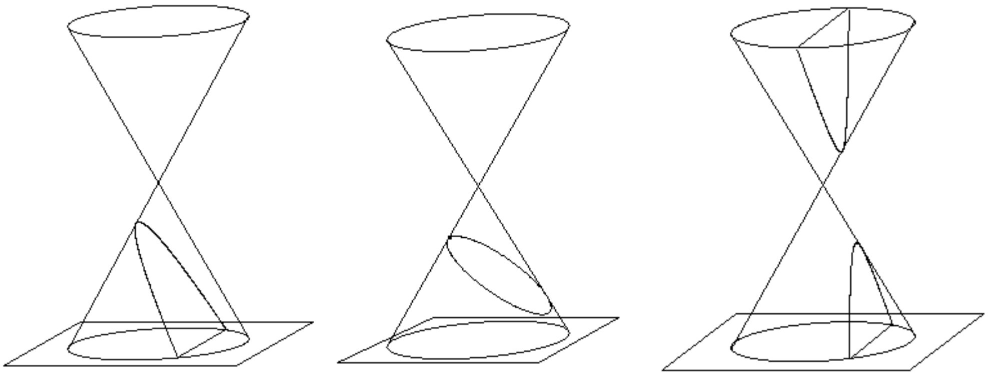

Figura 1

<u>Seconda fase</u>

In questa fase le coniche vengono definite come luoghi geometrici nel piano. Occorre accennare al fatto che dalla definizione delle coniche come sezioni di un cono non sarebbe difficile, soprattutto usando le attuali tecnologie, ricavare la definizione di conica come luogo geometrico, collegando così due definizioni che di solito vengono date in modo separato in quasi tutti i libri di testo.

Dopo questa parte introduttiva gli studenti, utilizzando le funzionalità presenti nel software geometrico, costruiscono la parabola, l'ellisse (con il caso particolarmente importante, che conviene svolgere per primo, della circonferenza) e l'iperbole come luoghi geometrici. Si analizzano le proprietà delle coniche; in particolare si possono anche presentare quelle collegate ai fuochi e alle direttrici, senza fare però riferimento al concetto di eccentricità (almeno in certi indirizzi di studio).

Sulla circonferenza, ad esempio, è possibile presentare alcune attività preliminari prima di arrivare all'equazione della circonferenza, in modo da collegare e integrare gli aspetti di geometria sintetica con quelli di geometria analitica.

Per la parabola, conviene presentare la costruzione a partire dal fuoco e dalla direttrice (Figura 2). Per esercizio si può proporre agli studenti di costruire la parabola a partire dal vertice e dal fuoco, oppure dal vertice e dalla direttrice.

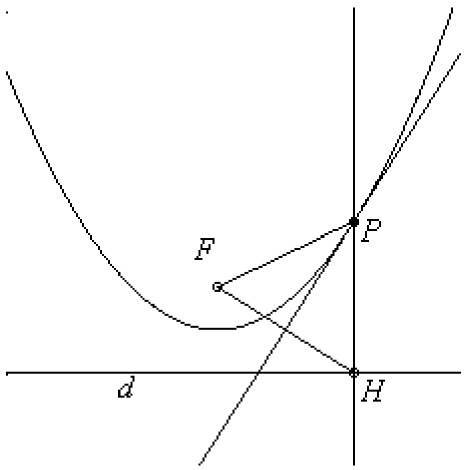

Figura 2

Una prima costruzione dell'ellisse (Figura 3), valida anche per l'iperbole (Figura 4), è la seguente: si disegna una circonferenza di centro un punto F_1 e raggio a piacere ed un punto interno alla circonferenza F_2. Preso un punto A sulla circonferenza si traccia la retta AF_1 e l'asse del segmento AF_2. Il loro punto di intersezione P appartiene all'ellisse. Si dimostra inoltre che l'asse del segmento AF_2 è tangente all'ellisse.

Analogamente per l'iperbole si disegna una circonferenza di centro un punto F_1 e raggio a piacere ed un punto esterno alla circonferenza F_2. Preso un punto A sulla circonferenza si traccia la retta AF_1 e l'asse del segmento $A\ F_2$. Il loro punto di intersezione P appartiene all'iperbole (figura 4).

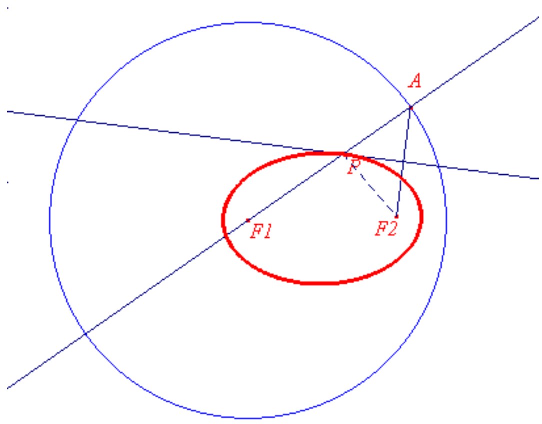

Figura 3

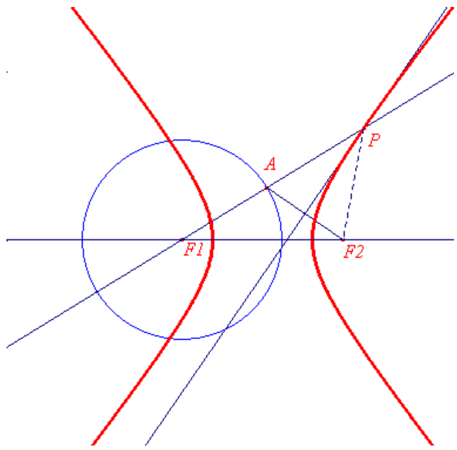

Figura 4

Le costruzioni proposte nelle figure 2, 3 e 4, possono essere riproposte, oltre che con l'uso di un software didattico, anche con macchine matematiche che usano dei fili oppure con la piegatura della carta. Con quest'ultima tecnica, per ottenere una parabola, come inviluppo di "pieghe", si parte da un foglio di carta nel quale è disegnata una retta d e un punto P. Si piega il foglio, molte volte, in modo da far "sovrapporre" il punto P alla retta d. L'inviluppo delle "pieghe" sarà allora una parabola. Analogamente si procede per ottenere l'ellisse e l'iperbole: si disegnano su un foglio, in questo caso, una circonferenza γ e un punto P e si ripete la stessa procedura, "sovrapponendo" più volte, con delle piegature del foglio, il punto P alla circonferenza γ.
Si può anche proporre un'ulteriore costruzione dell'ellisse ("metodo del giardiniere"): dato il segmento AB di misura k si considera un punto P di AB e si definiscono i segmenti AP, PB. Si considerano le due circonferenze di centri F_1, F_2 e raggi AP e BP. I punti di intersezione P e P' (due se $k > \overline{F_1F_2}$) appartengono all'ellisse (Figura 5).

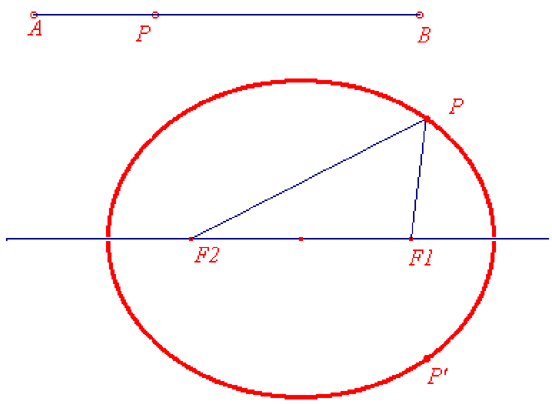

Figura 5

Le costruzioni presentate possono essere facilmente trasformate in procedure che rendono automatico, a partire dagli elementi che la individuano univocamente, la rappresentazione grafica delle coniche.

<u>Terza fase</u>
In questa fase, utilizzando le definizioni delle coniche date come luoghi geometrici, vengono

determinate, in opportuni sistemi di riferimento, l'equazione della circonferenza e quella della parabola. La ricerca delle equazioni può essere effettuata anche con l'uso del software geometrico in collegamento con altri sistemi di calcolo simbolico (Computer Algebra Systems). Nella determinazione delle equazioni della circonferenza e della parabola conviene ricavare inizialmente le equazioni: $x^2 + y^2 = r^2$ e $y = a\,x^2$ e poi utilizzare una traslazione per ricavare le equazioni in casi più generali.
In ogni occasione si potranno stabilire collegamenti con problemi presi dal mondo reale che si riconducono alle coniche o all'intersezione di rette e coniche. Importante è anche il collegamento continuo con il tema delle funzioni.

Quarta fase
Si presentano problemi e applicazioni riconducibili alla circonferenza e alla parabola e, più in generale, a semplici coniche o intersezioni di rette e coniche.

Ulteriori sviluppi
Si propongono alcuni esercizi, da svolgere con l'uso di un software di geometria, che servono a rafforzare il concetto di luogo geometrico e a collegarlo con la geometria analitica.

1. Trovare il luogo dei centri delle circonferenze passanti per due punti dati.
2. Trovare il luogo dei punti medi delle corde di stessa lunghezza di una circonferenza data.
3. Date due rette parallele r ed s e un punto A su r e un punto B su s, trovare il luogo dei punti medi descritti dal punto medio del segmento AB.
4. Determinare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due date circonferenze concentriche.
5. Dato un triangolo inscritto in una circonferenza, trovare il luogo geometrico descritto dal baricentro G al variare di un vertice C sulla circonferenza.
6. Dato un punto Q e una circonferenza γ, determinare il luogo geometrico dei punti medi dei segmenti QP al variare di P su γ.
7. Si considerano due semirette di origine il punto O. Si considera una circonferenza di centro C ed un punto P su di essa. Da P si mandano le parallele alle due semirette date (pantografo).

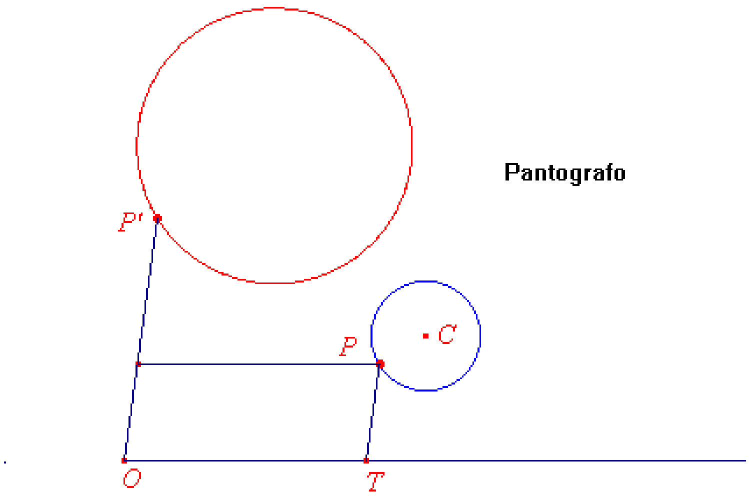

Figura 6

8. Si consideri una circonferenza γ, una retta r e un punto M di γ. Costruire le circonferenze tangenti alla retta r e tangenti nel punto M alla circonferenza γ. Determinare al variare di M su γ il luogo descritto dai centri di tali circonferenze. Variare la posizione della retta rispetto alla circonferenza e osservare come variano i luoghi.

9. Siano γ una circonferenza di centro O e raggio r e A un punto non appartenente a γ. Sia M un punto di γ. Si costruisca il quadrato $AMPN$, in senso antiorario, di centro I, e sia Q il punto di intersezione della retta AP e dell'arco minore di cerchio di centro A e di estremi M e N. Determinare i luoghi descritti da punti N, Q, I, P .
10. Si consideri un segmento costante AK ed un punto B su di esso; si mandi la perpendicolare ad AK per il punto B e si costruisca un rettangolo di base AB ed altezza BC, con $BC = BK$.
    Si ottengono così infiniti rettangoli isoperimetrici. Come varia l'area?
    Costruire una tabella con i valori di AB, di BC e dell'area. Che relazione esiste tra AB e BC se $ABCD$ ha area massima?

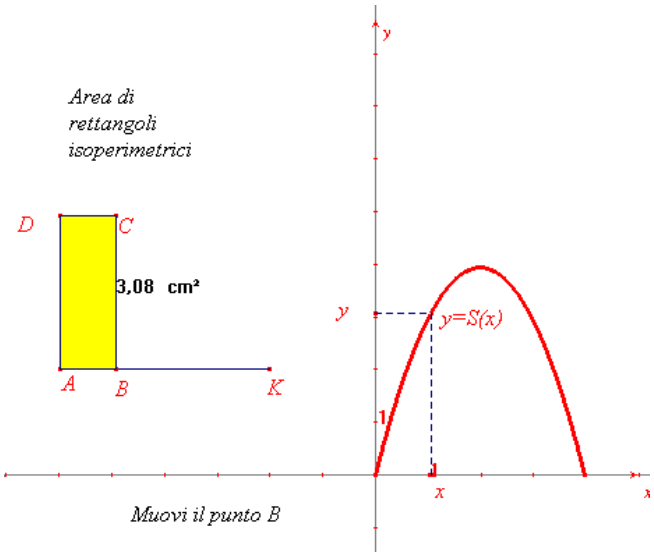

Figura 7

11. Tra tutti i triangoli rettangoli i cui cateti hanno somma 20, determinare quello che ha area massima.
12. Tra i rettangoli che hanno la stessa area, trovare quello di perimetro minimo.
13. Si consideri un triangolo rettangolo ABC ed un punto P appartenente ad AB; per P si mandi la parallela al cateto BC. Studiare l'area del triangolo APQ in funzione di x (misura di AP).

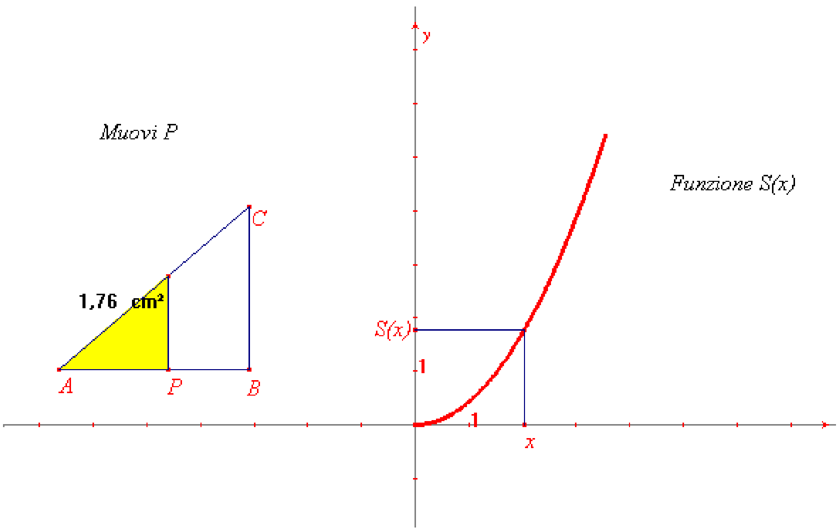

Figura 8

14. Determinare le dimensioni del rettangolo di area massima che si può inscrivere in un triangolo isoscele di base 10 e altezza 4.

15. Si consideri un quadrato di lato dato e si inscriva nel quadrato un altro quadrato di lato x. Studiare l'area del quadrato inscritto come una funzione di x.