

Ognuno cresce a modo suo
Riadattata da "Matematica 2003"
A cura di Marina Dalè, Paolo Nardini, Riccardo Ruganti, Luigi Tomasi

Riferimenti curriculari	2
Indicazioni curriculari	2
Prove INVALSI	3
Descrizione dell'attività	7
Prima fase	8
Seconda fase	9
Terza fase	10
Indicazioni metodologiche	10
Spunti per un approfondimento disciplinare	11
Elementi per prove di verifica	15
Spunti per altre attività con gli studenti	18
Bibliografia	19
Sitografia	20
Proposta di attività	20

Introduzione

Il contesto dell'attività è quello della geometria, con particolare attenzione allo studio della variazione di aree e volumi di semplici figure geometriche, in funzione della variazione di una delle grandezze significative in gioco.

È opportuno, infatti, affrontare fin dal biennio della scuola secondaria di II grado situazioni problematiche che coinvolgono funzioni matematiche elementari.

In questa attività ci si serve di strumenti tecnologici, come ad esempio un foglio elettronico, una calcolatrice grafico-simbolica, un software di geometria dinamica, che consentono diversi tipi di rappresentazione dei dati a disposizione (numerica, algebrica, grafica), creando collegamenti significativi all'interno dello stesso concetto matematico. Ulteriori vantaggi nell'uso degli strumenti utilizzati si ritrovano nella possibilità di amplificare e riunificare alcuni aspetti del processo di insegnamento-apprendimento e nel permettere agli studenti di sperimentare collegamenti tra diversi ambiti del curriculum di matematica.

Riferimenti curriculari

Indicazioni curriculari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 57 del 15/07/2010, Direttiva n. 65 del 09/07/2010) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni Nazionali per i Licei

Linee Guida per gli Istituti Tecnici e per gli Istituti Professionali

I biennio

Linguaggio delle funzioni per costruire semplici rappresentazioni di fenomeni e come primo passo all'introduzione del concetto di modello matematico.

Passare agevolmente da un registro di rappresentazione a un altro (numerico, grafico, funzionale).

Funzioni di vario tipo (lineari, quadratiche, circolari, di proporzionalità diretta e inversa).

Rappresentazione grafica delle funzioni. Risolvere problemi che implicano l'uso di funzioni, anche per via grafica, collegati con altre discipline e situazioni di vita ordinaria, come primo passo verso la modellizzazione matematica.

Prove INVALSI

a.s. 2012/2013 - Domanda D7

Scuola secondaria di II grado - Classe II

D7. Considera un quadrato di lato a .

a. Se si aumenta il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b . Quale delle seguenti espressioni rappresenta la misura di b ?

- A. ☐ $20 a$
- B. ☐ $1,20 a$
- C. ☐ $a + 20$
- D. ☐ $a + 0,20$

b. Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a ?

- A. ☐ Del 20%
- B. ☐ Del 40%
- C. ☐ Del 44%
- D. ☐ Del 120%

Soluzione INVALSI:

D7_a: B

D7_b: C

Commento

L'item a) ha l'obiettivo di testare se gli studenti sono in grado di calcolare un aumento percentuale.

Gli studenti che sono in grado di utilizzare un modello moltiplicativo (aumentare del 20% equivale a moltiplicare per 1,2) sono sicuramente avvantaggiati per trovare velocemente la risposta corretta.

L'item b) presenta un livello di difficoltà più elevato. È necessario che gli studenti sappiano valutare come si ripercuote l'incremento percentuale di una misura lineare sul quadrato di quella misura.

Naturalmente, se hanno risposto correttamente all'item a), possono anche determinare l'area del quadrato di lato 1, poi l'area del quadrato di lato 1,2 e, infine, notare che l'area passa da 1 a 1,44 e quindi aumenta del 44%.

In definitiva, un aumento lineare del 20% diventa un aumento dell'area del 44%. Questa richiesta del quesito ben si inquadra in questa attività (ognuno cresce a modo suo) e costituisce una competenza di base degli studenti.

a.s. 2012/2013 - Domanda D9

Scuola secondaria di II grado - Classe II

- D9.** Su una risma di carta di fogli di formato A4 è scritto:
80 g/m² (cioè 80 grammi al metro quadrato);
A4 210 × 297 mm (cioè le dimensioni di un foglio A4 sono 0,210 metri per 0,297 metri).

Un foglio A4 è all'incirca

- A. ☐ 0,5 grammi
B. ☐ 1,5 grammi
C. ☐ 5 grammi
D. ☐ 10 grammi

Soluzione INVALSI: C

Commento

La domanda richiede la stima di una massa. È possibile che gli studenti possano escludere le opzioni A e D, ma difficilmente l'esperienza che hanno con i fogli formato A4 è tale da consentire loro di escludere il valore 1,5 g.

Gli studenti devono quindi effettuare calcoli che consentano loro di determinare la massa di un foglio A4 a partire dalle informazioni fornite sulla risma. Per esempio, possono determinare l'area in m² di un foglio formato A4 e poi moltiplicare il valore ottenuto per 80, ottenendo, infine, la massa in grammi di un foglio formato A4.

Area di un foglio A4 (in m²) = 0,06237.

Massa in grammi di un foglio A4: $80 \times 0,06237 = 4,9896$, cioè circa 5 g.

Il quesito costringe a lavorare sulle conversioni tra unità di misura e a ragionare sulla massa di un oggetto comune, come un foglio di carta di formato A4. Si usa il concetto di superficie in un contesto concreto per fare una stima.

a.s. 2012/2013 - Domanda D26

Scuola secondaria di II grado - Classe II

D26. Una sorgente luminosa puntiforme è posta nel vuoto. I è l'intensità luminosa misurata a una distanza r dalla sorgente. Il prodotto fra l'intensità luminosa I e il quadrato della distanza r dalla sorgente è uguale a una costante k .

a. Quale fra le seguenti formule esprime la relazione tra I e r ?

- A. ☐ $\frac{I}{r^2} = k$
- B. ☐ $\left(\frac{I}{r}\right)^2 = k$
- C. ☐ $I \cdot r^2 = k$
- D. ☐ $(I \cdot r)^2 = k$

b. Se la distanza r raddoppia, allora l'intensità luminosa I

- A. ☐ diventa il doppio
- B. ☐ diventa la metà
- C. ☐ diventa il quadruplo
- D. ☐ diventa un quarto

Soluzione INVALSI:

D26_a: C

D26_b: D

Commento

Il primo item (a) richiede una competenza di conversione dal registro della lingua naturale nel linguaggio simbolico, riconoscendo, fra diverse formule, quella che rappresenta una relazione espressa nel linguaggio naturale.

Il secondo item (b) va a testare la competenza degli studenti di riconoscere che in una funzione del tipo $f(x) = k/x^2$ si ha che $f(2x) = f(x)/4$, cioè di una proporzionalità quadratica inversa.

Gli studenti che hanno affrontato questa attività hanno lavorato con dipendenze lineari, quadratiche e cubiche. Qui si trattava di saper operare con una dipendenza quadratica inversa, fondamentale in molte applicazioni.

a.s. 2011/2012 - Domanda D10
Scuola secondaria di II grado - Classe II

D10. Con "spazio di frenata" intendiamo lo spazio che un'auto percorre dall'inizio della frenata fino a quando si ferma.

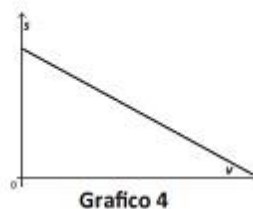
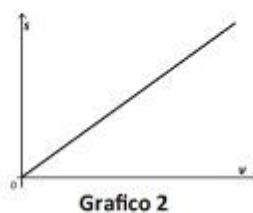
Una regola pratica per stimare lo spazio di frenata (in metri), nel caso in cui l'auto viaggi su una strada asfaltata in buone condizioni e non bagnata, è la seguente:

"Eleva al quadrato il valore della velocità (in km/h) dell'auto all'inizio della frenata e dividi il risultato ottenuto per 200."

- a. Completa la tabella seguente, che fornisce lo spazio di frenata s (approssimato per eccesso al metro) per alcuni valori della velocità v quando la strada si trova nelle condizioni descritte sopra.

v (km/h)	s (approssimato per eccesso al metro)
40	8
50	13
60	
70	25
80	
90	
100	50

- b. Quale fra i seguenti grafici può rappresentare lo spazio di frenata s al variare della velocità v ?



- A. ☐ Il grafico 1
B. ☐ Il grafico 2
C. ☐ Il grafico 3
D. ☐ Il grafico 4

Soluzione INVALSI:

D10_a: Occorre completare la tabella come segue:

D10a - Risposta corretta:

v (km/h)	s (approssimato per eccesso al metro)
40	8
50	13
60	18
70	25
80	32
90	41
100	50

D10_b: A

Commento

L'item a. richiede che lo studente comprenda le istruzioni indicate nella frase riportata in corsivo tra virgolette e sappia tradurle operativamente per completare la tabella. Si tratta quindi di un problema di conversione dal registro di rappresentazione del linguaggio quotidiano scritto (le istruzioni fornite nel testo) al registro di rappresentazione numerico (il completamento della tabella).

La risposta all'item b. può essere data per esclusione: la relazione tra s e v non è lineare (s è legato al quadrato della velocità e, in ogni caso, anche la tabella mostra immediatamente che le differenze prime tra i successivi spazi di frenata non sono costanti), né può essere decrescente (s aumenta all'aumentare della velocità: lo dice esplicitamente la tabella).

In questo quesito occorre riconoscere una funzione quadratica, un'abilità fondamentale nello studio di molte relazioni presenti nelle scienze sperimentali e in economia. Questa dipendenza viene proposta in modo molto efficace da questa attività (Ognuno cresce a modo suo).

Descrizione dell'attività

In questa attività si pone l'accento sui due diversi modi in cui gli allievi possono collegare tra loro le rappresentazioni consentite dallo strumento di cui si stanno servendo: un primo modo, che può essere denominato "*meccanico-algebrico*", in base al quale gli studenti combinano rapidamente la rappresentazione numerica o geometrica e quella grafica senza che sia presente necessariamente un pensiero del tutto organizzato; un secondo modo, più consapevole, in cui essi recuperano a pieno il significato primario dell'attività, ovvero la misura ed il confronto di alcune specifiche grandezze geometriche.

Gli studenti dovrebbero possibilmente aver già fatto pratica dell'uso di un software di geometria dinamica, del foglio elettronico, delle calcolatrici grafico-simboliche, oltre che degli usuali strumenti di cui ci si può avvalere in classe, come la carta millimetrata, la riga ed il compasso. Inoltre l'insegnante deve essere consapevole della

necessità di mantenere una stretta interrelazione a livello concettuale tra le rappresentazioni grafiche ottenute e le funzioni matematiche che modellizzano il fenomeno analizzato.

Prima fase

L'insegnante propone alla classe la seguente situazione-problema, che riguarda tre famiglie (infinite) di rettangoli (indicate rispettivamente con le lettere A, B e C), di ciascuna delle quali sono qui di seguito rappresentati i primi tre componenti (Figura 1).

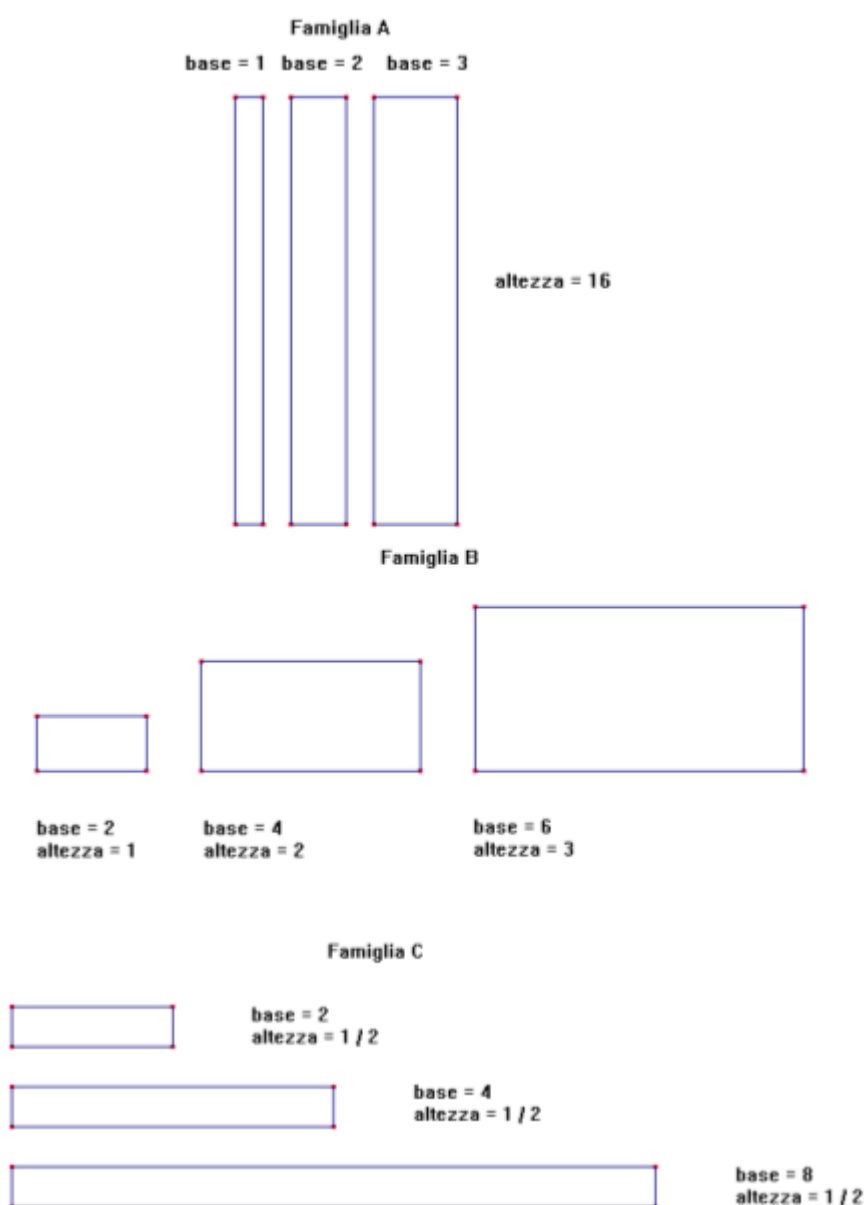


Figura 1

Come si vede, nella famiglia A la base dei rettangoli, partendo dal valore iniziale 1, cresce di un'unità ogni volta, mentre l'altezza si mantiene costante (in particolare, rimane uguale a 16 unità).

Nella famiglia B l'altezza cresce di un'unità ogni volta, partendo dal valore iniziale 1, e la base si mantiene sempre doppia dell'altezza.

Nella famiglia C la base dei rettangoli raddoppia ogni volta, partendo dal valore iniziale 2, mentre l'altezza si mantiene costante (in particolare, rimane uguale a $1/2$).

A questo punto l'insegnante suddivide la classe in piccoli gruppi e propone la seguente consegna.

1. Disegnate su carta quadrettata alcuni esempi di rettangoli che appartengono alle tre famiglie assegnate.
2. Analizzate le variazioni delle aree dei rettangoli di ognuna delle tre famiglie, annotando le vostre osservazioni e considerando anche altri rettangoli che crescono nello stesso modo di ognuno dei tre casi considerati.
3. A questo punto rappresentate i valori delle aree dei rettangoli delle tre famiglie, organizzando i dati numerici nel modo che ritenete più opportuno in ognuno dei casi proposti. Osservando i valori ottenuti, indicate come variano in relazione ai dati iniziali.

Trascrivete le vostre congetture, esplicitando i fatti sui quali si basano e spiegando come avete utilizzato gli strumenti a vostra disposizione.

Successivamente ponete l'attenzione sui valori delle aree dei rettangoli delle tre famiglie: può darsi che l'area di un rettangolo della famiglia A (oppure della famiglia B, oppure della famiglia C) superi quella di un rettangolo di ciascuna delle altre due famiglie. Anche in questo caso scrivete le vostre osservazioni e congetture.

Seconda fase

L'insegnante discute con la classe le congetture formulate dai vari gruppi di lavoro e le strategie di analisi che sono state adottate.

Partendo dai particolari esempi numerici considerati, l'insegnante deve riuscire ad orientare la discussione, guidando gli studenti verso l'individuazione di tre diverse modalità elementari di dipendenza funzionale (ovvero la dipendenza lineare, la dipendenza quadratica, la dipendenza esponenziale), che vengono modellizzate mediante le specifiche leggi matematiche, cui vengono associati i rispettivi grafici.

Nota didattica

Si può osservare che nei casi delle famiglie A e B la variabile "naturale" da prendere in considerazione è la lunghezza della base dei rettangoli. Al contrario, nel caso della famiglia di rettangoli C, lo studente - proprio grazie all'uso delle tecnologie - può rendersi conto del fatto che la variabile indipendente è in realtà il "posto" che ogni figura occupa nella sequenza delle figure considerate, posto che si può indicare con un numero naturale ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Terza fase

Adesso l'insegnante propone alla classe un nuovo problema, con la duplice finalità di reinvestire e consolidare quanto in precedenza appreso e di descrivere un'ulteriore tipologia di dipendenza funzionale (ovvero la dipendenza cubica).

Considerate un cubo, il cui spigolo misura a .

Se raddoppiate, triplicate o dimezzate la lunghezza dello spigolo, cosa pensate che accada

1. alla somma delle lunghezze di tutti gli spigoli?
2. alla somma delle aree di tutte le facce?
3. al volume del cubo?

Sostenete le vostre affermazioni, aiutandovi con opportuni disegni.

Esprimate quindi, in funzione della misura a dello spigolo, la somma delle lunghezze di tutti gli spigoli, la somma delle aree di tutte le facce ed il volume del cubo.

Quali espressioni algebriche ottenete?

A vostro parere, i valori delle grandezze che avete calcolato crescono nello stesso modo al crescere della misura a dello spigolo del cubo? Per rispondere aiutatevi con una tabella, costruita ad esempio con un foglio elettronico.

Indicazioni metodologiche

Si riportano di seguito alcune riflessioni didattiche, ricavate dalle esperienze svolte in classe, che hanno evidenziato l'emergere di situazioni problematiche durante le prime due fasi dell'attività.

In particolare, si può prevedere che prevalga una strategia di puro calcolo aritmetico delle aree, eventualmente con l'uso del foglio elettronico, senza che gli studenti riescano a "condensare" il fenomeno della crescita delle aree dei rettangoli mediante opportune leggi algebriche che esprimano una certa dipendenza funzionale tra specifiche variabili.

L'insegnante ha allora il compito di spingere gli allievi alla riflessione corale sulle eventuali regolarità che si possono intravedere all'interno dei dati numerici raccolti, guidandoli verso una corretta formalizzazione algebrica, condivisa, della variazione delle aree considerate.

Normalmente gli studenti riescono a riconoscere come stanno le cose, ovvero che in un unico caso i tre rettangoli (uno per ogni famiglia) hanno la stessa area e che in seguito i valori delle aree dei rettangoli della famiglia C si distaccano da quelli relativi ai rettangoli della famiglia A, mentre i valori delle aree dei rettangoli della famiglia B rimangono intermedi fra i precedenti.

Il risultato ottenuto è in contrasto, però, con ciò che si può intuitivamente supporre alla luce dei primi eventuali calcoli a mente, ovvero che siano le aree dei rettangoli della famiglia A oppure le aree dei rettangoli della famiglia B a crescere più velocemente all'aumentare delle dimensioni.

Vale la pena ribadire che l'interazione con lo strumento informatico svolge in questa situazione un ruolo significativo per convincere gli studenti della differenza sostanziale (matematicamente parlando) fra i diversi modelli di crescita presentati.

Spunti per un approfondimento disciplinare

Si propongono di seguito alcuni argomenti da approfondire con gli studenti, laddove ci siano le condizioni favorevoli per poterli trattare.

Cambiamenti di scala

Estendendo il discorso sulle misure in geometria, poniamo la seguente questione:

- se due solidi hanno lo stesso volume, hanno anche superfici di uguale area?

È facile rendersi conto che la risposta è negativa.

Consideriamo, ad esempio, un cubo di plastilina di spigolo 1 dm (quindi di volume pari a 1 dm³ e di superficie pari a 6 dm²) ed immaginiamo di dargli una forma sferica. Se R diventa il suo raggio, poiché il volume della plastilina resta 1 dm³, si può

scrivere: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 1$, quindi $R^3 = \frac{3}{4\pi}$, da cui $R = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} = 0,62$ dm.

La superficie di questa sfera ha area $S = 4\pi R^2 = 4,83$ dm², che è inferiore a quella del cubo.

Questo esempio numerico può aiutarci a comprendere il seguente enunciato generale: *"comunque si deformi una sfera di materiale modellabile plasticamente (in modo tale che il suo volume resti inalterato), la sua superficie aumenta"*.

All'affermazione del punto precedente si può dare un enunciato diverso:

Tra tutti i solidi che hanno un determinato volume, la sfera è quello avente la superficie di area minima.

La superficie di un solido cresce in generale come il *quadrato* delle sue dimensioni, mentre il suo volume cresce come il *cubo* delle dimensioni.

In simboli si scrive: $S \propto D^2$, $V \propto D^3$.

Ciò significa che, se si raddoppiano le dimensioni di un oggetto conservandone la forma, l'area della superficie diventa quadrupla, mentre il volume diventa 8 volte il volume iniziale. Questa osservazione ha interessanti conseguenze, come fa notare Galileo Galilei (1564-1642) nella sua opera *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, pubblicata nel 1638, e riguarda *l'impossibilità dell'esistenza dei giganti*.

L'argomentazione di Galileo, in sostanza, è la seguente:

- La resistenza di un pilastro è direttamente proporzionale all'area della sua sezione trasversale, quindi al quadrato del suo diametro. Si tratta di un'osservazione avente una giustificazione teorica, oltre che empirica; infatti, raddoppiando il diametro di un pilastro, l'area della sua sezione trasversale si quadruplica, per cui equivale a quattro pilastri posti l'uno accanto all'altro.
- Il peso di un corpo è direttamente proporzionale al suo volume, quindi al cubo delle dimensioni lineari.

- c. Supponiamo che un gigante sia alto 10 volte una persona normale, pur conservando la stessa forma. Allora, l'area della sezione trasversale delle sue ossa risulta ingrandita di 100 volte, perciò risulta centuplicata anche la loro resistenza. Ma il volume, quindi il peso del gigante, risulta di ben 1000 volte maggiore rispetto a quello di un uomo normale.
- d. Di conseguenza, la resistenza delle ossa non è sufficiente a sopportare un peso così grande. (Infatti noi non siamo in grado di sostenere un peso 10 volte maggiore di quello del nostro corpo!).

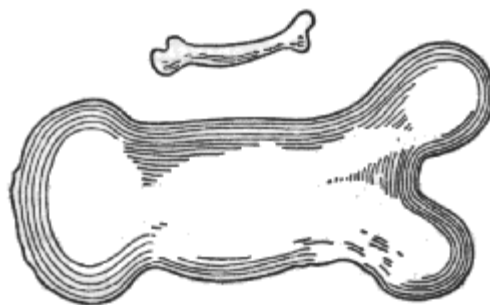
Il discorso di Galileo è accompagnato da un disegno che mette a confronto un osso (di cane) con un altro di lunghezza tripla (di cavallo). Se si vuole che la resistenza allo sforzo dell'osso maggiore sia tale da sostenere il corrispondente aumento di peso non basta un aumento del diametro di 3 volte: la resistenza aumenterebbe solamente di $3^2=9$ volte, mentre il peso aumenterebbe di $3^3=27$ volte. Per questo motivo, l'osso del cavallo deve essere più tozzo rispetto a quello del cane. Ed in effetti la natura ha provveduto in questo senso, tramite la selezione naturale.

Galileo si esprime come possiamo leggere qui di seguito.

"Or vegghino come dalle cose sin qui dimostrate apertamente si raccoglie l'impossibilità del poter non solamente l'arte, ma la natura stessa, crescer le sue macchine a vastità immensa: sì che impossibil sarebbe fabbricar navilii, palazzi o templi vastissimi, li cui remi, antenne, travamenti, catene di ferro, ed in somma le altre lor parti, consistessero¹; come anco non potrebbe la natura far alberi di smisurata grandezza, poiché i rami loro, gravati dal proprio peso, finalmente si fiaccherebbero; e parimente sarebbe impossibile far strutture di ossa per uomini, cavalli o altri animali, che potessero sussistere e far proporzionatamente gli uffizii² loro, mentre³ tali animali si dovessero agumentare⁴ ad altezze immense, se già non si togliesse⁵ materia molto più dura e resistente della consueta, o non si deformassero tali ossi, sproporzionatamente ingrossandogli, onde poi la figura ed aspetto dell'animale ne riuscisse mostruosamente grosso: il che forse fu avvertito dal mio accortissimo Poeta⁶, mentre descrivendo un grandissimo gigante disse:

*Non si può compatir quanto sia lungo,
Sì smisuratamente è tutto grosso.*

E per un breve esempio di questo che dico, disegnai già la figura di un osso allungato solamente tre volte, ed ingrossato con tal proporzione, che potesse nel suo animale grande far l'uffizio proporzionato a quel dell'osso minore nell'animal più piccolo, e le figure son queste:



dove vedete sproporzionata figura che diviene quella dell'osso ingrandito⁷. Dal che è manifesto, che chi volesse mantener in un vastissimo gigante le proporzioni che hanno le membra in un uomo ordinario, bisognerebbe o trovar materia molto più dura e resistente, per formarne l'ossa, o vero ammettere che la robustezza sua fusse a proporzione assai più fiacca che ne gli uomini di statura mediocre; altrimenti, crescendogli a smisurata altezza, si vedrebbero dal proprio peso opprimere e cadere. Dove che, all'incontro, si vede, nel diminuire i corpi non si diminuir con la medesima proporzione le forze, anzi ne i minimi crescer la gagliardia con proporzion maggiore: onde io credo che un piccolo cane porterebbe addosso due o tre cani eguali a sé, ma non penso già che un cavallo portasse né anco un solo cavallo, a se stesso eguale."

Note

1 - consistessero: stessero insieme.

2 - gli uffizii: i ruoli, i compiti.

3 - mentre: nel caso in cui.

4 - agumentare: aumentare.

5 - togliesse: prendesse.

6 - Ludovico Ariosto, *Orlando Furioso*, Canto XVII.

7 - Mentre il rapporto delle lunghezze è 3, quello delle larghezze è 7. Galileo non specifica di quale animale si tratti.

Citazione tratta da: "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali"

https://it.wikisource.org/wiki/Discorsi_e_dimostrazioni_matematiche_intorno_a_due_nuove_sienze

Vediamo ora alcuni problemi che sorgono quando si fanno *riduzioni di scala*.

Se una persona fa il bagno, quando esce dalla vasca ha la pelle ricoperta da un sottile strato d'acqua di spessore 0,5 mm circa. La quantità d'acqua che aderisce al corpo è direttamente proporzionale alla superficie dell'epidermide, cioè al quadrato delle dimensioni del corpo stesso: *quantità d'acqua* $\propto D^2$, dove D può indicare la statura o la larghezza delle spalle o la lunghezza delle braccia, ecc. Questo significa semplicemente che un uomo alto la metà di un altro porta sulla pelle una quantità d'acqua che è la quarta parte. Un ipotetico omino alto 1/10 di una persona normale porterebbe sulla pelle una quantità d'acqua pari a 1/100. Supponendo che una persona normale porti sulla pelle qualche ettogrammo d'acqua, l'omino ne avrebbe la centesima parte, cioè qualche grammo.

Ma la massa del suo corpo sarebbe $(1/10)^3 = 1$ millesimo della massa normale (circa 70 kg), quindi 70 g. Ora, qualche grammo d'acqua rispetto a 70 g non è una quantità trascurabile: equivale a portare un pesante cappotto. Per questo motivo, *se una mosca si bagna, la massa del suo corpo all'incirca raddoppia*, ed essa rimane prigioniera della goccia d'acqua.

Ma vi è un effetto ancora più importante che dipende dalle dimensioni. Un organismo vivente può essere paragonato a una macchina che riceve combustibile sotto forma di cibo, lo brucia e perde parte del calore prodotto attraverso l'epidermide (anche se non esclusivamente). La perdita di calore dipende da vari fattori, in primo luogo dalla

temperatura del corpo e da quella dell'ambiente; ma, a parità di tutti gli altri fattori, la quantità di calore emessa in ogni secondo è direttamente proporzionale alla superficie dell'epidermide, quindi al quadrato delle dimensioni del corpo: *rapidità di perdita di calore* $\propto D^2$.

Per chiarire le idee, poniamo a confronto due vasi sferici di vetro, l'uno di diametro doppio dell'altro, contenenti acqua calda alla stessa temperatura. *L'area della superficie del primo è 4 volte quella del secondo*, quindi il primo perde calore con rapidità quadrupla. Dobbiamo dedurre che si raffredda più rapidamente? No, perché il primo vaso ha un *volume* $2^3 = 8$ *volte maggiore di quello del secondo*, perciò contiene una massa d'acqua da raffreddare 8 volte più grande: pertanto, resta caldo più a lungo.

Quanto esposto ci permette di comprendere per quale motivo il corpo di un animale piccolo tende a raffreddarsi più rapidamente di quello di un animale grande. Per contrastare questo effetto, l'animale più piccolo è costretto a rifornirsi di combustibile (cioè di cibo) più di frequente, al fine di compensare le enormi perdite di calore che si hanno attraverso l'epidermide. Queste vengono anche limitate dalla *presenza di pelliccia, di strati adiposi* sotto la pelle (i piccoli animali sono spesso pelosi e paffuti) e *dal letargo* nei periodi dell'anno in cui l'ambiente è più freddo, e più difficile risulta la ricerca del cibo.

Durante il letargo il metabolismo dell'animale è molto ridotto e la temperatura del suo corpo scende a valori notevolmente inferiori al normale. Comunque, al di sotto di certe dimensioni, per compensare le sole perdite di calore l'animale (a sangue caldo) dovrebbe alimentarsi senza sosta. *Questo è il motivo per cui non esistono animali a sangue caldo più piccoli di un topolino*: il toporagno è l'animale a sangue caldo più piccolo che si conosca.

(Testo tratto da: V. Zanetti, *La Fisica attorno a noi*, Zanichelli, Bologna 1989, pp. 26-29).

Decadimento radioattivo

Un fenomeno che si ripete con regolarità può essere usato per misurare degli intervalli di tempo, può diventare cioè un orologio.

Anche nel mondo degli atomi, e precisamente nel mondo dei nuclei atomici, ci sono dei fenomeni che avvengono con un certo tipo di regolarità, come ad esempio il decadimento radioattivo: nuclei di alcuni elementi si trasformano in altri elementi, emettendo particelle ed energia.

Ad esempio, il carbonio 14, ossia un nucleo formato da 6 protoni e da 8 neutroni, può trasformarsi in azoto 14, un elemento formato da 7 protoni e 7 neutroni. Questa trasformazione è accompagnata dalla emissione di una particella beta (un elettrone).

In simboli: ${}_6\text{C}^{14}_8 = {}_7\text{N}^{14}_7 + e^-$.

Quanto tempo debba trascorrere perché un determinato nucleo si trasformi non è possibile saperlo. È invece possibile calcolare la probabilità che un atomo di un certo elemento decada, ossia calcolare, per ogni elemento, la frazione di atomi che decadono ogni secondo. Ad esempio, se si hanno 100 nuclei di carbonio 14, dopo 5730 anni ne rimangono appena 50 e gli altri si sono trasformati in azoto 14.

Questo intervallo di tempo che permette di descrivere il decadimento radioattivo di una sostanza viene chiamato "tempo di dimezzamento" o "periodo di dimezzamento".

È un valore che risulta quasi completamente indipendente dalle condizioni fisiche e chimiche in cui si trova la sostanza, quali la temperatura, la combinazione chimica, ecc.

La maggior parte del carbonio presente in natura è del tipo C^{12} con 6 protoni e 6 neutroni. L'origine del carbonio C^{14} sta nel bombardamento dell'azoto presente nell'alta atmosfera da parte dei raggi cosmici (sono particelle dotate di alta energia che provengono dallo spazio cosmico).

In simboli: ${}_7N^{14}_7 + {}_0n^1_1 = {}_6C^{14}_8 + {}_1p^1_0$, ovvero un neutrone penetra in un nucleo di azoto e ne esce un protone.

Dal punto di vista chimico il carbonio 14 si comporta come il carbonio 12; può quindi dare origine ad una molecola di anidride carbonica CO_2 . Anche l'anidride carbonica radioattiva può prendere parte alle reazioni in cui è coinvolta l'anidride carbonica comune; in particolare può essere presente nel processo di fotosintesi clorofilliana e, attraverso questo, in tutta la materia vivente.

Quando, ad esempio, un albero muore, non assimila altro carbonio: da quel momento in poi la quantità di carbonio 14 contenuta nel legno comincia a diminuire perché gli atomi di carbonio 14 si trasformano in azoto. Per questo motivo il rapporto tra carbonio 14 e carbonio 12 per un reperto diminuisce con il tempo. Diventa così possibile valutare il tempo trascorso dopo che il reperto ha cessato di essere materia vivente.

(Testo tratto da: *La funzione esponenziale e logaritmica "per problemi"*, Mathesis - Sezione di Varese, pp. 35 – 37).

Elementi per prove di verifica

1. Una famiglia numerosa

I batteri si riproducono per divisione cellulare. Immagina allora di considerare una famiglia di batteri caratterizzata dal fatto che essi si dividono ogni secondo. Se all'inizio c'è un solo batterio, si può dire che all'istante iniziale $t = 0$ s si ha $n = 1$, essendo t l'istante di tempo ed n il numero di batteri presenti.

1. Supponendo che nessun batterio muoia, quanti batteri ci saranno nella nostra popolazione dopo 10 s?
2. Quanti batteri ci saranno dopo 100 s? Riporta i dati che hai a disposizione in una tabella e in un grafico.
3. Spiega a parole come faresti a calcolare il numero n dei batteri presenti dopo un numero qualsiasi h di secondi.
4. Scrivi una legge matematica generale che permetta di determinare come varia il numero n dei batteri presenti al variare del tempo t .

2. Datazioni di campioni radioattivi

Trova l'età di alcuni campioni che contengono ancora, rispettivamente, il 25%, il 10%, il 5% del carbonio 14 inizialmente presente.

Trova, analogamente, il periodo di dimezzamento del fosforo ^{32}P se, dopo 20 giorni, la quantità presente è il 37% di quella iniziale.

3. Variazioni del nostro corpo

Se la tua altezza e le altre dimensioni del tuo corpo raddoppiassero, valuta come cambierebbero:

1. la superficie della tua epidermide;
2. il volume del tuo corpo;
3. la massa del tuo corpo.

Come dovrebbe variare il diametro delle tue ossa per sostenere il tuo maggior peso corporeo?

(Esercizio tratto da V. Zanetti, *La Fisica attorno a noi*, Zanichelli, Bologna 1989, pag. 29)

4. Un piatto di risotto

Due piatti contengono uguali quantità di risotto. Nel primo piatto il risotto ha una forma compatta, nel secondo è distribuito su tutta la superficie del piatto. Spiega perché il secondo piatto si raffredda più rapidamente.

(Esercizio tratto da V. Zanetti, *La Fisica attorno a noi*, Zanichelli, Bologna 1989, pag. 29).

5. Una sfera appesa ad un filo

Si dispone di una pesante sfera di piombo e si trova che un filo di rame di diametro 0,1 mm è appena in grado di sostenerla. Quale dovrebbe essere il diametro del filo necessario per sostenere una sfera di piombo avente:

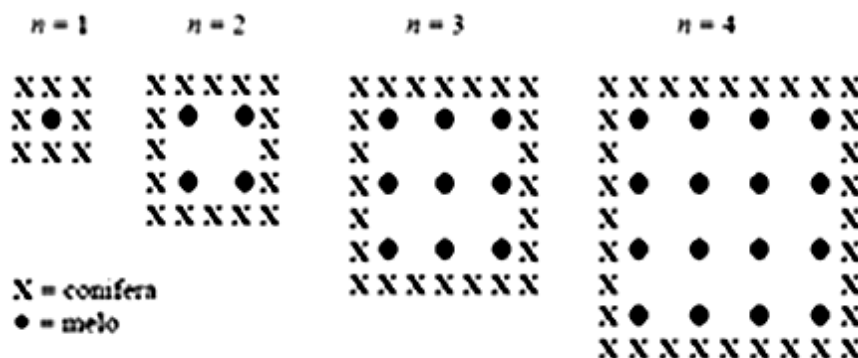
1. un volume 9 volte quello iniziale;
2. un diametro 9 volte quello iniziale?

(Esercizio tratto da V. Zanetti, *La Fisica attorno a noi*, Zanichelli, Bologna 1989, pag. 29).

6. Esempio di prova di valutazione finale tipo test OCSE-PISA – termine biennio scuola secondaria di II grado)

Un agricoltore pianta dei meli in modo da formare un quadrato. Per proteggere questi alberi dal vento, pianta delle conifere intorno al frutteto.

Qui sotto puoi vedere uno schema che rappresenta la disposizione dei meli e delle conifere per un numero qualsiasi (n) di filari di meli:



a. Completa la tabella:

n	Numero di meli	Numero di conifere
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

b. Con le due formule seguenti puoi calcolare il numero di meli e il numero di conifere della disposizione descritta prima:

Numero di meli = n^2

Numero di conifere = $8n$

Dove n è il numero di filari di meli.

Vi è un valore di n per cui il numero di meli è uguale al numero di conifere.

Trova il valore di n e mostra il metodo che hai usato per calcolarlo.

c. Supponi che l'agricoltore voglia ingrandire il frutteto con molti filari di alberi. Man mano che l'agricoltore ingrandisce il frutteto, che cosa aumenta più velocemente: il numero di meli o il numero di conifere? Spiega come hai trovato la risposta.

7. Esempio di prova di valutazione finale tipo test PISA – termine biennio scuola secondaria di II grado)

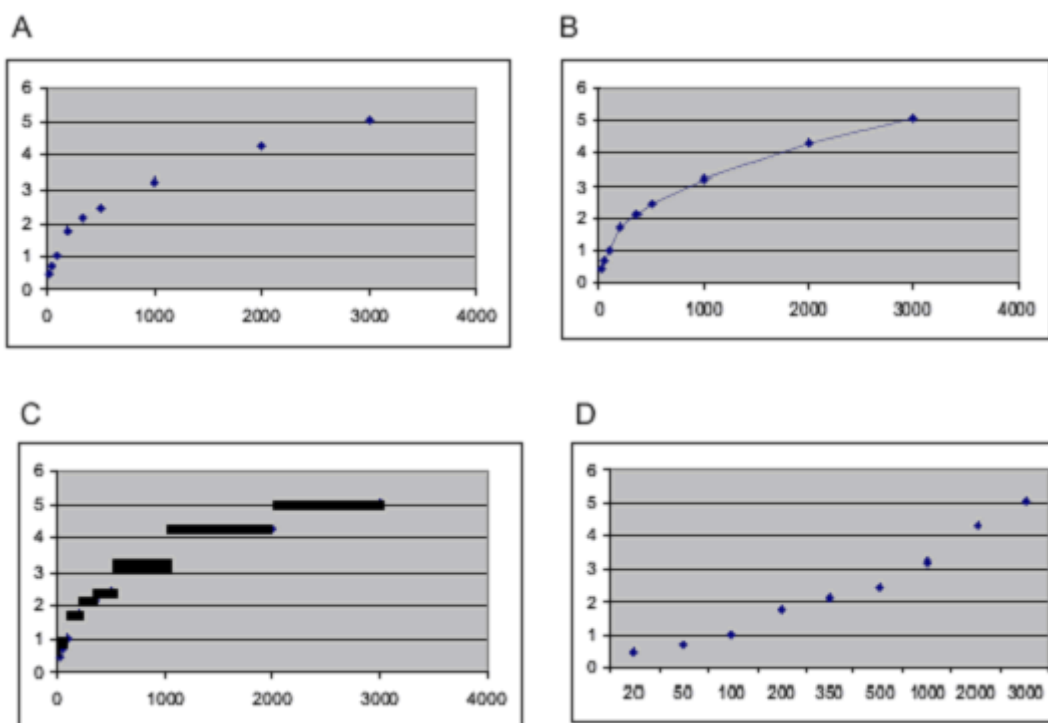
TARIFFE POSTALI

Le tariffe postali in Zedlandia, un paese in cui si usa lo zed come moneta corrente, sono basate sul peso (approssimato al grammo) delle buste o pacchi, come mostrato in tabella:

Peso (in grammi)	Tariffe
Fino a 20 g	0.46 zed
21 g – 50 g	0.69 zed
51 g – 100 g	1.02 zed
101 g – 200 g	1.75 zed
201 g – 350 g	2.13 zed
351 g – 500 g	2.44 zed
501 g – 1000 g	3.20 zed
1001 g – 2000 g	4.27 zed
2001 g – 3000 g	5.03 zed

Quale tra i seguenti grafici rappresenta meglio il sistema delle tariffe postali in Zedlandia?

(L'asse orizzontale mostra il peso in grammi, e l'asse verticale la tariffa in zed).



Giustifica la tua scelta.

Spunti per altre attività con gli studenti

Si propone un'attività di esplorazione di figure piane per determinare particolari condizioni di massimo o di minimo. Un esempio può essere costituito dal seguente problema sui perimetri

È dato un segmento di lunghezza L . Costruisci due quadrati con i lati adiacenti disposti sul segmento, come mostrato nella *Figura 4* qui sotto riprodotta, e trova quale è la configurazione dei due quadrati ottenuti che ha perimetro minimo.

Studia come varia il perimetro della configurazione e rappresentalo con un'opportuna formula algebrica.

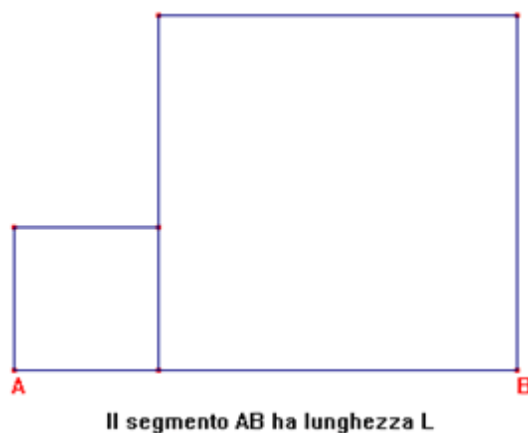


Figura 4

Si osserva che in questo caso è davvero efficace poter sfruttare le potenzialità di un software di geometria dinamica per l'esplorazione della configurazione assegnata (mediante l'uso della funzione trascinamento). L'ambiente della calcolatrice contenuto nel software viene solitamente utilizzato per effettuare i calcoli relativi alle misure coinvolte. In tal modo gli studenti possono osservare le variazioni delle lunghezze dei lati e del perimetro della figura composta ed elaborare di conseguenza le loro congetture a proposito della configurazione che corrisponde al perimetro minimo.

Si propone inoltre di considerare lo stesso problema riguardo al calcolo dell'area della figura composta dai due quadrati adiacenti costruiti, ancora allo scopo di determinare se esiste ed eventualmente di descrivere la configurazione di area minima.

Bibliografia

UMI-SIS, Matematica 2003. *Materiali per un nuovo curriculum di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica. Scuola secondaria di II grado*, scarica il documento:

<https://umi.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2020/04/Matematica2003.pdf>

OCSE PISA 2003, *Valutazione dei quindicenni a cura dell'OCSE*, Armando Armando, Roma, 2004.

Emma Castelnuovo, Claudio Gori Giorgi, Daniela Valenti, *Matematica Oggi*, vol. 2, La Nuova Italia, Firenze 1992.

Vittorio Zanetti, *La Fisica attorno a noi*, Zanichelli, Bologna 1989.

Sitografia

Università di Bologna *Materiali* <https://umi.dm.unibo.it/materiali-umi-ciim/>

INVALSI *OCSE-PISA 2006 - Programme for International Student Assessment*
Versione *inglese* di *OCSE-PISA* 2006
<http://www.invalsi.it/invalsi/ric.php?page=ocsepisa06>

Proposta di attività

Leggere l'attività, le indicazioni metodologiche e gli approfondimenti:
individuare i principali nodi didattici cui la situazione fa riferimento; esporli sinteticamente per scritto.

Aggiungere qualche problema in altri contesti, relativo alle stesse abilità e conoscenze.
Sperimentare l'unità proposta:

- fare una ricognizione del contesto scolastico specifico in cui si svolgerà l'attività;
- esplicitare gli adattamenti necessari;
- formulare il progetto didattico relativo;
- preparare una prova di verifica adatta a valutare le conoscenze e abilità relative alla situazione didattica posta (anche con riferimento alle prove OCSE-PISA e INVALSI).

Scrivere un "diario di bordo" (narrazione e documentazione del processo di sperimentazione vissuta in classe: l'insegnante dovrà elaborare un diario con l'esposizione dell'esperimento svolto, di come gli studenti hanno reagito alla proposta didattica, delle difficoltà incontrate in particolare nel processo di costruzione di significato e di procedura di soluzione e di come sono state superate le difficoltà.

Esplicitare i compiti dati agli studenti e le modalità con cui gli studenti stessi sono stati responsabilizzati all'apprendimento.