La concentrazione di un farmaco nel sangue

Livello scolare: 2° biennio

Abilità Interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Acquisire familiarità con i concetti di crescenza e decrescenza di una funzione. Costruire modelli sia discreti che continui di evoluzione di fenomeni nel tempo. Utilizzare metodi grafici e metodi di approssimazione per risolvere equazioni.	Zeri di funzioni. La funzione esponenziale. Semplici esempi di successioni. Incrementi a passo costante, pendenza media.	<u>Relazioni e funzioni</u> Numeri e algoritmi Argomentare, congetturare, dimostrare Misurare Risolvere e porsi problemi Laboratorio di matematica	Scienze

Contesto
Educazione alla salute.

Questa attività può essere introdotta in una terza o in una quarta classe, quando gli alunni hanno già acquisito abilità nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni, nella rappresentazione grafica di semplici funzioni e nell'individuazione di relazioni funzionali fra grandezze. Sarebbe anche possibile proporre quest'attività in un primo biennio, ma, in tal caso, bisognerebbe evitare alcune questioni che qui, invece, vengono discusse e, soprattutto, si dovrebbe tener conto del fatto che molte delle abilità che qui abbiamo dato per acquisite dovrebbero ancora essere oggetto di attenzione didattica. L'attività proposta, caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni e dalle fasi di manipolazione e rappresentazione grafica e simbolica, favorisce la produzione di congetture e richiede la successiva validazione delle stesse mediante argomentazioni e dimostrazioni.

Descrizione dell'attività
L'attività proposta consente di introdurre, affrontare e approfondire:
- nozioni come quelle di funzione, in particolare di successione, di crescenza di una funzione, di modello;
- tecniche come quelle delle differenze finite per ottenere informazioni sulla crescenza e sul come cresce una funzione;
- tecniche di programmazione per calcolare i valori di una successione definita per ricorsione.

Consente anche di avviare una prima riflessione sul confronto tra la complessità computazionale relativa al calcolo dei valori di una successione per iterazione e per ricorsione. Proprio per questi motivi, l'attività non dovrebbe essere confinata in tempi e spazi angusti, ma dovrebbe essere oggetto di didattica lunga, tipica del *laboratorio di matematica*. Attività di questo tipo rendono possibile la ripresa e l'approfondimento di tecniche di risoluzione di equazioni, sia grafiche sia numeriche, sia formali. La compresenza di questi tre approcci rende particolarmente indicato l'uso delle tecnologie informatiche, soprattutto dei manipolatori grafico simbolici.
Si consiglia di proporre l'attività a piccoli gruppi di studenti, richiedendo di riportare la discussione avvenuta all'interno del gruppo relativamente alle strategie risolutive. L'insegnante dovrebbe poi aver cura di avviare un confronto delle strategie risolutive proposte dai vari gruppi.

Prima fase

L'insegnante propone la *situazione – problema* sotto riportata a gruppi collaborativi formati da tre – quattro studenti di livello di preparazione simile (gruppi omogenei al loro interno):

Una studentessa si è prodotta una distorsione al ginocchio durante una partita di pallavolo indoor e il suo dottore le ha prescritto un farmaco anti-infiammatorio per ridurre il gonfiore. Deve prendere due pastiglie da 220 mg ogni 8 ore per 10 giorni. I suoi reni filtrano il 60% di questo farmaco dal suo corpo ogni 8 ore.

Quanta medicina si trova nel suo organismo dopo 3 giorni? E dopo 4 giorni? E dopo 10 giorni? Cercate di studiare l'evoluzione della quantità di farmaco presente nel corpo; in particolare, cercate di capire che cosa accadrebbe se la studentessa continuasse a prendere il farmaco per molto tempo: pensate che la presenza del farmaco nel suo organismo tenderebbe prima o poi a diminuire o aumenterebbe sempre? E, nel caso aumentasse sempre, pensate che potrebbe superare un qualunque valore prefissato, oppure tenderebbe a un valore che non è superabile nemmeno lasciando passare molto tempo?

L'insegnante può suggerire di costruire una tabella come la seguente:

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)
0	1	0	
1	1	8	
2	1	16	
3	2	24	
…	…	…	
n			

Tabella 1

Ci si attende che i gruppi di studenti inizino a compilare la tabella[1] , come suggerito dalla Tabella 2, calcolando, con l'aiuto della calcolatrice, la quantità di farmaco che si trova nell'organismo alla fine di ogni successiva assunzione di pastiglie.

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)
0	1	0	440
1	1	8	0,4*440+440 = 616
2	1	16	0,4*616+440 = 686
3	2	24	0,4*686+440 = 714
4	2	32	0,4*714+440 = 726
5	2	40	0,4*726+440 = 730

Tabella 2

La Tabella 2 suggerisce almeno due congetture:

[1] La scelta di non considerare alcuna cifra dopo la virgola, nella misura dei milligrammi di farmaco rimasti nel corpo dopo ogni somministrazione, dovrebbe essere oggetto di discussione con la classe: è meglio lasciare che gli studenti utilizzino in libertà tutte le cifre decimali che credono nella determinazione dei risultati e poi discutere l'opportunità delle diverse scelte, evidenziandone limiti e potenzialità. Noi abbiamo scelto valori interi per conformità con il dato iniziale di 440 mg.

1. la successione è crescente, ma cresce sempre meno
2. dato un determinato valore del farmaco rimasto nel sangue, il successivo può essere determinato moltiplicando tale valore per 0,4 e addizionando 440, ossia i milligrammi di farmaco assunti.

L'osservazione 1 può essere corroborata e giustificata sia con argomentazioni logico – intuitive, sia con l'aiuto di tecniche come, per esempio, le differenze finite.
Le argomentazioni che possono essere addotte sono riconducibili, in genere, alla seguente:
"I reni della studentessa sono capaci di filtrare il 60% di una quantità che cresce, ossia filtrano una quantità sempre maggiore; quando la quantità che filtrano sarà uguale a quella assunta, che è costante (440 mg), allora la quantità di farmaco presente nel sangue si stabilizza".

Con le tecniche delle differenze finite è possibile rilevare esplicitamente che non solo la successione dei valori di farmaco presenti nell'organismo cresce, ma anche che cresce sempre meno.
Infatti, osservando la Tabella 3, è immediato accorgersi che le differenze prime diminuiscono.

n	Giorno	Tempo (ore)	$F(n)$ farmaco che rimane nel corpo (in milligrammi)	Differenze prime
0	1	0	440	
1	1	8	616	176
2	1	16	686	70
3	2	24	714	28
4	2	32	726	12
5	2	40	730	4

Tabella 3

Il metodo delle differenze finite è particolarmente indicato quando la variabile indipendente varia con passo costante. In tal caso, le differenze prime sono proporzionali alla pendenza della retta congiungente due punti successivi della successione (la costante di proporzionalità è il passo con cui variano i valori della variabile indipendente). In altri termini, se la variabile indipendente varia con passo costante, la si può anche dimenticare, concentrandosi sulla variazione dei valori della variabile dipendente. In questo caso, la tabella si può leggere in colonna, e non riga per riga. Questo modo di guardare i dati è caratterizzato da una certa dinamicità e consente di valutare velocemente crescenza e concavità di una curva che rappresenta l'andamento del fenomeno oggetto di studio, senza scomodare conoscenze matematiche che vadano al di là di differenze e, eventualmente, ma non necessariamente, di rapporti.
Questo primo tipo di osservazioni dovrebbe portare gli studenti ad avere un'idea anche grafica dei punti che formano la successione; in un primo momento l'insegnante potrebbe accontentarsi anche di gesti che indichino una curva crescente con la concavità rivolta verso il basso e tendente verso un limite.
La congettura di 2 necessita di maggiore attenzione nella lettura dei dati e di una certa abilità nel riconoscere regolarità in una successione. Se gli studenti sono stati abituati a non effettuare subito i calcoli, ma ad osservare prima come variano i dati su cui vengono effettuate le operazioni, si accorgeranno che tutti i calcoli effettuati possono essere rappresentati con lo schema:
$F(n) = 0{,}4 * F(n\text{-}1) + 440$
Dove abbiamo indicato con $F(n)$ e $F(n\text{-}1)$, rispettivamente, la quantità di farmaco presente subito dopo l'ennesima somministrazione delle pastiglie e quella presente subito dopo la somministrazione precedente.
In genere questa scrittura suggerisce ad alcuni studenti la possibilità di determinare il valore limite della successione. Infatti, se tale valore limite esiste, esso deve poter essere determinato ponendo $F(n) = F(n\text{-}1) = x$ e quindi risolvendo l'equazione $x = 0{,}4\ x + 440$ che dà il valore $x = 4400/6 \cong 733$.

Seconda fase

L'attività può proseguire invitando gli studenti a costruire programmi che consentono di calcolare automaticamente i valori della successione, partendo dalla definizione ricorsiva:

$$\begin{cases} F(0) = 440 \\ F(n) = 0{,}4 \cdot F(n-1) + 440 \end{cases}$$

Il compito di costruire un programma o di definire la successione in un ambiente di manipolazione simbolica può anche essere portato a termine individualmente; in questo caso non è necessario che gli studenti lavorino in gruppo.

Di seguito si riporta il programma "farm" e la funzione "farmaco(n)"[2] costruiti per alcune calcolatrici programmabili grafico – tascabili che presentano un manipolatore simbolico simile a quello utilizzato da software ormai di diffusione relativamente vasta nelle scuole.

```
: farm( )                    (intestazione: nome programma)
:Prgm                        (indica che si tratta di un programma)
:Request "dammi n", n        (il sistema attende un input che inserisce nella cella di nome n)
: expr(n) →n                 (l'input n, preso come stringa, viene trasformato in dato numerico)
: 440 →far                   (si inizializza la variabile far)
: For i, 1, n, 1             (inizio ciclo for, con i che va da 1 a n, passo 1)
: 0.4 * far + 440 → far      (aggiornamento dei valori della successione inseriti in far)
: EndFor                     (fine ciclo for)
: Disp far                   (viene visualizzato il contenuto di far)
: EndPrgm                    (fine programma)
```

```
: farmaco(n)                 (intestazione: nome funzione)
: Func                       (indica che si tratta di una funzione)
: if n = 0                   (se n = 0
: Return 440                 (restituisce il valore 440)
: if n > 0                   (se n > 0
: Return 0.4*farmaco(n-1)+440   restituisce il valore indicato)
: EndFunc                    (fine funzione)
```

L'insegnante può discutere con gli studenti sulla convenienza o meno di utilizzare un programma o una funzione per calcolare i valori della successione. Soprattutto, però, dovrebbe cercare di dare una risposta a una domanda che emerge in modo naturale quando si paragonano i tempi di calcolo impiegati per computare i valori della successione utilizzando la funzione e il programma. Perché con la funzione sopra definita si riesce a computare un numero sensibilmente inferiore di valori rispetto a quanto consente il programma?

La risposta a questa domanda è un'occasione per far capire le sensibili differenze che, dal punto di vista computazionale, esistono tra la ricorsione e l'iterazione.

Si può iniziare suggerendo che il programma, per come è stato definito, calcola i valori della successione in modo analogo (anche se molto più velocemente e con maggiore affidabilità) a quanto si fa con il calcolo con carta e penna. Infatti a partire dal dato $F(1) = 440$, si calcola $F(2)$ utilizzando la legge $F(n) = 0{,}4{*}F(n\text{-}1) + 440$; poi si calcola $F(3)$ utilizzando il dato F(2) appena ottenuto e la stessa legge di prima e così via. A ogni passo è necessario tenere in memoria solamente la legge e il dato precedente; nient'altro.

[2] In genere le calcolatrici grafico – simboliche hanno già funzioni predefinite che consentono il calcolo dei valori di una successione per iterazione, ma si ritiene preferibile, in un primo momento, far costruire dagli studenti un programma e una funzione che consentano di effettuare automaticamente tale calcolo. In seguito è possibile indicare loro come utilizzare eventuali funzioni predefinite del software utilizzato.

Invece la ricorsione richiede una disponibilità di memoria molto maggiore. Che cosa vuol dire, infatti, calcolare $F(4)$ utilizzando la funzione sopra definita?
$F(4) = 0{,}4^* F(3) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(3)$)
$F(3) = 0{,}4^* F(2) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(2)$)
$F(2) = 0{,}4^* F(1) + 440$ (questo deve essere tenuto in memoria; intanto si passa al calcolo di $F(1)$)
$F(1) = 0{,}4^* F(0) + 440$
Poiché $F(0) = 440$ si può tornare indietro, calcolando, in successione, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$ e, finalmente, $F(4)$, svuotando progressivamente la memoria. Risulta evidente che un tale processo richiede un impegno di risorse di memoria che diventa presto rilevante con il crescere di n.
L'insegnante può anche far notare che il problema del computo dei valori può essere brillantemente risolto con un foglio elettronico. Per esempio, con un foglio elettronico in genere disponibile nelle scuole, la formula che genera i successivi valori della successione nella colonna A può essere costruita inserendo 440 in A1 e inserendo in A2 la formula =0,4*A1+440, quindi copiando tale formula nel numero di celle voluto.

Terza fase
L'insegnante può ora proporre un quesito più semplice del precedente; si suggerisce di far lavorare gli studenti individualmente e non a gruppi, per vedere non solo se sono in grado di mettere in pratica l'esperienza acquisita nella precedente attività, ma anche se riescono ad attivare strategie risolutive che risultano più appropriate per rispondere alle seguenti domande:

Come evolve la presenza del farmaco se, dopo dieci giorni, la studentessa non lo assume più?[3] Quanto tempo impiega a ridursi a 1/100 del farmaco presente dopo dieci giorni?

Ci si può attendere che molti studenti, anche a causa dell'attività appena svolta, definiscano una nuova successione per ricorrenza

$$\begin{cases} G(0) = 733 \\ G(n) = 0{,}4 \cdot G(n-1) \end{cases}$$

senza accorgersi che, in tal caso, è più semplice o, almeno, più efficace trovare una forma chiusa come

$$G(n) = (0{,}4)^n \cdot 733$$

facilmente ottenibile con l'osservazione di come vengono calcolati, successivamente, $G(1)$, $G(2)$, $G(3)$, … a partire da $G(0)$. Tutti, però, dovrebbero accorgersi che, in tal caso, i valori della successione diminuiscono e diminuiscono sempre meno (il gesto di una mano che percorre una curva decrescente con concavità rivolta verso l'alto sarebbe sufficiente a verificare la comprensione degli studenti sulle caratteristiche più significative dell'evoluzione del fenomeno).
La formula $G(n) = (0{,}4)^n \cdot 733$ consente di rispondere all'ultima domanda risolvendo l'equazione

$$7{,}33 = (0.4)^n \; 733$$

La soluzione può essere cercata per tentativi o anche graficamente (lavorando nel continuo, con la funzione $y = (0.4)^x$ con x variabile reale). Si ritiene preferibile una risoluzione per tentativi (che metta in gioco esplicitamente il concetto di soluzione di un'equazione) o grafica (che richiede eventuali cambi di scala, uso di finestre grafiche adeguate), seguita eventualmente da una soluzione che utilizzi i logaritmi. E' importante che l'uso dei logaritmi non sia meccanico, o inconsapevole; in questo caso la soluzione di un'equazione esponenziale può essere ben motivata.

Quarta fase
L'insegnante, prendendo come spunto la risoluzione del precedente problema (determinare dopo quanto tempo il farmaco presente nel corpo si riduce a circa 7,33 mg, partendo da un valore di 733

[3] Si suppone che tutti gli studenti abbiano calcolato il valore della quantità di farmaco presente dopo 10 giorni, ossia, circa 733 mg.

mg) potrebbe chiedere agli studenti di cercare di determinare una dipendenza esplicita da n anche nel caso della legge

$$\begin{cases} F(0) = 440 \\ F(n) = 0,4 \cdot F(n-1) + 440 \end{cases}$$

È possibile giustificare questa richiesta discutendo i vantaggi di una formula che dà $F(n)$ esplicitamente in funzione di n, rispetto a una funzione definita per ricorrenza.
Il lavoro dovrebbe essere svolto nuovamente in piccoli gruppi, e l'insegnante osserverà e valuterà la capacità di organizzare i dati che i ragazzi dovrebbero avere acquisito con le precedenti attività. Organizzando i dati nel seguente modo:
$F(0) = 440$
$F(1) = 0,4*F(0) + F(0)$
$F(2) = 0,4*F(1) + F(0) = 0,4* (0,4*F(0) + F(0)) + F(0) = 0,4^2 *F(0) + 0,4 * F(0) + F(0)$
$F(3) = 0,4*F(2) + F(0) = 0,4 * (0,4^2 *F(0) + 0,4 * F(0) + F(0)) + F(0) = 0,4^3 *F(0) + 0,4^2 * F(0) + 0,4 * F(0) + F(0)$
È possibile congetturare che si ha
$F(n) = F(0) *(0,4^n + 0,4^{n-1} + 0,4^{n-2} + ...+ 0,4 + 1)$
Il problema diventa quindi quello di determinare la somma $\sum_{i=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^i$.
L'insegnante farà notare che, detta s la somma $0,4^n + 0,4^{n-1} + 0,4^{n-2} + ...+ 0,4 + 1$, si ha che

$0,4*s = 0,4^{n+1} + s - 1$. Ciò equivale a dire che $s = \dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

La legge che lega esplicitamente F(n) a n è quindi
$F(n) = 440 \quad * \quad \frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right)$

<u>Quinta fase</u>
L'insegnante può far notare che il fenomeno preso in considerazione dipende da alcuni parametri:
- il farmaco presente nel sangue all'istante 0, diciamo a;
- la percentuale di farmaco filtrata dai reni, diciamo b;
- la quantità che viene aggiunta a ogni somministrazione, diciamo c.

Ciò vuol dire che il problema precedente può essere generalizzato nel seguente modo:

$$\begin{cases} F(0) = a \\ F(n) = b * F(n-1) + c \end{cases}$$

Si può quindi assegnare ai gruppi di studenti il seguente problema:
Studiare come varia l'evoluzione della quantità di farmaco presente nel sangue quando si modificano i parametri significativi (si suggerisce di provare a modificare un parametro alla volta, tenendo costanti gli altri due).

È interessante osservare se il lavoro degli studenti avviene a livello puramente sperimentale o se, invece, vengono tenute presenti tutte le conoscenze già acquisite. Per esempio, studenti che riuscissero a capire che la legge generale che esprime la dipendenza esplicita di F(n) è del tipo

$$F(n) = b^n a + \frac{1-b^n}{1-b}$$

probabilmente risolverebbero il problema proposto in breve tempo, dimostrando, inoltre, buone abilità di produrre e utilizzare forme di pensiero analogico che, in matematica, sono assolutamente importanti.

Possibili sviluppi:

- Dimostrazioni, per induzione, di alcune congetture avanzate dagli studenti o suggerite dall'insegnante.
- Approfondimenti sul problema delle approssimazioni e del controllo del risultato di calcoli in cui si fa sistematico uso di approssimazioni.
- Il problema delle somme infinite: come valutare la convergenza e, nel caso in cui la somma converga, quali tecniche possono essere utilizzate per determinare la somma di infiniti termini (eventualmente con l'aiuto di calcolatrici grafico – simboliche).
- Le differenze finite per trovare la legge con cui è stata generata una successione di numeri (nel caso di leggi polinomiali o nel caso di leggi esponenziali).
- Critica sulle potenzialità e i limiti del modello, anche con considerazioni di carattere chimico – biologico.
- Effetti delle droghe e dell'alcool sull'organismo (in collaborazione, almeno, con l'insegnante di scienze e chimica).
-

Elementi di prove di verifica

1. Ricerca della legge

La seguente tabella descrive l'andamento di una grandezza *B* in funzione di una grandezza *A*. Nella prima colonna sono riportati alcuni valori della variabile indipendente (*A*); nella seconda colonna i valori corrispondenti della variabile dipendente *B*. Nella terza colonna sono riportate le differenze fra i successivi valori assunti dalla variabile dipendente (*B*2- *B*1, *B*3- *B*2, *B*4- *B*3 … e così via). Nella quarta e ultima colonna, infine, sono riportate le differenze seconde, ossia le differenze dei valori presenti nella terza colonna (*C*3-*C*2, *C*4-*C*3, *C*5-*C*4 … e così via). Cerca di tracciare uno schizzo dell'andamento del grafico della funzione $B = f(A)$, spiegando le strategie che hai utilizzato.

A	*B*	*C*	*D*
0	0		
0,3	-0,51	-0,51	
0,6	-0,84	-0,33	0,18
0,9	-0,99	-0,15	0,18
1,2	-0,96	0,03	0,18
1,5	-0,75	0,21	0,18
1,8	-0,36	0,39	0,18
2,1	0,21	0,57	0,18
2,4	0,96	0,75	0,18
2,7	1,89	0,93	0,18
3	3	1,11	0,18
3,3	4,29	1,29	0,18
3,6	5,76	1,47	0,18
3,9	7,41	1,65	0,18
4,2	9,24	1,83	0,18
4,5	11,25	2,01	0,18
4,8	13,44	2,19	0,18

Tabella 4

2. La palla che rimbalza

Una palla magica viene lasciata cadere da un'altezza h. Supponendo che la palla perda il 15% dell'energia a ogni urto con il terreno, studiare l'evoluzione dell'altezza della palla dal suolo all'aumentare del numero di urti, determinando una legge analitica che rappresenti la variazione dell'altezza della palla dal suolo. Come sarebbe il grafico dell'altezza della pallina dal suolo al variare del tempo? C'è qualche relazione tra i due grafici appena descritti?

3. Pesci in una riserva di pesca

All'inizio di un'osservazione in una riserva di pesca sono presenti 2000 pesci. Supponendo che il numero dei pesci diminuisca ogni anno, per varie cause (la pesca, morte naturale ecc.), del 30% e che alla fine di ogni anno la riserva venga ripopolata con 1500 pesci, quale sarà l'evoluzione del numero di pesci presenti nello stagno se le ipotesi fatte rimangono costantemente valide?
Come varia l'evoluzione del fenomeno al variare dei parametri significativi?

4. Decadimento radioattivo

Supponiamo di studiare la disintegrazione di una massa di materiale radioattivo. Sia t il tempo misurato a partire da quando si inizia a studiare il fenomeno e sia $m = m(t)$ la massa che al tempo t non si è disintegrata. Supponiamo che la velocità di disintegrazione sia proporzionale, in ogni istante, alla massa $m(t)$ non ancora disintegratasi. Come evolverà la massa $m(t)$? Dopo aver prodotto qualche congettura di tipo qualitativo, provate a fare qualche ipotesi quantitativa (per esempio potreste ipotizzare che in ogni unità di tempo si disintegri, mediamente, il 5% della massa) e verificate la risposta data in precedenza aiutandovi con le calcolatrici.

5. Una successione di quadrati

La seguente figura indica una costruzione che parte dal quadrato di vertici $A_1B_1C_1D_1$ e prosegue all'infinito considerando i punti medi di ciascun lato di ogni nuovo quadrato.

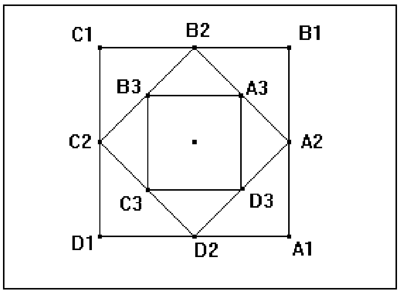

Figura 1

Descrivi la costruzione del secondo quadrato $A_2B_2C_2D_2$; descrivi la costruzione del quadrato generico, motivandola.
Assegnata la misura del lato del quadrato iniziale, ad esempio 1, come varia il lato del quadrato quando si procede a costruzioni successive? Qual è il rapporto tra un lato e il lato del quadrato successivo? Come varia l'area del quadrato? Qual è il rapporto tra un'area e la successiva?
Considera la somma delle aree dei quadrati, a partire dal primo quadrato assegnato aggiungendo le aree dei quadrati via via ottenuti. Come varia questa somma? A quale limite tende quando il numero dei quadrati tende all'infinito?