Promossi con una domanda sola?

Livello scolare: 2° biennio

Abilità interessate	**Conoscenze**	**Nuclei coinvolti**	**Collegamenti esterni**
Utilizzare la Formula di Bayes.	Eventi e operazioni con gli eventi. Eventi incompatibili; eventi esaustivi. Significato della probabilità e sue valutazioni. Formula di Bayes e suo significato.	<u>Dati e previsioni</u> Relazioni e funzioni Risolvere e porsi problemi	Lingua italiana

Contesto
Extramatematico, sociale, probabilità.

Il contesto è di tipo matematico ed extramatematico; in particolare, per il contesto matematico, si pone in evidenza l'ambito probabilistico.
Il problema può essere affrontato a livello di primo biennio quando si conosca la definizione di probabilità e si sia in grado di valutare la probabilità di eventi condizionati. Si vuole portare gli studenti a rendersi conto che l'esser "fortunati" o meno (ad esempio sapendo rispondere in modo esatto ad un compito del tipo quiz a risposta multipla) può essere un fatto quantificato. Nel suo futuro, nella ricerca di sbocchi occupazionali, ciascuno studente potrebbe trovarsi di fronte a strumenti di questo tipo, largamente usati dalle industrie dei giorni nostri nella ricerca-scelta di personale da inserire nelle proprie attività produttive. E quei quiz saranno molto più ardui, anche perché spazieranno ben oltre la pratica scolastica…

Descrizione dell'attività
Si propone in classe un quiz a risposta multipla e si chiede: qual è la probabilità che uno studente che ha risposto esattamente alle domande abbia effettivamente studiato ?
Prendendo spunto da questo fatto si può poi rispondere ad una domanda che può emergere spesso in ambito scolastico.
Si supponga che uno studente abbia, magari a fine anno, una media bassa. E' "possibile", con una sola interrogazione, recuperare il terreno perduto ed essere promosso?
Il problema si presenta molto accattivante e sicuramente stimola la fantasia e la scaltrezza degli allievi molto interessati a questo tipo di argomento.

<u>Prima fase</u>
Si tratta di lavorare con probabilità di eventi condizionati. È stato considerato dalla classe un solo risultato, anche se importante, concernente tale tematica ovvero la Formula di Bayes.
Per questo motivo è necessario fare, con la classe, alcune ipotesi di lavoro; senza ovviamente farne una trattazione teorica, che potrebbe esulare dal contesto della realtà scolastica, si introdurrà operativamente la necessità delle probabilità "a priori"; questo fatto contribuirà non poco ad indirizzare l'attenzione degli studenti sul fatto che trattare l'incertezza non è mai un fatto del tutto "automatico" come invece potrebbe apparire da uno studio superficiale di altre parti della matematica.
Valutare la probabilità che uno studente che ha studiato sappia rispondere alle domande è la prima ipotesi di lavoro da affrontare.
La risposta a tale questione può (e deve!) sollevare discussioni … al termine delle quali potrebbe esserci un accordo del tipo di quello presentato qui di seguito.

Di uno studente si potrebbe arrivare a dire che:

a. Se studia con impegno, allora risponde bene alle domande del quiz con probabilità 1 (ovvero per lui saper rispondere correttamente è un evento certo).
b. Se studia così così, sa rispondere bene alle domande del quiz con probabilità p (che lo studente stesso, più di ogni altro, sa quantificare !).
c. Se non ha studiato, può rispondere bene ad una domanda con m risposte con probabilità $1/m$ (ovvero per lui tutte le risposte sono "equivalenti": da qui si vede che l'equiprobabilità non è un valore intrinseco ma una valutazione razionale successiva alla "raccolta" di (tutte) le informazioni a disposizione.)
d. Se uno studente a fine anno ha la media del 4 vuol dire che, durante l'anno, su 10 domande ha risposto bene solo a 4 (oppure a 20 su 50 e così via). Anche su questo punto la valutazione potrebbe essere diversa: ad esempio, se l'insegnante è uso non dare più di 8 ad un compito o ad una interrogazione perfetta, la valutazione precedente va riscalata a….. 3.2 (cioè la media del 4 diventa praticamente media del 3). Nella discussione lo studente impara a riflettere sul fatto che, cambiando le informazioni, può anche cambiare la probabilità: d'altronde nessuno di loro giocherebbe mai con monete che sa, prima di iniziare a giocare, essere "non regolari".

Una volta d'accordo (!) con queste, necessarie, considerazioni – e ricordandosi ancora una volta che la discussione fatta su di esse ha una importante valenza concettuale, oltre che didattica e operativa – si può passare alla formalizzazione del problema.
Indichiamo con A l'evento "lo studente ha (davvero) studiato" e con B l'evento "lo studente risponde esattamente alla domanda".
Chiedersi qual è la probabilità che uno studente che ha risposto esattamente alle domande abbia effettivamente studiato vuol dire chiedersi, formalizzando la richiesta, qual è la probabilità dell'evento A/B.
Dalla sopra ricordata Formula di Bayes si ha:

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})}$$

dove con $\overline{A}$ si è indicato l'evento "complementare" dell'evento A ovvero l'evento che si verifica quando *non* si verifica l'evento A.
Calcoliamo adesso i vari valori di probabilità, supponendo, per semplicità, che il compito consista di una sola domanda. (L'estensione a più domande sarà poi un fatto successivo, anche se non completamente automatico).

$P(B/A) = 1$ (da quanto si è argomentato al punto a)

$P(A) = p$ (anche questo valore è stato quantificato in seguito alla discussione sviluppata al punto d)

$P(B/\overline{A}) = \frac{1}{m}$ (se, come si è detto al punto c, nel quiz ci sono m risposte)

Dunque si ha:

$$P(A/B) = \frac{1 \times p}{1 \times p + \frac{1-p}{m}} = \frac{mp}{1 + p(m-1)}$$

Nota: Si potrebbe naturalmente eccepire sulla decisione di porre $\frac{1}{m}$, come valore equiprobabile.

Infatti in molte domande a risposta multipla, spesso anche chi non ha studiato si accorge che le risposte non sono equivalenti. Molti preparatori di test infatti seguono la "regola" di due risposte molto simili, una abbastanza verosimile ed una assai lontana. Anche in questo caso comunque si tratta di dare valutazioni di probabilità in senso razionale-soggettivo, tenendo conto dell'esperienza (ovvero dello scopo del test, del preparatore stesso, ecc…).

<u>Seconda fase</u>

L'efficacia concreta di questa formula può essere vista subito rispondendo alla seconda questione che ci si è posti all'inizio.
Si supponga che uno studente abbia, magari a fine anno, una media bassa. E' "possibile", con una sola interrogazione recuperare il terreno perduto ed essere promosso?
In questo contesto "possibile" assume il significato di "ragionevole" se riferito ad una eventualità di questo genere; ci chiediamo cioè la liceità di fare questa proposta – sia da parte del professore che magari vuol aiutare lo studente, sia da parte dello studente che cerca, con un solo gettone, di far saltare il banco. Più concretamente ci stiamo chiedendo se ci sono dei margini entro i quali tale proposta può essere fatta senza eccessive indignazioni (da parte degli altri studenti, da parte degli altri professori, ecc..). E' peraltro evidente che se la proposta viene fatta a (o da) uno studente che ha media 5, nessuno si scandalizzerebbe, ma se lo studente avesse media 2…!
Sia, ad esempio, 4 il corrispondente di "media bassa"
Per le considerazioni successive alla discussione fatta in classe, possiamo dire che, per quanto ne sappiamo, il nostro studente è come se, durante l'anno, avesse "mediamente" risposto bene solo a 4 su 10 (oppure a 20 su 50 e così via).
Dobbiamo ancora fare una ulteriore osservazione di lavoro: rispondere bene ad una interrogazione, anche se finale, dovrà essere considerato come rispondere bene ad un quiz con due sole risposte. Porremo per questo $m = 2$.
Siamo dunque in un caso particolare della nostra formula finale: sarà sufficiente porre $p = 4/10$ per ottenere:

$$P(promozione) = \frac{4}{7}$$

Essendo $\frac{4}{7}$ circa 0,571 possiamo dire che siamo vicini alla sufficienza e dunque sarebbe lecito e corretto promuovere lo studente in quelle condizioni
Naturalmente ciò non sarebbe più vero nel caso di uno studente con "media bassa" uguale a 3, in quanto gli stessi calcoli ci portano ad una conclusione del tipo $P(promozione) = \frac{6}{13}$ e dunque non sarebbe più considerato ammissibile fare un simile "salto".

Nota: con questa attività lo studente, oltre a familiarizzarsi con il concetto di probabilità condizionata, inizia a decidere di dare proprie (e coerenti, e razionali, ed eque,….) valutazioni di alcuni eventi che ha davanti ai suoi occhi: inizia cioè a familiarizzarsi, magari anche senza conoscerne il nome, con le probabilità "a priori" che così tanta importanza rivestono nelle considerazioni statistiche e probabilistiche, e comprende che sono le "a priori" a condizionare il risultato finale, nel caso trattato la promozione o la bocciatura.
Nella discussione che apre la prima fase, è opportuno far emergere che nella valutazione della probabilità a priori dell'evento *A:* "lo studente ha (davvero) studiato", certamente porre $P(A) = 0,4$, la probabilità del voto 4, gioca un ruolo ambiguo ma solo "prima della discussione" e della conseguente assegnazione di probabilità. Si tratta infatti di una prima ipotesi di lavoro sulla quale si può discutere (in classe) per arrivare ad una formulazione che, dipendendo magari dal professore,

dal periodo dell'anno, dall'esame (orale o scritto o entrambi) può anche "cambiare". Questa, al di là della formalizzazione, è una consapevolezza acquisita importante in sé.
Nella discussione che chiude la seconda fase, poi, trovata la probabilità *"a posteriori"*, l'insegnante porterà gli studenti a comprendere che il modo in cui ci si è espressi circa la *P(promozione*) fa passare implicitamente dalla probabilità al suo uso. Si può dire che il docente usa un criterio secondo il quale se la probabilità a posteriori è "di poco" inferiore a 0,6 allora lo studente viene promosso? E' argomentabile che, utilizzando il voto 4 come mezzo per assegnare il valore 0,4 alla probabilità di "Aver studiato da 4", allora avendo ottenuto 0,571 è come dire che lo studente ha studiato da 5,71, ossia da quasi 6 e, conseguentemente, la promozione viene data?

Elementi di prove di verifica

1. Siano dati gli eventi:
A = "essere il capocannoniere della Serie A di calcio"
B = "essere un uomo che abita a Milano"

Dopo avere valutato la probabilità di *A* e di *B* , calcolare *P(A/B)*, *P(B/A)* e fare commenti sul risultato.

Nota: Tale calcolo, oltre che far riflettere sul significato di evento condizionato e della relativa valutazione probabilistica, serve assai a mettere in guardia lo studente dal non confondere i due eventi *A/B* e *B/A*. Nel febbraio 2003 il capocannoniere della serie A era Vieri dell'Inter di Milano.