

Alla conquista dello spazio

di S. Beltrame, M. Dalè, R. Ruganti, L. Tomasi

Area tematica

Geometria

Autori

Sylviane Beltrame, Marina Dalè, Riccardo Ruganti, Luigi Tomasi

Ordine di scuola

Scuola secondaria di II grado – II biennio - classe III oppure classe IV

Tempo medio per svolgere il percorso

5 - 8 ore

Indice

Scheda generale	3
Indicazioni curriculari	4
Prove INVALSI	9
Introduzione.....	16
Fase 1	17
Fase 2	22
Fase 3	23
Fase 4	25
Fase 5	27
Indicazioni metodologiche	28
Spunti per approfondire	29
Eventuali difficoltà e suggerimenti	30
Elementi per prove di verifica	31
Risorse	34

Scheda generale

Autori

S. Beltrame, M. Dalè, R. Ruganti, L. Tomasi

Tematica affrontata

Avvio allo studio della geometria dello spazio.

Descrizione

L'attività è proposta per il I oppure per il II anno del secondo biennio della scuola secondaria di II grado. Si ritiene fondamentale per svolgere il percorso l'uso di un software di geometria 3D oltre all'uso di materiale concreto (cartoncino; modelli di poliedri; ecc.). Prerequisito necessario è la conoscenza di alcuni elementi della geometria piana e di trigonometria. Il contesto iniziale può essere tratto dalla realtà, come ad esempio alcune costruzioni architettoniche, ma poi diventa di carattere matematico. Con l'uso del materiale concreto e di un software di geometria 3D si propone un percorso costruttivo, vivace e sintetico, teso alla rivalutazione di questo tema nella scuola secondaria di II grado.

Ordine di scuola

Scuola secondaria di II grado – II biennio - classe III oppure classe IV.

Tempo medio per svolgere l'attività in classe 5-8 ore

Nodi concettuali

- Oggetti geometrici nello spazio.
- Parallelismo e perpendicolarità nello spazio.
- Posizioni reciproche di piani, di rette e di piani e rette nello spazio.
- Diedri e angoloidi; proprietà fondamentali.

Indicazioni curriculari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 4 del 16/01/2012, Direttiva n. 5 del 16/01/2012) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni Nazionali per i Licei

Linee generali e competenze

Relazioni e funzioni

I gruppi di concetti e metodi di cui lo studente saprà dominare attivamente: gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni). Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie elementari per la costruzione di modelli matematici in casi molto semplici ma istruttivi, e saprà utilizzare strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo.

Obiettivi specifici di apprendimento

I biennio

Geometria

La realizzazione di costruzioni geometriche elementari sarà effettuata sia mediante strumenti tradizionali (in particolare la riga e compasso, sottolineando il significato storico di questa metodologia nella geometria euclidea), sia mediante programmi informatici di geometria.

Liceo artistico

Obiettivi specifici di apprendimento

I biennio

Geometria

Lo studente apprenderà i principi matematici di base coinvolti nelle diverse tecniche di rappresentazione delle figure dello spazio e le relazioni tra di essi e le tecniche in uso nelle discipline grafiche e geometriche. Studierà i problemi di rappresentazione delle figure quali si presentano nel contesto artistico.

II biennio

Geometria

Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità. Lo studente apprenderà i fondamenti matematici della prospettiva e approfondirà le relazioni tra le conoscenze acquisite in ambito geometrico e le problematiche di rappresentazione figurativa e artistica.

Liceo classico, Liceo linguistico, Liceo musicale e coreutico, Liceo delle scienze umane

Obiettivi specifici di apprendimento

II biennio

Geometria

Affronterà l'estensione allo spazio di alcuni temi e di alcune tecniche della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, studierà le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità.

Liceo scientifico/scientifico opzione scienze applicate

Obiettivi specifici di apprendimento

Il biennio

Geometria

Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

Linee Guida per gli Istituti Professionali (Settore Servizi- Settore Industria e Artigianato) e Tecnici (Settore Economico - Settore Tecnologico)

Competenze

- Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
- Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.

I biennio

Conoscenze: Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio.

Abilità: Eseguire costruzioni geometriche elementari utilizzando la riga e il compasso e/o strumenti informatici. Conoscere e usare misure di grandezze geometriche: perimetro, area e volume delle principali figure geometriche del

piano e dello spazio. Porre, analizzare e risolvere problemi del piano e dello spazio utilizzando le proprietà delle figure geometriche oppure le proprietà di opportune isometrie. Comprendere dimostrazioni e sviluppare semplici catene deduttive.

Quinto anno

Conoscenze: di un solido. Principio di Cavalieri.

Abilità: Calcolare aree e volumi di solidi e risolvere problemi di massimo e di minimo.

Linee guida Istituti Tecnici

Settore: tecnologico – Indirizzo: Sistema Moda – Articolazione: Tessile, abbigliamento e moda

Il biennio-Complementi di matematica

Competenze: Utilizzare il linguaggio e i metodi propri della matematica per organizzare e valutare adeguatamente informazioni qualitative e quantitative. Utilizzare le strategie del pensiero razionale negli aspetti dialettici e algoritmici per affrontare situazioni problematiche, elaborando opportune soluzioni utilizzare le reti e gli strumenti informatici nelle attività di studio, ricerca e approfondimento disciplinare.

Conoscenze: Caratteristiche di enti geometrici dello spazio. Caratteristiche dei poliedri. Caratteristiche dei solidi di rotazione con particolare riferimento a cilindro, cono, sfera.

Abilità: Calcolare misure di superfici e volumi di poliedri e particolari solidi di rotazione. Scrivere l'equazione di una retta e riconoscere rette parallele e perpendicolari. Scrivere l'equazione di un piano e riconoscere piani paralleli e perpendicolari. Scrivere le equazioni di alcune superfici notevoli (sfera, cilindro, cono).

Interpretazione delle indicazioni curriculari alla base dello sviluppo del percorso didattico

Pur nella diversità tra le Indicazioni nazionali per i Licei e le Linee guida per gli Istituti tecnici e gli Istituti professionali, questa attività propone in tutti gli indirizzi di studio di scuola secondaria di II grado un avvio alla geometria dello spazio. L'attività didattica propone di rivalutare questo argomento fondamentale della geometria, inizialmente in modo intuitivo e costruttivo, con l'uso di materiale concreto e di software di geometria. Negli indirizzi scolastici che hanno un orario più adeguato si potrà proporre un maggiore approfondimento e la dimostrazione di alcune proprietà fondamentali.

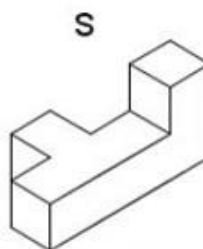
Prove INVALSI

a.s. 2012/2013 - Domanda D10

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D10. Se il solido S viene fatto ruotare,



quale tra le seguenti configurazioni non può assumere?

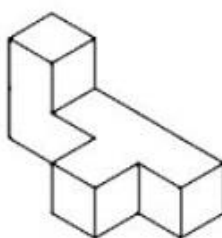


Figura 1

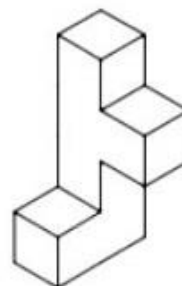


Figura 2

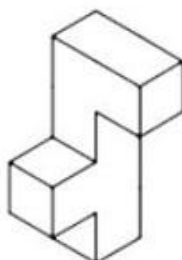


Figura 3

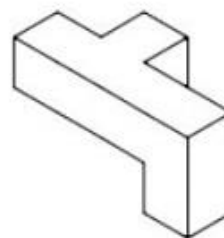


Figura 4

- A. ☐ Figura 1
- B. ☐ Figura 2
- C. ☐ Figura 3
- D. ☐ Figura 4

Soluzione INVALSI: D

Commento

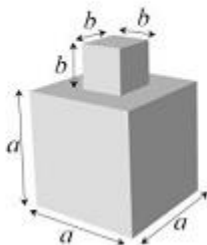
Lo studente deve riconoscere figure ruotate nello spazio. Per rispondere lo studente deve saper analizzare le figure geometriche, essere in grado di confrontare e riconoscere le caratteristiche che si conservano.

a.s. 2012/2013 - Domanda D23

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D23. Un solido S è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi come mostra la seguente figura:



Quale delle seguenti espressioni esprime l'area della superficie totale del solido S ?

- A. ☐ $5a^2 + 4b^2$
- B. ☐ $6a^2 + 4b^2$
- C. ☐ $6a^2 + 5b^2$
- D. ☐ $6a^2 + 6b^2$

Soluzione INVALSI: B

Commento

La superficie di cui si richiede di determinare l'area è formata da 5 facce del cubo di lato a , da 5 facce del cubo di lato b e dalla differenza fra una faccia del cubo di lato a e una faccia del cubo di lato b . È possibile semplificare il calcolo notando che calcolare l'area di questa superficie equivale a calcolare la superficie totale del cubo di lato a (cioè $6b^2$) e aggiungere a questa superficie l'area di quattro facce del cubo di lato b ($4b^2$). Il distrattore D intercetta chi

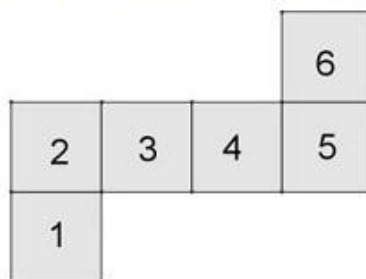
addiziona semplicemente le superfici dei due cubi senza considerare che il più piccolo appoggia sul più grande. Gli studenti devono saper riconoscere le forme nello spazio, analizzare la figura per individuare le superfici coinvolte e essere in grado di esplicitare con l'espressione letterale quanto corrisponde alla richiesta. Motivazioni della scelta del quesito: proprietà qualitative di una funzione dedotte dalla rappresentazione grafica; moto di un corpo: relazioni tra spazio, tempo e velocità.

a.s. 2012/2013 - Domanda D32

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D32. La seguente figura rappresenta uno sviluppo piano di un cubo.



Quale tra le seguenti coppie è formata da facce opposte del cubo?

- A. ☐ 1 e 4
- B. ☐ 2 e 5
- C. ☐ 3 e 5
- D. ☐ 4 e 6

Soluzione INVALSI: C

Commento

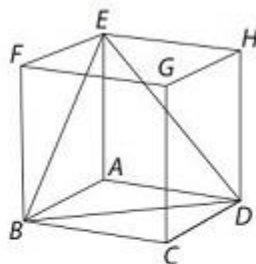
Lo studente deve riconoscere le forme nello spazio e individuare le facce opposte di un cubo da uno sviluppo piano. La risposta corretta richiede competenze di visualizzazione nello spazio.

a.s. 2011/2012 - Domanda D8

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

- D8.** La seguente figura rappresenta in prospettiva un cubo che è stato sezionato con il piano passante per i vertici B, D, E.



Marina afferma: "Il triangolo BDE è un triangolo equilatero". Marina ha ragione?
Scegli una delle due risposte e completa la frase.

- ☐ **Sì, perché**
-
-
- ☐ **No, perché**
-
-

Soluzione INVALSI:

Risposta corretta: Sì, perché...

i lati sono diagonali delle facce del cubo

oppure

le diagonali delle facce di un cubo sono uguali.

La risposta è accettabile se fa riferimento alla proprietà che le diagonali delle facce di un cubo sono uguali fra loro, utilizzando anche un linguaggio meno preciso e chiaro, ma privo di scorrettezze. Esempi di risposta corretta:

Perché sono diagonali delle facce del cubo.

Perché le diagonali delle facce di un cubo sono uguali.

Tutte le facce del cubo sono uguali, quindi i segmenti EB, ED, BD sono uguali.

La lunghezza di ogni lato è uguale perché ognuno parte da un vertice a quello opposto di un quadrato.

Non sono accettabili risposte che fanno riferimento a misure empiriche dei lati del triangolo.

Esempi di risposte non corrette:

Perché AD e DC sono diagonali del quadrato e sono uguali (menziona solo due lati e non tre).

Perché ha tre lati uguali.

Sì, perché (l'alunno non scrive nulla sui puntini).

In generale, la risposta è accettabile se fa riferimento alla proprietà che le diagonali delle facce di un cubo sono uguali fra loro, utilizzando anche un linguaggio meno preciso e chiaro, ma privo di scorrettezze. Non sono accettabili risposte che fanno riferimento a misure empiriche, eseguite sulla figura proposta nel testo della prova, dei lati del triangolo: ciò che gli studenti devono utilizzare è una proprietà del cubo.

Commento

Lo studente deve conoscere le figure dello spazio e del piano e le principali proprietà, in particolare deve saper “leggere” una sezione piana del cubo e analizzare una figura tridimensionale, individuare i piani a cui appartengono i diversi segmenti e conoscere le proprietà di figure piane. Lo studente deve organizzare le proprie conoscenze, analizzare una figura e esporre correttamente le motivazioni della propria scelta.

a.s. 2010/2011 - Domanda D9

Scuola secondaria di II grado – Classe II

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

D9. Nella figura è rappresentato un cubo.



Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo.

a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa.

		Vera	Falsa
a1.	Il lato AB è uguale al lato AC	☐	☐
a2.	Il triangolo ABC è rettangolo	☐	☐
a3.	Il lato BC è il più lungo dei tre	☐	☐
a4.	L'angolo ABC è di 45°	☐	☐

b. Se lo spigolo del cubo misura 1 m, quanto misurano i lati del triangolo ABC?

AC = m

AB = m

BC = m

Soluzione INVALSI:

D9_a1.: Falsa. Infatti il lato AB non è uguale al lato AC.

D9_a2.: Vera. Infatti il triangolo ABC è rettangolo in A.

D9_a3.: Vera. Infatti BC è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ABC.

D9_a4.: Falsa. Infatti il triangolo rettangolo ABC non è isoscele (AB è maggiore di AC).

D9_b: AC = 1 m

AB = $\sqrt{2}$ m

BC = $\sqrt{3}$ m

Si possono accettare anche valori approssimati

$AB = 1,41$ m oppure $AB = 1,4$ m

$BC = 1,73$ m oppure $BC = 1,7$ m

Commento

Lo studente nell'**item a** deve “leggere” correttamente la figura, in particolare la domanda relativa all'angolo può mettere in difficoltà per una mancanza di visualizzazione tridimensionale. Nel secondo item lo studente deve individuare le misure richieste, il calcolo non è complesso, ma una interpretazione errata delle richieste dell'item a porta a risposte errate nell'**item b**. Lo studente per risolvere correttamente deve riconoscere le figure geometriche, conoscere le proprietà nel piano e nello spazio e individuare relazioni geometriche e numeriche.

Introduzione

Lo svolgimento di questa attività è suddiviso in cinque fasi.

Si parte da un problema-stimolo (fase 1) finalizzato a scoprire le proprietà che caratterizzano la perpendicolarità tra una retta e un piano. Successivamente si propone di esaminare due diagonali di un cubo. Queste prime due fasi si propongono di individuare, in modo concreto e facendo uso di materiali vari e di un software di geometria, quali sono le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio (piano – piano, retta – retta e retta - piano).

La terza fase è finalizzata a introdurre, in modo dinamico e interattivo, la nozione di diedro (molto intuitiva) e quella di misura di un diedro. Nella quarta fase si prosegue proponendo di misurare il diedro di un tetraedro regolare e quello di un ottaedro regolare (in modo concreto e dinamico con l'uso di un software 3D).

Nella quinta e ultima fase, che si possono svolgere a diversi livelli di approfondimento in relazione all'indirizzo di studi, si prevede di introdurre (in modo dinamico e interattivo) il concetto di angoloide e di guidare gli studenti alla scoperta della proprietà fondamentale di un angoloide (la somma delle ampiezze delle facce di un angoloide è minore di un angolo giro).

Fase 1

In questa fase viene proposta agli studenti l'analisi di una figura e si sollecita la riflessione con una domanda stimolo.

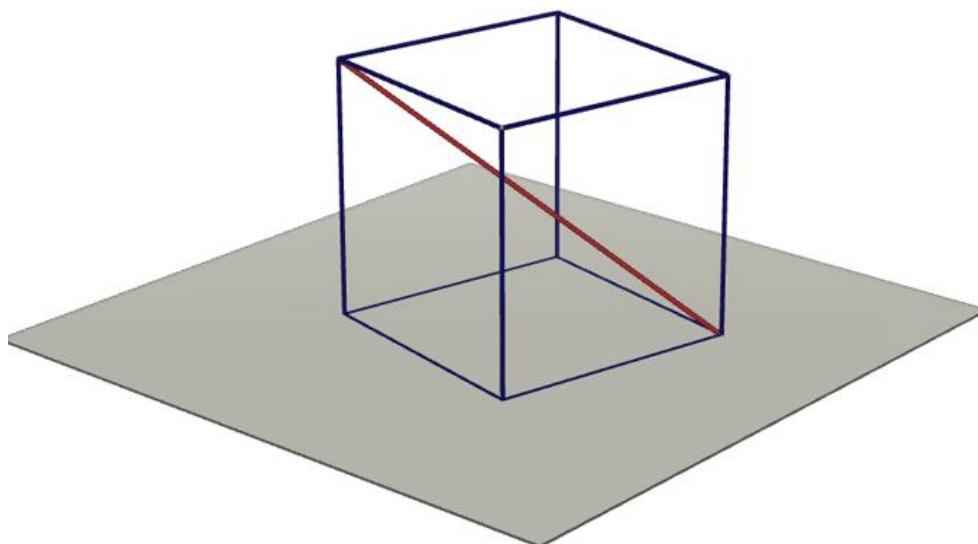


Figura 1 [vedi [figura manipolabile](#) 

Si consegna agli studenti una scheda di lavoro con un problema-stimolo: sono assegnati un cubo e una sua diagonale; si chiede agli studenti di costruire un modello concreto oppure di usare un software di geometria 3D per modellizzare la stessa situazione. Il docente chiede di analizzare la figura e di individuare quale sia l'angolo formato fra la diagonale e la "base" del cubo; guida quindi la discussione in classe per arrivare a definire l'angolo tra una retta e un piano. Ogni studente è invitato a pensarci individualmente e poi a discuterne in un piccolo gruppo.

Interessante in questo contesto è avviare una discussione in classe sulla domanda n. 9 della Prova INVALSI - Classe II - Scuola secondaria di II grado 2011; riportiamo questa domanda qui di seguito.

D9. Nella figura è rappresentato un cubo.



Il triangolo ABC ha come lati uno spigolo del cubo, la diagonale di una sua faccia e una diagonale del cubo.

a. Indica se ciascuna delle seguenti affermazioni è vera o falsa

		Vera	Falsa
a.1	Il lato AB è uguale al lato AC		
a.2	Il triangolo ABC è rettangolo		
a.3	Il lato BC è il più lungo dei tre		
a.4	L'angolo ABC è di 45°		

b. Se lo spigolo del cubo misura 1m, quanto misurano i lati del triangolo ABC?

AC = m

AB = m

BC = m

Si vedano le soluzioni del quesito nel sito dell'INVALSI.

A partire da questi due problemi-stimolo si può arrivare alla definizione di angolo tra una retta ed un piano nello spazio.

Nella figura 2 si considera un punto B della retta e lo si proietta ortogonalmente sul piano, ottenendo il punto B'. Si disegna la retta AB'. Le rette AB e AB' definiscono un piano; in questo piano possiamo definire l'angolo tra le due rette, che è anche l'angolo tra la retta e il piano.

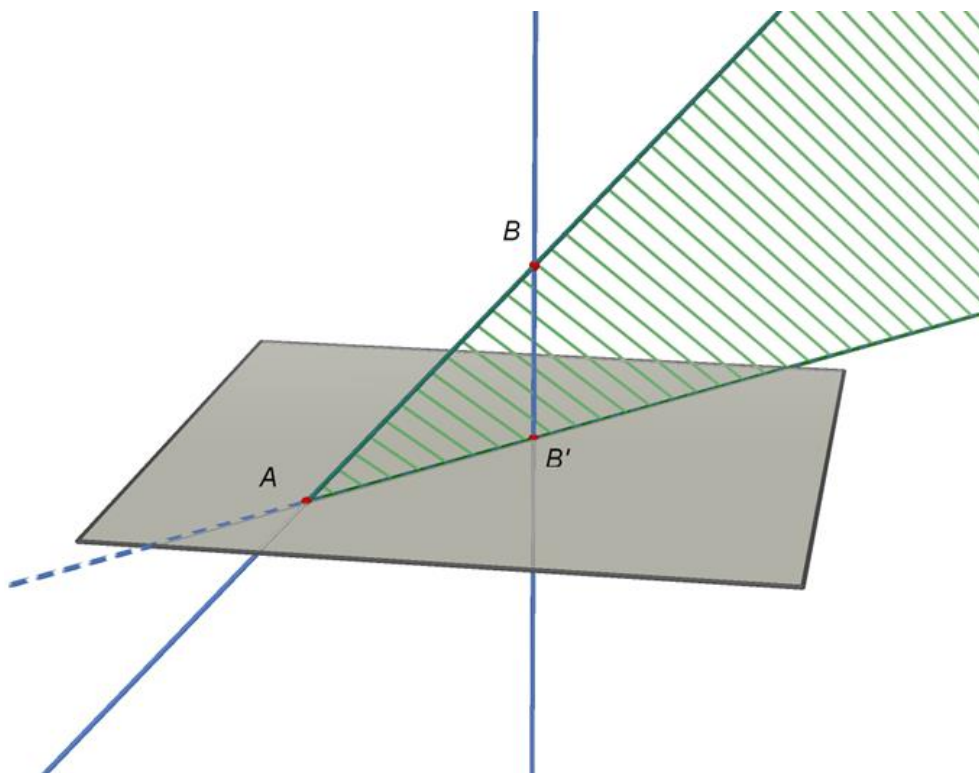


Figura 2

Successivamente si analizzano le posizioni reciproche tra una retta e un piano nello spazio, per arrivare a definire la perpendicolarità e il parallelismo tra una retta e un piano. Seguendo quanto proposto da V. Villani (in *Geometria senza software geometrico*, *Cablrirsae Emilia Romagna*, aprile/luglio 2003, n. 35/36) si potrebbero proporre agli studenti le seguenti attività. Figura 3



Si fornisce agli allievi una livella a bolla (figura 4) e si chiede quante misurazioni sono necessarie per stabilire se un piano (ad esempio il piano del pavimento dell'aula oppure di un tavolo) è orizzontale o no. Si passa poi alla fase sperimentale. Anche in questa esperienza occorre porre attenzione al concetto

di "orizzontalità" di un piano, che si controlla con l'uso della livella a bolla, tenendo presente che di solito si tratta di uno "stereotipo", che non ha ragione di rimanere nel modello geometrico dello spazio. Per rafforzare il concetto di



ortogonalità tra una retta e un piano, si può eventualmente usare un filo a piombo, ponendo tuttavia attenzione ai possibili "stereotipi" che possono insorgere negli allievi, che potrebbero confondere il concetto di ortogonalità di una retta a un piano con quelli di verticalità di una retta e di orizzontalità di un piano (concetti che si definiscono in fisica).

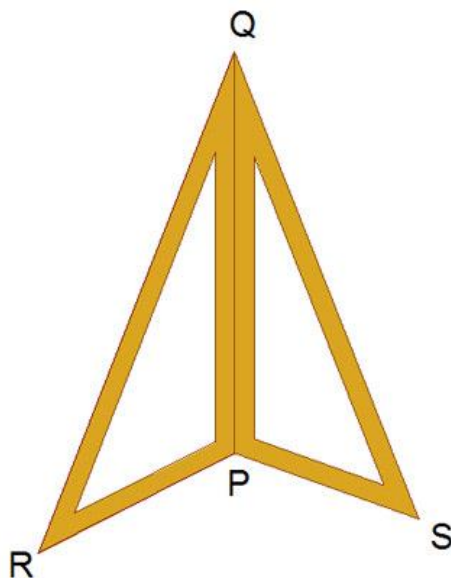


Figura 5

Lasciando scegliere agli allievi gli strumenti appropriati, si chiede come procederebbero operativamente per conficcare un'asta perpendicolarmente a un piano (due casi: se il piano è orizzontale...; se il piano non è orizzontale...). Si passa poi alla fase sperimentale. Si possono considerare due squadre, come in figura 5, e chiedere di individuare in quale relazione sta la retta PQ rispetto alla retta PR, rispetto alla retta PS e rispetto al piano individuato dai punti P, R ed S. Questo sistema viene (o veniva) usato effettivamente dai muratori più

esperti per controllare la ortogonalità di uno spigolo PQ rispetto al piano individuato da P, R ed S. *"Il teorema matematico soggiacente stabilisce infatti che una retta r è perpendicolare ad un piano π se essa è perpendicolare a due rette distinte del piano, passanti per il punto nel quale r interseca π . Questa attività consente di rendere concrete due nozioni basilari della geometria tridimensionale, che nelle trattazioni solo cartacee rimangono avulse da ogni esperienza fisica. Mi riferisco all'individuazione della giacitura di un piano nello spazio e alla perpendicolarità fra retta e piano nello spazio."* (da V. Villani, *Geometria senza software geometrico*, Cablrrsae Emilia Romagna, aprile/luglio 2003, n. 35/36).

Le figure 6 e 7 si riferiscono a rette tra loro ortogonali nello spazio, che possono essere incidenti oppure non incidenti. Normalmente si verifica che il caso della figura 7 non è sempre ben noto agli allievi.

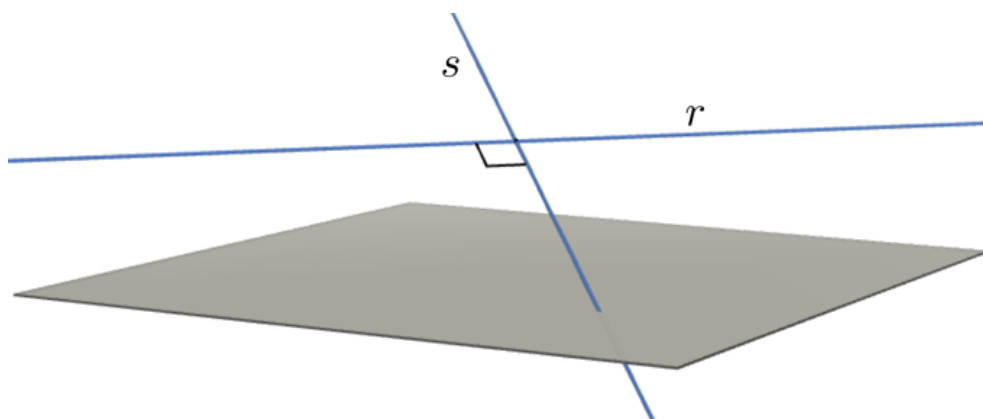


Figura 6 - Rette ortogonali e incidenti.

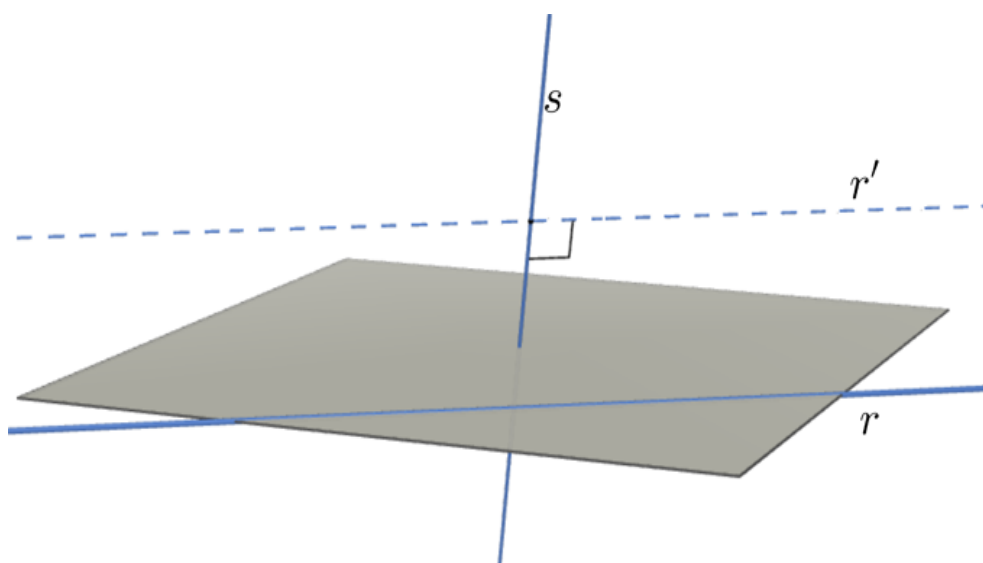


Figura 7 - Rette ortogonali e non incidenti (r ed s).

Fase 2

Si procede con la proposta di esaminare la figura di un cubo e due sue diagonali. Si sollecita la riflessione ponendo la seguente domanda: "le diagonali sono perpendicolari?"

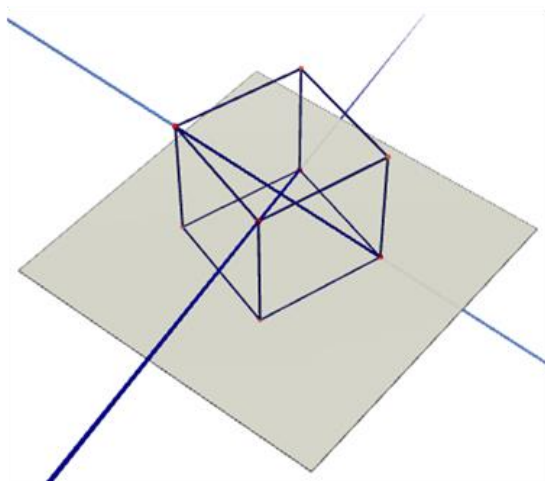


Figura 8 [vedi [figura manipolabile](#) 

L'insegnante guida la discussione, valorizzando le osservazioni che emergono sulla figura, e aiuta gli studenti a giustificare con un'argomentazione corretta ciò

che osservano (gli studenti devono arrivare a concludere che le due diagonali determinano con i vertici del cubo un rettangolo, che giace nel piano definito dalle due diagonali). Si osserva che questo rettangolo non è un quadrato; si chiede di motivare questa osservazione, dalla quale si ricava la risposta al quesito posto. Si può pertanto chiedere di trovare le proprietà di questo rettangolo e il rapporto tra le sue dimensioni (che è lo stesso che si verifica in un foglio A4) e calcolare la misura dell'angolo che si forma tra due diagonali qualsiasi di un cubo. Eventualmente, come approfondimento, si può esaminare che cosa succede alle diagonali (si incontrano? In che modo?) di un parallelepipedo (non necessariamente rettangolo), e dimostrare il relativo teorema: *In un parallelepipedo le quattro diagonali passano per un medesimo punto, che divide ciascuna di esse per metà.*

Fase 3

Si considera ancora il cubo della fase 2 e si chiede qual è l' "angolo" che si viene a formare tra il rettangolo determinato dalle diagonali e la "base" del cubo. Gli studenti individueranno facilmente l' "angolo" corretto in questa situazione particolare.

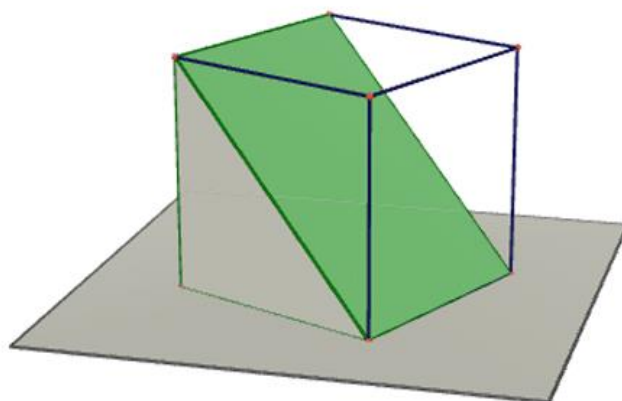


Figura 9

La figura 9 permette di discutere su che cosa si intenda, in questo caso, per "angolo" nel ragionamento precedente. A questo punto si propone una nuova figura che permette di definire un diedro (si può fare riferimento a un modello utilizzando una scatola di cartone e cartoncini con "angoli" di ampiezza diversa, o considerando l'angolo, in una stanza, tra una porta e la parete, o un software dinamico).

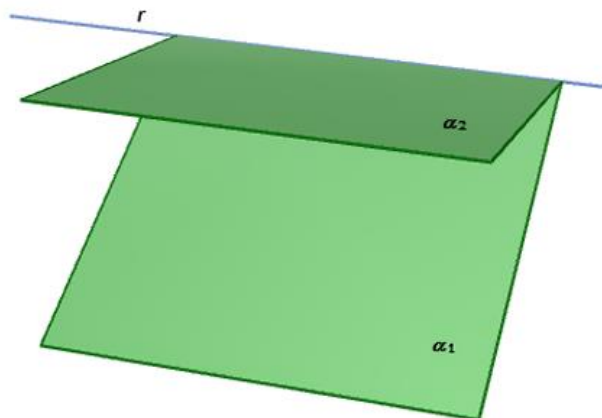


Figura 10

Si pone il problema di come vada individuata l'ampiezza di un diedro. Domanda-guida da fare: come è possibile individuare la misura dell'ampiezza di un diedro? Seguono una discussione e la realizzazione di un modello concreto e di figure dinamiche. Si arriva alla conclusione che le sezioni di un diedro con un piano incidente allo spigolo del diedro non sono costanti.

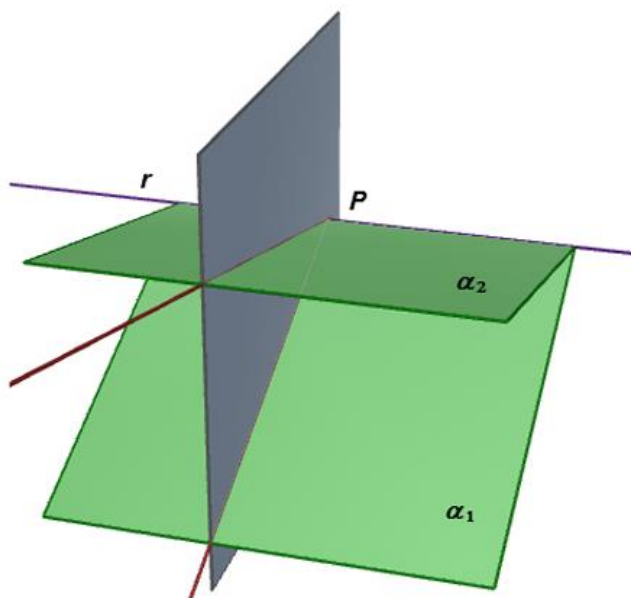


Figura 11

Mediante la discussione, si arriva a definire la sezione normale di un diedro (figura 11: il piano che seziona il diedro deve essere perpendicolare allo spigolo r del diedro), che permette di definire successivamente l'ampiezza di un diedro. Analogia tra la misura dell'ampiezza di un angolo e quella di un diedro. Che cos'è l'analogo della bisettrice di un angolo? Si vuole scoprire, e poi definire, il concetto di "semipiano bisettore" di origine r .

Fase 4

In questa fase si pone il problema di come si può misurare l'ampiezza del diedro di un tetraedro regolare (si consiglia di costruire un modello concreto di tetraedro regolare da poter sezionare opportunamente).

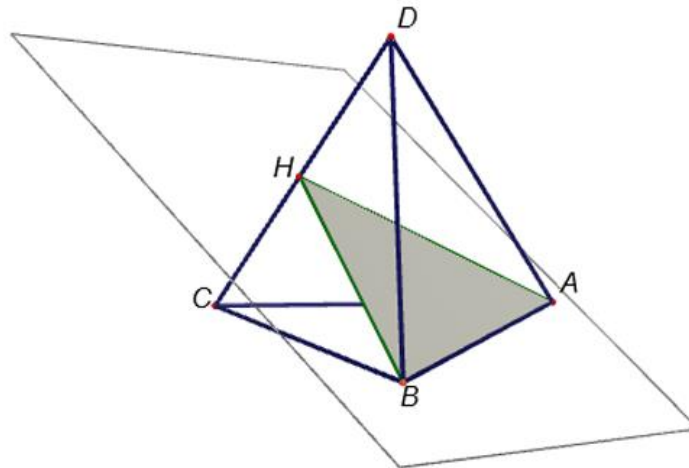


Figura 12

Quanto misura ciascun diedro di un tetraedro regolare? Si suggerisce di sezionare il tetraedro (figura 12) con un piano passante per A, B e il punto medio H di CD. Si ottiene un triangolo (isoscele, perché?) che permette di calcolare la misura dell'angolo AHB.

Le stesse richieste ed esplorazioni si possono fare per il diedro di un ottaedro regolare (figura 13).

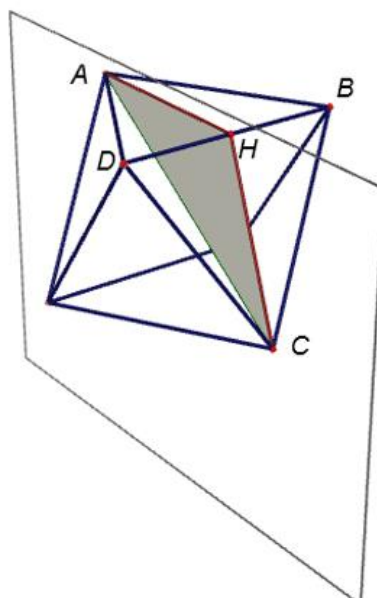


Figura 13

Fase 5

Tramite modelli concreti e un software di geometria 3D, arrivare alla definizione di angoloide. Il modo più semplice è considerare un triangolo ABC in un piano α e un punto V non appartenente a questo piano. Disegniamo le semirette VA, VB e VC di origine V. Completiamo la figura con le "facce" (vedi figura 14). Ora dobbiamo pensare alla "parte" (quella convessa...) di spazio racchiusa da queste tre facce. Come la si può definire? Discussione in classe usando materiale concreto e un opportuno software di geometria dinamica 3D. Si arriva alla definizione del triedro come intersezione dei tre diedri aventi spigoli incidenti. Come si può generalizzare questa definizione? Si arriva alla definizione di angoloide.

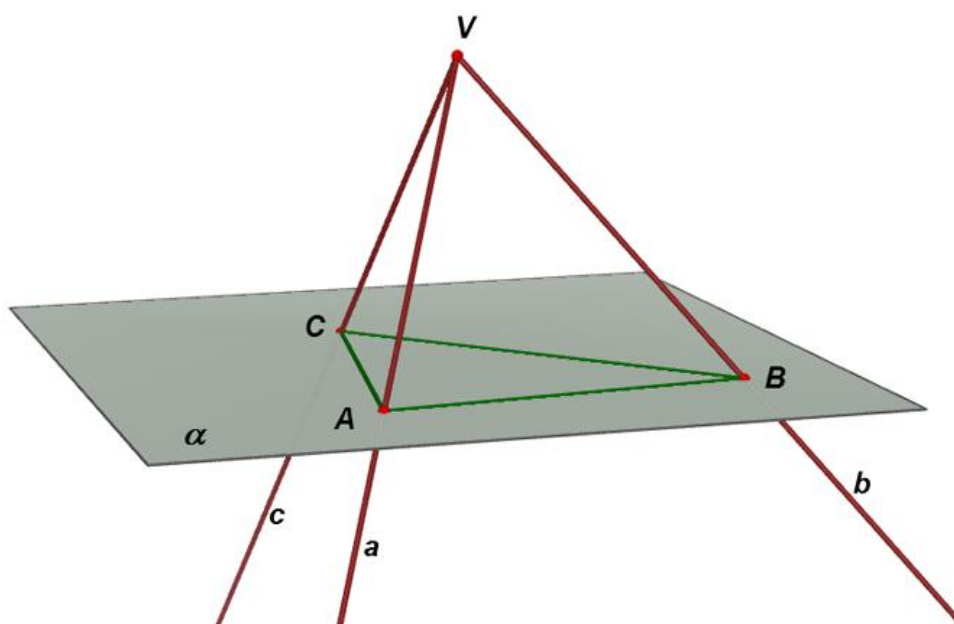


Figura 14

Si procede alla scoperta – condotta inizialmente in modo intuitivo e concreto – della proprietà di un angoloide (eventualmente proporre una dimostrazione dinamica): *la somma delle ampiezze delle facce di un angoloide è minore di un angolo giro.*

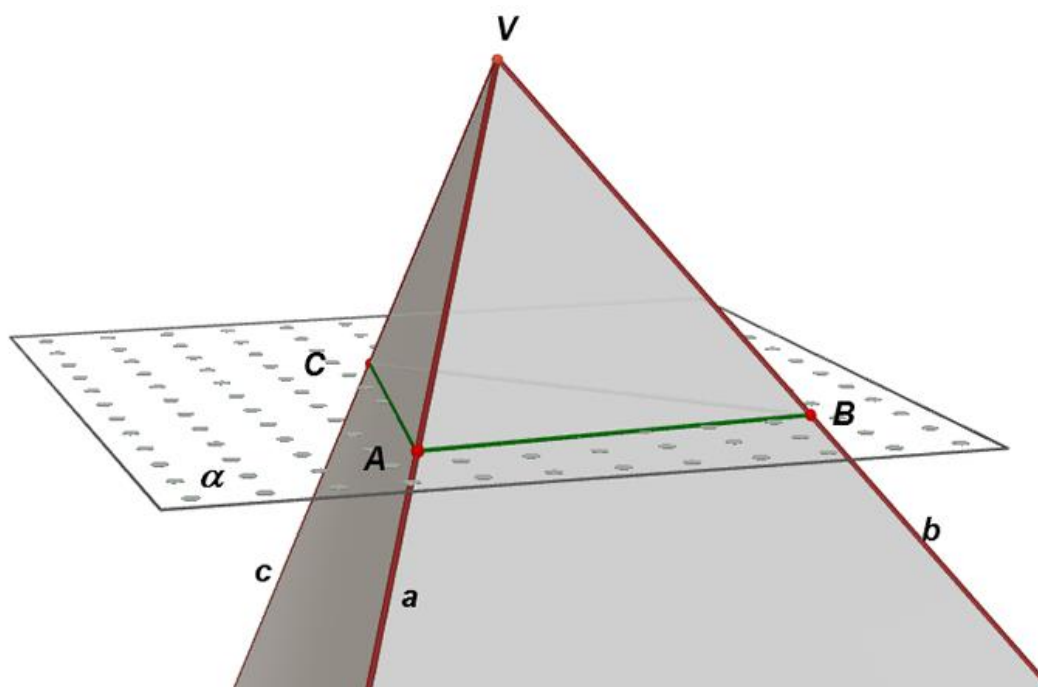


Figura 15

Indicazioni metodologiche

L'attività propone di usare materiale concreto, software di geometria dello spazio, il web, per l'avvio allo studio della geometria dello spazio. L'avvio alla geometria dello spazio viene proposto con l'uso di materiale concreto e di software di geometria 3D, in modo da presentare alcune proprietà in modo dinamico e interattivo. Didatticamente è fondamentale l'uso di più strumenti, condotto da più punti di vista. Questa parte della geometria - in cui la tecnologia 3D può fornire un valido supporto alla visualizzazione e alla congettura - può avvalersi della visualizzazione dinamica grazie alle moderne tecnologie. L'insegnante dovrebbe utilizzare queste tecnologie e farle soprattutto usare ai propri allievi, perché in questo modo si può arrivare ad un approccio più vivace ed attraente alla geometria dello spazio. Negli indirizzi dove l'orario lo permette si potranno introdurre, dopo questa fase, alcune proprietà da dimostrare, tenendo comunque presente una scelta molto limitata dei fatti da dimostrare, facendo riferimento a delle ammissioni e dei fatti di carattere intuitivo.

Nell'uso delle tecnologie in classe con gli allievi risulta particolarmente importante non solo il risultato, ma anche i processi mediante i quali gli allievi arrivano a possedere alcune conoscenze ed abilità di geometria dello spazio. L'insegnante, in classe, dovrà osservare e guidare questi processi per arrivare ad un effettivo apprendimento. Riguardo all'uso delle schede di lavoro in laboratorio (di geometria dello spazio), è importante la decisione dell'insegnante di far usare schede di gruppo oppure schede individuali, che consentirebbero di osservare processi diversi. Con entrambe le modalità si possono stabilire momenti di discussione a piccoli gruppi e a gruppo classe. Nello svolgimento di questa attività sarebbe opportuno stabilire collegamenti con gli altri nuclei di contenuto, come ad esempio *Relazioni e funzioni*, che può presentare collegamenti interessanti con alcuni degli argomenti trattati.

Spunti per approfondire

Spunti per approfondimenti disciplinari

- Misura del diedro di un dodecaedro regolare
- Misura del diedro di un icosaedro regolare
- Simmetrie nello spazio
- Definizione di poliedro
- Definizione di poliedro regolare
- Poliedri regolari: perché solo cinque tipi?

Spunti per altre attività con gli studenti

Costruzione di poliedri in cartoncino, usando delle cannucce da bibita, materiale strutturato (Polydron, Geomag, usando un software 3D, etc.).

Eventuali difficoltà e suggerimenti

Fase 1

La fase 1 è particolarmente delicata e deve essere impostata a partire da qualche problema, proposto alla classe in forma individuale o di gruppo, che stimoli l'intuizione e la capacità di visualizzazione nello spazio. Non si può iniziare questo argomento solo a partire da disegni fatti alla lavagna dall'insegnante o da disegni riportati sul quaderno; un approccio di questo tipo non può essere stimolante per allievi "nativi digitali" abituati a usare tecnologie in cui la visualizzazione 3D è presente in modo pervasivo. Questa è la sfida didattica ed anche la difficoltà che l'insegnante potrebbe incontrare inizialmente nel proporre l'inizio di questo percorso. Si suggerisce quindi di utilizzare materiale concreto, anche autoprodotta e di facile reperimento, e, in seguito, un software di geometria dinamica.

Fase 2

In questa fase l'insegnante deve decidere se proporre delle attività individuali al computer oppure suddividere la classe in gruppi di lavoro. Il docente dovrà quindi osservare i processi di apprendimento degli allievi alle prese con i modelli concreti e con un software di geometria. Si suggerisce di predisporre delle schede di lavoro ed eventualmente di filmare gli allievi alle prese con i problemi assegnati o di registrare le discussioni in laboratorio (oggi questo è facile tecnicamente e facilita la riflessione sulla metodologia didattica applicata).

Elementi per prove di verifica

- Quesiti di geometria dello spazio dalle prove INVALSI.
- Quesiti di geometria dello spazio dalle prove OCSE PISA
- Quesiti e problemi in cui sia importante la visualizzazione nello spazio, relativamente a parallelismo, perpendicolarità, diedri e angoloidi.

1. Dati due punti nello spazio, qual è il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti da questi due punti.

2. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da tre punti non allineati.

3. Determinare il luogo dei punti dello spazio equidistanti da un piano.

4. Date le facce di un diedro, qual è il luogo geometrico dei punti equidistanti dalle due facce? Usare un software di geometria 3D per visualizzare questo luogo.

5. Dati due piani incidenti, quanti sono i diedri da essi individuati? Si nota qualche analogia con gli angoli opposti al vertice (in un piano)?

6. Dati due piani incidenti nello spazio, qual è il luogo geometrico dei punti equidistanti da questi due piani? (Si trova che il luogo è formato da due piani. Come sono questi due piani? Analogia con il luogo dei punti del piano equidistanti da due rette incidenti).

7. È dato un triangolo rettangolo isoscele ABC in cui $AB=AC=16$. Disegnare una retta r perpendicolare in A al piano del triangolo. Sia P un punto della retta tale che $PA=12$. Calcolare l'angolo che i segmenti PB e PC formano con il piano del triangolo ABC .

8. Dato un cubo $ABCDEFGH$, determinare l'angolo che una diagonale forma con il piano della faccia $ABCD$.

9. Dato un cubo $ABCDEFGH$, determinare l'angolo tra due sue diagonali.

10. Un triedro (angoloide con tre facce) isoscele è un triedro con due facce uguali. Costruisci un triedro isoscele con un software di geometria 3D.

11. Costruire un triedro (un angoloide con tre facce) trirettangolo, ossia con le facce che sono angoli retti. Se alzi la testa e guardi il soffitto, puoi vedere che i triedri trirettangoli sono abbastanza comuni.

12. Esistono angoloidi con le facce formate da angoli retti?

13. Esiste un triedro con tutte le facce formate da angoli di 108° ?

14. Dato un triedro $VABC$, con vertice in V , costruisci con un software di geometria 3D il luogo geometrico dei punti dello spazio equidistanti dalle sue facce.

15. Considera un cubo (vedi figura 16) e la piramide $ABCD$ ottenuta sezionando il cubo secondo il piano passante per ACD . Calcola l'ampiezza del diedro formato tra il piano ADB e il piano di ABC e che contiene il segmento AC .

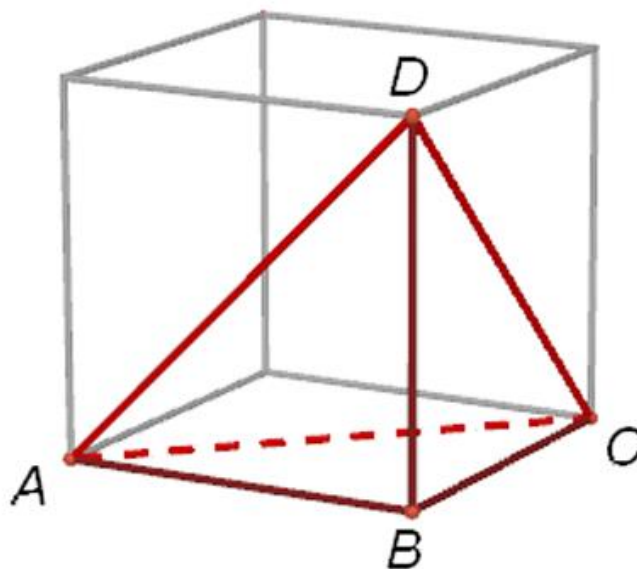


Figura 16

Risorse

Documentazione e materiali

Disegni con un software 3D

(Cabri 3D, GeoGebra 3D, SketchUp, Poly, ecc.)

[Figure dinamiche da scaricare](#)

Materiale concreto consigliato:

- Costruzione di poliedri con cannucce da bibita o altro materiale
- Geomag
- Polydron

Bibliografia

Enriques, F., Amaldi, U., *Elementi di Geometria*. Zanichelli, Bologna.

Grugnetti, L., Villani, V. *La matematica dalla materna alla maturità*. Pitagora, Bologna 1999.

Mariotti, M.A. *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Pitagora, Bologna 2005.

Villani, V.

- *La geometria: dallo spazio al piano*, Quaderno n.2 del CNR, Dipartimento di Matematica, Pisa 1985.

- *Geometria senza software geometrico*. CabriIrrsae Emilia Romagna, n. 35/36 aprile/luglio, 2003.

(<http://web.unife.it/progetti/fardicono/cabrirrsae/bollettini/rivista3536.html> )

- *Cominciamo dal punto. Domande, risposte e commenti per saperne di più sui perché della Matematica*. Pitagora, Bologna 2006.

- *Insegnare Geometria*. Seminario del 30 ottobre 2006 in Pianeta Galileo, Pisa 2006.

- *Riflessioni su possibili percorsi nell'insegnamento della geometria. L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 30 A-B, n. 6, pp. 624-644.

Boieri, P., Tomasi, L. *In laboratorio con Cabri 3D*. 25 schede di geometria dello spazio. Loescher, Torino 2009.

Sitografia

[Matematica 2003](#)

(Visitato nel giugno 2022)

Questo prodotto multimediale è stato realizzato nel 2013 da INDIRE con i fondi stanziati dal MIUR – Uff. VI nell’ambito del progetto m@t.abel – Apprendimenti di Base. La grafica, i testi, le immagini, l’audio, i video e ogni altra informazione disponibile in qualunque formato sono utilizzabili a fini didattici e scientifici, purché non a scopo di lucro e sono protetti ai sensi della normativa in tema di opere dell’ingegno (legge 22 aprile 1941, n. 633).