Il calcolo mentale: strategie e scorciatoie

di Ardizzone M.R., Formica D., Punzo C.

Nucleo a cui si riferisce il percorso
Numeri

Autori
Maria Rosa Ardizzone, Domenica Formica, Colomba Punzo

Grado scolastico
Scuola primaria – Classi dalla I alla V

Tempo medio per svolgere il percorso
12 ore

© INDIRE 2014

Indice

Scheda generale 3
Riferimenti curricolari 4
Indicazioni curricolari 4
Prove INVALSI 5
Introduzione all'attività 12
Attività 1 – All'inizio sono le mani 14
Fase 1 – Il gioco delle "coppie amiche" 16
Fase 2 – Ancora coppie amiche 18
Fase 3 – Una calcolatrice: le mani 21
Attività 2 – Oltre le mani 24
Fase 1 – Cifre che hanno per somma 10 24
Fase 2 – Il foglio di calcolo 27
Fase 3 – Moltiplicare per 10, 100, 1000 e oltre 30
Fase 4 – Moltiplicare per 5 31
Fase 5 – Moltiplicare per 25 32
Attività 3 - Le strategie più adatte 34
Fase 1 – Strategie di calcolo 34
Fase 2 - Strategie di calcolo con il 9 36
Indicazioni metodologiche 38
Eventuali difficoltà e suggerimenti 38
Approfondimenti disciplinari 39
Risorse 43
Bibliografia 43
Sitografia 43

© INDIRE 2014

Scheda generale

Nucleo a cui si riferisce il percorso

Numeri

Autori

Maria Rosa Ardizzone, Domenica Formica, Colomba Punzo

Grado scolastico

Scuola primaria – Classi dalla I alla V

Tematica affrontata

Numeri – Calcolare con le mani e con la mente. Alla scoperta delle operazioni e delle loro proprietà. Calcolo mentale e strumenti di calcolo.

Tempo medio per svolgere il percorso

12 ore

Obiettivi delle attività

- Sviluppare strategie per il calcolo mentale con numeri piccoli e grandi.
- Applicare in modo intuitivo le proprietà delle operazioni.
- Operare con le calcolatrici tascabili.
- Utilizzare il foglio di calcolo excel per eseguire operazioni con numeri piccoli e grandi, finalizzate allo sviluppo del calcolo mentale.

© INDIRE 2014

Riferimenti curricolari

Indicazioni curricolari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni Curricolari attualmente in vigore (D.M. 16 novembre 2012, n. 254) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni Curricolari e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

Indicazioni curricolari: riferimenti

Traguardi per lo sviluppo delle competenze al termine della scuola primaria

L'alunno si muove con sicurezza nel calcolo scritto e mentale con i numeri naturali e sa valutare l'opportunità di ricorrere a una calcolatrice.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

Numeri

Eseguire mentalmente semplici operazioni con i numeri naturali e verbalizzare le procedure di calcolo.

Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria

Numeri

Eseguire le quattro operazioni con sicurezza valutando l'opportunità di ricorrere al calcolo mentale, scritto o con la calcolatrice a seconda della situazione.

© INDIRE 2014

Prove INVALSI

a.s. 2008/2009 – Domanda D15

Scuola primaria – Classe II

15. Quale delle seguenti operazioni dà lo stesso risultato di 15 + 25?

- ☐ A. 20 + 20
- ☐ B. 15 + 15
- ☐ C. 60 – 25

Soluzione INVALSI: **A**

Commento

L'alunno solitamente esegue le quattro addizioni mettendo in colonna. Il calcolo mentale gli consente di individuare la risposta corretta molto più rapidamente osservando che 15+(20+5) = 15+20+5 = 15+5+20 = (15+5)+20 =20+20 = 40. L'alunno, senza rendersene conto, applica le proprietà associativa e commutativa dell'addizione.

© INDIRE 2014

a.s. 2009/2010 – Domanda D12

Scuola primaria – Classe V

D12. Cinzia usa la calcolatrice per moltiplicare 27 e 34. Si sbaglia e digita sulla tastiera 27 × 33. Per correggere il suo errore deve aggiungere al risultato:

- ☐ A. 34
- ☐ B. 1
- ☐ C. 33
- ☐ D. 27

Soluzione INVALSI: **D**

Commento

Per rispondere l'alunno solitamente esegue le due moltiplicazioni (*27 x 34 e 27 x 33)* e poi la sottrazione tra i risultati. Il calcolo mentale gli consente di trovare la risposta più rapidamente applicando alcune proprietà della moltiplicazione (associativa e distributiva):

27x34 = 27x(33+1) = (27x33)+(27x1) = (27x33)+27.

Quindi basta che aggiunga 27.

© INDIRE 2014

a.s. 2008/2009 – Domanda D1

Scuola primaria – Classe II

1. Chi tra Anna, Barbara e Chiara ha fatto il calcolo giusto?

☐ A. Anna

☐ B. Barbara

☐ C. Chiara

Soluzione INVALSI: A

Commento

Mentalmente si esclude la terza risposta ricordando che “pari + dispari” è “dispari”; si esclude anche la seconda risposta guardando l’ordine di grandezza del risultato: 18 + 13 non può fare 21.

© INDIRE 2014

a.s. 2008/2009 – Domanda D7

Scuola primaria – Classe II

7. Trova il numero che è nascosto dalla macchia:

✸ − 18 = 7

☐ A. 11

☐ B. 15

☐ C. 25

Soluzione INVALSI: C

Commento

Basta osservare, senza fare calcoli, che il numero cercato deve essere più grande di 18.

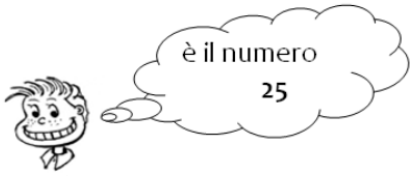
© INDIRE 2014

a.s. 2008/2009 – Domanda D8

Scuola primaria – Classe II

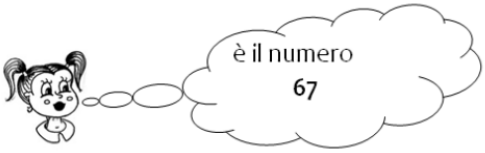
8. Carlo pensa un numero, aggiunge 26 e ottiene 41.
Chi tra Matteo, Laura e Chiara indovina il numero che Carlo ha pensato?

☐ A. Matteo



☐ B. Laura

☐ C. Chiara



Soluzione INVALSI: B

Commento

Si procede mentalmente per esclusione: il numero cercato deve essere più piccolo di 41, quindi non può essere 67; per decidere tra la risposta A e B si applicano le proprietà associativa e commutativa dell'addizione: 26 + 25 = (25 + 1) + 25 = 25 + 25 + 1 = 50 + 1 = 51. Quindi si esclude anche la risposta A.

© INDIRE 2014

a.s. 2008/2009 – Domanda D17

Scuola primaria – Classe II

17. Quale tra queste operazioni dà il risultato minore?

- ☐ A. 105 – 3
- ☐ B. 98 – 3
- ☐ C. 102 – 3

Soluzione INVALSI: B

Commento

Poiché si sottrae sempre lo stesso numero, basta guardare il primo termine (minuendo) che deve essere il più piccolo dei tre. Non conviene fare il calcolo.

© INDIRE 2014

a.s. 2011/2012 – Domanda D3

Scuola primaria – Classe II

D3. Sandra ha nel borsellino queste monete:

a. Quanto ha Sandra nel borsellino?

Risposta: ..... centesimi

b. Sandra con le monete che ha nel borsellino vuole comprare dei cioccolatini. Ogni cioccolatino costa 30 centesimi. Quanti cioccolatini può comprare al massimo?

Risposta: ..... cioccolatini

Soluzione INVALSI:

a: 93

b: 3

Commento

Raggruppando le monete per valore, il calcolo può essere eseguito mentalmente: (20+20+20) + (10+10) + (5+5) +2 + 1 = 60+20+10+2+1 = 93

© INDIRE 2014

Introduzione all'attività

"La costruzione del pensiero matematico è un processo **lungo e progressivo** [1] nel quale concetti, abilità, competenze e atteggiamenti vengono ritrovati, intrecciati, consolidati e sviluppati a più riprese; è un processo che comporta anche difficoltà linguistiche e che richiede un'acquisizione graduale del linguaggio matematico", così nelle *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo di istruzione*.

L'obiettivo primario dell'attività è quello di far superare nell'allievo la resistenza a eseguire i calcoli "a mente", rendendo esplicite le diverse possibili strategie di calcolo e aiutando l'allievo a trasferire le competenze acquisite in altri ambiti e contesti. La discussione e l'interazione continua con i coetanei e con i docenti costituiscono l'approccio metodologico necessario per raggiungere questo obiettivo.

Fin dai primi giorni della classe prima, si invitano gli allievi a "usare" la prima calcolatrice trasportabile e sempre disponibile: le 5 e le 10 dita delle mani.

Negli anni successivi si propongono esperienze matematiche più complesse dove le proprietà delle operazioni (commutativa, associativa, distributiva, invariantiva, ecc.) sono applicate in forma intuitiva. Il calcolo mentale è tutto l'insieme di piccole e grandi strategie, che permettono di arrivare rapidamente al risultato.

---

[1] Confrontare strategie, esplicitare le proprie congetture, individuare soluzioni e saperle argomentare contribuisce allo sviluppo delle capacità cognitive e del pensiero matematico. L'indagine sulla natura dei numeri, sulle quattro operazioni e sulle loro proprietà contribuisce allo sviluppo del pensiero critico dell'allievo, teso a consolidare un approccio costruttivo e consapevole all'uso delle tecnologie.
L'attività qui presentata offre ai docenti alcuni spunti di lavoro, aperti, che possono essere articolati in un continuo divenire (J. Bruner), in un passaggio tra diversi livelli di complessità, sviluppando le idee e i concetti matematici "portanti" nell'insegnamento della matematica nella scuola primaria. Lo sviluppo del pensiero critico aiuta ad adattare le conoscenze acquisite ai vari contesti che si presentano nelle esperienze quotidiane degli allievi per tutto il corso della loro vita. L'educazione, secondo Bruner, deve favorire uno scambio tra l'ambiente e il soggetto, che è parte attiva nella costruzione della propria rappresentazione del mondo.

© INDIRE 2014

L'uso della scrittura e del calcolo scritto deve diventare, in alcuni casi, un supporto, un'opportunità per verificare l'esattezza del risultato. Così pure l'uso delle calcolatrici tascabili e del foglio di calcolo.

Le occasioni per introdurre il calcolo mentale in classe scaturiscono da situazioni di vita quotidiana: il conteggio del resto quando si fanno acquisti, il calcolo della mancia settimanale o mensile, la valutazione dell'ordine di grandezza delle spese che si possono effettuare in relazione alle effettive disponibilità, e così via.

© INDIRE 2014

Attività 1 – All'inizio sono le mani

L'attività qui presentata propone esperienze matematiche tese a sviluppare le competenze del calcolo mentale. A tal fine sono suggerite modalità di interazione costruttiva in classe per indurre gli allievi a usare la potente calcolatrice che ciascuno di noi ha: "la mente".

Fin dai primi giorni di scuola i bambini contano caramelle, figurine, macchinine, i giorni, i compagni, ecc. Usano, a volte, le dita delle mani. Questo percorso sul calcolo mentale ha l'ambizione di restituire al "fare i conti a mente" uno spazio più ampio e significativo nel curricolo di matematica dalla prima alla quinta classe, accompagnando docenti e allievi alla scoperta del valore formativo delle strategie di calcolo, dei concetti e dei passaggi logico-formali usati per arrivare al risultato corretto. L'obiettivo è quello di favorire, attraverso lo sviluppo di strategie di calcolo fondate sulle proprietà delle operazioni, la consapevolezza di tali proprietà, e lo sviluppo di processi di controllo. In concreto, si tratta di individuare *scorciatoie di calcolo*, evitando quando possibile il ricorso al **calcolo scritto**[2] e usando, fin di primi giorni di scuola, gli strumenti "naturali" di cui ognuno di noi, fin da piccolo, dispone: le mani.

Un numero chiave nel nostro lavoro è il 10, la base del nostro sistema di numerazione. Le 10 dita delle nostre mani ci vengono in aiuto. Fin dai primi giorni della classe prima il docente sollecita i bambini a utilizzare questo strumento, sempre "a portata di mano".

[2] Gli uomini, prima di fare uso di primitive forme di scrittura, contavano animali, giorni, persone ecc., ricorrendo a diverse strategie per risolvere i loro problemi nella vita quotidiana. La scrittura e l'uso di simboli per la rappresentazione di oggetti concreti o astratti è una delle tappe nella storia dell'umanità e segna un passaggio determinante nello sviluppo delle "primitive" capacità intuitive e operative dell'uomo. È un processo che ha analogie con quello che stiamo vivendo, oggi, in relazione allo sviluppo delle tecnologie informatiche e della rete. Gli eBook, così come gli smartphone e i tablet sempre connessi a Internet, assediano il regno della carta stampata gutenberghiana e sembrano voler soppiantare le abilità manuali: la mano di chi scrive, disegna, dipinge ecc. Sono strumenti e processi che devono arricchire le potenzialità dell'uomo di oggi, anziché sostituirle o rimpiazzarle. Ai nativi digitali che vivono, fin dai primi anni di vita, in simbiosi con tecnologie e protesi tecnologiche messe a disposizione dalle ricerche più avanzate e divenute parte integrante della nostra identità, vanno riproposte e fatte riscoprire le potenzialità manuali e mentali "altre". Nel percorso scolastico vanno proposte attività formative che consentano lo sviluppo e l'acquisizione di abilità in grado di interagire in modo costruttivo e critico con questo mondo tecnologico, destinato a modificare ritmi e tempi della nostra quotidianità.

© INDIRE 2014

Si comincia con una mano (5), poi si aggiunge l'altra (10) e poi ancora le mani di un compagno (20) per effettuare calcoli oltre il 10. Comporre e scomporre il 10, trovare i suoi multipli diventa strategico per avviare gli allievi al calcolo mentale. In genere nella scuola primaria, e non solo, si dedica molta attenzione al calcolo scritto, agli algoritmi tradizionali per eseguire le operazioni. Il calcolo mentale diventa un'attività quasi residuale. Le proposte che seguono dovrebbero colmare questa lacuna e incuriosire i docenti, aiutandoli a trovare le occasioni adatte e i contesti per promuovere gare e giochi in classe.
Si suggerisce di presentare sempre la situazione "problema", ponendo domande e dando consegne chiare per stimolare gli allievi a proporre le proprie "soluzioni". La discussione in classe scaturisce dal confronto tra le diverse ipotesi di soluzione. Si individuano insieme le scorciatoie di calcolo più efficaci e si esplicitano le proprietà matematiche che stanno alla base di tali scorciatoie, in base alle competenze e all'età degli allievi. Le "dimostrazioni", o meglio le spiegazioni del perché è lecito usare una strada per eseguire velocemente un calcolo, richiedono spesso il calcolo algebrico; naturalmente, il docente dovrà usare le opportune cautele, limitandosi spesso ad illustrare un procedimento senza giustificarlo e senza anticipare il calcolo algebrico.

Il percorso è pensato per tutte le classi della scuola primaria, ed è suddiviso in più fasi. Ecco un indice sommario che segna le diverse tappe e che può essere utile al docente per la progettazione:

- le coppie amiche di 5 e 10 e gli amici del 20 (prima classe);
- operare con numeri che hanno per somma 10 (dalla classe terza);
- moltiplicare e dividere per 10, 100, 1000 (seconda o terza classe);
- moltiplicare e dividere per 5 e per 25 (dalla terza classe);
- calcolo di quadrati;
- moltiplicazione di due numeri compresi tra 10 e 20 (dalla quarta classe);
- scorciatoie per il 9: prodotti ecc. (dalla classe terza);
- strutture additive e moltiplicative (classe quinta);
- qualche proprietà delle operazioni (commutativa, associativa e distributiva) in forma intuitiva.

© INDIRE 2014

Fase 1 – Il gioco delle "coppie amiche"

Per la Classe I

Si propone la seguente situazione/stimolo.

Quali di queste somme è uguale a 5? Chi ha ragione? Alberto, Franca, Valeria, Giovanni o Angela?

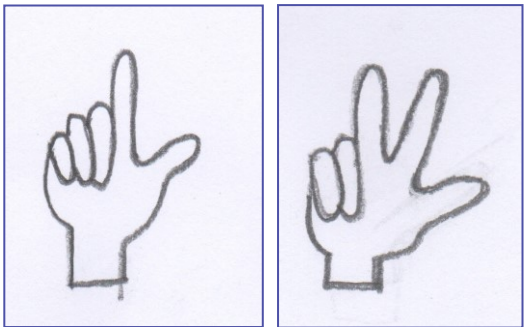
Si chiede ai bambini di spiegare le risposte e di esplicitare in che modo hanno ottenuto il risultato.

Il docente chiede poi ai bambini di mostrare, sempre con riferimento alle due mani, le **coppie amiche del 5**. Usiamo questa terminologia per indicare due numeri che abbiano 5 come somma e indichiamo ciascun numero con le dita di una mano. Con qualche tentativo, non sarà difficile individuare tutti i modi possibili per "comporre" il numero 5 usando le due mani.

A questo punto, il docente registra le coppie amiche del cinque: 1+4; 2+3; 3+2; 4+1 (probabilmente, qualche bambino obietterà che 1+4 e 4+1 rappresentano la stessa coppia, ma, a questo livello, è preferibile tenere distinti i due casi, perché si rappresentano in modo diverso).
Il gioco può continuare con l'insegnante che mostra alcune dita di una mano e chiede quale sia il numero da associare per ottenere una coppia amica del 5. In sostanza,

© INDIRE 2014

l'insegnante mostra una mano tenendo alcune dita sollevate e i bambini devono dire quante sono le dita abbassate.



Ora si introduce anche il numero zero. Come si rappresenta? Si chiede ai bambini di mostrare lo "zero" con le mani. Se la soluzione non viene dai bambini, sarà il docente a mostrare il pugno chiuso. Si aggiungono così le coppie 0+5 e 5+0.

È necessario che i bambini, in una fase preliminare, si siano esercitati ad associare i numeri da 0 a 5 alla quantità delle dita della mano mostrate dall'insegnante. L'attività si deve svolgere "velocemente", in modo da inibire il conteggio delle dita a una a una.

Questa attività può essere accompagnata con la filastrocca dei numeri (contare per contare), con esercizi di lettura e scrittura dei numeri entro il 5, e va svolta prima dell'introduzione delle tecniche per le operazioni di addizione e sottrazione.

L'insegnante deve condurre l'attività in modo operativo e giocoso: si deve "giocare" con le proprie mani. Si può anche chiedere ai bambini di nascondere le mani e immaginare che cosa accade.

© INDIRE 2014

Fase 2 – Ancora coppie amiche

Coppie amiche del 5

Per la Classe I

Per continuare a lavorare sulle *coppie amiche del 5*, si passa a piccoli oggetti che possono essere racchiusi nella mano di un bambino (gettoni, bottoni, ecc). L'insegnante ne preleva qualcuno da un gruppo formato da 5 oggetti contati prima e posti su un tavolo. L'insegnante mostra la mano chiusa e chiede:

Quanti oggetti ho in mano?

La risposta va data guardando gli oggetti rimasti sul tavolo. L'insegnante ripete successivamente l'attività dichiarando il numero degli oggetti che ha in mano e chiedendo quanti sono rimasti sul tavolo (pensando che ora gli oggetti sul tavolo siano nascosti).
In entrambi i casi la correttezza delle risposte viene verificata contando gli oggetti. I bambini a turno riproducono il gioco.

Il passaggio a semplici rappresentazioni consente di consolidare il processo di astrazione. All'inizio le rappresentazioni sono spontanee, in un secondo momento devono essere guidate dal docente.
L'insegnante ora pone la domanda:

Siamo sicuri di avere trovato tutte le coppie amiche del 5?
Come si può fare per essere sicuri di avere trovato tutti i modi possibili per formare 5?

L'insegnante conduce l'attività coinvolgendo tutti i bambini. Li invita a esplicitare le risposte e continua con altre domande stimolo:

Quanti modi hai trovato? Quali?

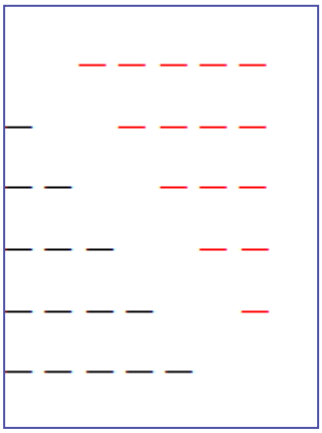
© INDIRE 2014

Registra le risposte alla lavagna in modo da facilitare il confronto delle risposte degli alunni. Capiterà spesso che i bambini ripropongano una possibilità già individuata; sarà cura dell'insegnante far notare la ripetizione, senza scoraggiare.

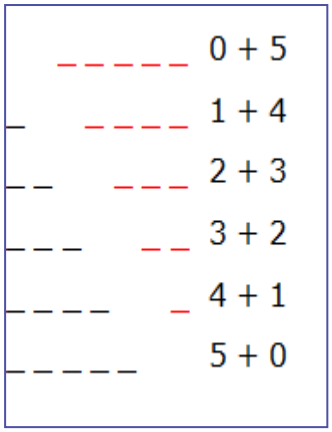
Per introdurre una nuova rappresentazione, si riprende la domanda:

Come possiamo disporre i gettoni, per essere sicuri di avere rappresentato tutti i casi?

Alla fine, l'insegnante suggerisce il seguente schema per rappresentare le coppie amiche:



Mediante questa rappresentazione ordinata, il docente ritrova le coppie amiche già viste:



© INDIRE 2014

Il numero delle coppie amiche è 6.

L'attività può essere approfondita con i numeri in colore. L'uso dei numeri in colore aprirà un'ulteriore riflessione sul numero "zero", perché non esiste alcun numero in colore con valore "zero" [guarda il video https://youtu.be/kL_ntc66lxU]

Coppie amiche del 10

L'esperienza può essere ripetuta con altri numeri, per esempio, cercando le "*coppie amiche*" del numero 10. In tal modo si potranno cogliere la regolarità delle rappresentazioni e il legame tra il numero di partenza e il numero delle coppie amiche (partendo da 10, avremo 11 coppie amiche, ecc.).
È importante riuscire a rendere familiari ai bambini queste prime semplici situazioni additive.

Nell'attività si individuano i seguenti nodi:

- il passaggio da una situazione riferita al proprio corpo (o a quello dell'insegnante) a una situazione rappresentata mediante oggetti, simboli iconici e infine simboli numerici;
- la ricerca di un metodo sistematico nell'esplorazione di situazioni problematiche, a partire da tentativi;
- l'uso della rappresentazione come generatrice di un nuovo problema, all'interno della situazione problematica più generale;
- il riconoscimento dello zero come numero.

© INDIRE 2014

Coppie amiche del 20

Andiamo oltre il numero 10. In una prima fase si possono invitare gli alunni a lavorare in coppia e così le mani per contare diventano 4. Osserviamo le strategie e invitiamo i bambini a condividerle, cercando sempre di fare in modo che i bambini "giochino" con i numeri.

Parlando degli *amici del 20*, è opportuno non limitarsi solo a coppie, ma scomporre 20 nella somma di più di due numeri.

Trova il numero o i numeri nascosti:

… + 17 = 20

10 + … + … = 20 *(attenzione: in questo caso e nei successivi ci sono più risposte corrette)*

… + … + 5 = 20

6 + … + … = 20

… + 4 + … = 20

16 + … + … = 20

E ora si chiede ai bambini di trovare altre espressioni, eventualmente usando i numeri in colore.

Fase 3 – Una calcolatrice: le mani

Dalla Classe II in avanti

Alla fine della classe seconda si può presentare il seguente gioco con le mani per il potenziamento delle tabelline, presentando un modo “antico” per fare rapidamente il calcolo.

Prodotto di due numeri compresi tra 5 e 10

Si tratta di un procedimento pratico per calcolare il prodotto di due numeri compresi tra 5 e 10, conoscendo i prodotti dei numeri compresi tra 1 e 5. Vediamo, per esempio, come si procede se si vuole calcolare 7×9.

© INDIRE 2014

7×9

a. Si lasciano tese 2 dita della mano sinistra, tante quante sono le unità in 7 che superano il 5 (cioè 7−5 dita), e si piegano le altre.
b. Si lasciano tese 4 dita della mano destra per rappresentare il 9 (9−5 = 4) e si piega l'ultimo dito.
c. Si moltiplica per 10 il numero ottenuto contando tutte le dita tese: si ottiene (2+4)×10 = 60.
d. Si moltiplicano i numeri delle dita piegate: 3×1 = 3.
e. Il prodotto 7×9 è uguale alla somma dei due numeri ottenuti: 7×9 = 60 + 3 = 63.

Vedi anche il video https://youtu.be/J6H3aupPdSQ

Il procedimento visto si giustifica ricorrendo al calcolo algebrico (che gli studenti incontreranno nei successivi livelli scolastici).

Siano a e b due numeri interi compresi tra 5 e 10. Nel nostro caso $a = 7$, $b = 9$.

Dita distese: $a - 5$ $\qquad$ $b - 5$

Dita piegate $5 - (a - 5) = 10 - a$ $\qquad$ $5 - (b - 5) = 10 - b$

Eseguendo le operazioni indicate, si ha:

$10\,[(a - 5) + (b - 5)] + (10 - a)(10 - b) =$

$= 10a - 50 + 10b - 50 + 100 - 10b - 10a + ab = ab.$

Prodotto di due numeri compresi tra 10 e 15

Con un procedimento leggermente diverso è possibile moltiplicare due numeri compresi tra **10 e 15.**

Ad esempio, per eseguire il prodotto 12×14, si procede così

© INDIRE 2014

12x14

a. Si lasciano tese 2 dita della mano sinistra, tante quante sono le unità in 12 che superano il 10 (cioè 12−10 = 2); si piegano le altre 3 dita.
b. Si lasciano tese 4 dita della mano destra (14−10 = 4) per rappresentare il 14; si piega l'ultimo dito.
c. Si moltiplica per 10 il numero complessivo delle dita tese: (2 + 4)×10= 60.
d. Si moltiplicano fra loro i numeri delle dita tese nelle due mani: 2×4 = 8.
e. Il prodotto 12×14 si ottiene sommando 100 ai due numeri ottenuti: 12×14 = 100 + 60 + 8 = 168.

Vedi anche il video https://youtu.be/pOFdWuuOuWc

Anche questo procedimento si giustifica ricorrendo al calcolo algebrico.

Siano c e d due numeri interi compresi tra 10 e 15. Nel nostro caso c = 12, d = 14.

Dita tese: c – 10 d – 10

Eseguendo le operazioni indicate, si ha:

10 [(c – 10) + (d – 10)] + (c – 10) (d – 10) + 100 =

= 10c –100 + 10d – 100 + cd – 10c – 10d + 100 + 100 = cd

In modo analogo si può calcolare il prodotto di due numeri m, n maggiori di 20:

20 [(m – 20) + (n – 20)] + (m – 20) (n – 20) + 400 = mn.

E, volendo, si può sostituire a 20 un qualunque altro numero preso come riferimento, di cui si conosca il quadrato.

© INDIRE 2014

Attività 2 – Oltre le mani

Fase 1 – Cifre che hanno per somma 10

Dalla fine della Classe III alla IV

Si riparte dal 10. Si chiede agli allievi di ripensare alle *coppie amiche* di 10. Consideriamo per esempio la coppia 2 e 8.

Il docente chiede agli allievi di compilare una tabella di prodotti di due numeri di due cifre, che hanno la stessa cifra delle decine e che terminano rispettivamente con 2 e con 8. Si suggeriscono le prime moltiplicazioni.

2×8 = ...
12×18 = ...
22×28 = ...

Si invitano gli allievi calcolare i prodotti e a continuare:

32×38 = ...
42×48 = ...

Si completa la tabella con i risultati trovati e condivisi.

2×8 = 16
12×18 = 216
22×28 = 616
32×38 = 1216
42×48 = 2016
52×58 = 3016

Ora è il momento di fare qualche osservazione insieme:

© INDIRE 2014

Ci sono cifre che si ripetono? Quali? In che posizione?

16 è il risultato del primo prodotto.

*Negli altri prodotti compare ancora il **16**? Dove?*
E le prime cifre dei prodotti hanno qualcosa che li accomuna? Come si possono ottenere?

Mentre è chiaro che tutti i prodotti terminano con "16", non è immediato rilevare che le prime cifre del risultato sono il prodotto della cifra delle decine per la cifra stessa aumentata di 1 unità. Per esempio, per calcolare 42×48, si moltiplica 4 per 4+1, cioè 4 per 5; si ottiene 20, a cui si aggiungono le cifre 1 e 6. Il risultato è 2016.
Si può arrivare a questa scoperta con domande mirate da parte del docente e con vari tentativi.

Nota per l'insegnante

Il docente trova una giustificazione algebrica del procedimento nella sezione ***Approfondimenti disciplinari***

Ora si estende la stessa strategia di calcolo ad altre coppie amiche del 10, come 3+7 oppure 4+6. Si può proporre agli allievi una prova di abilità nel calcolo. Chi risponde per primo/a propone l'operazione successiva. Si comincia:

23×27 = ... (2×3 = 6 e 3×7 = 21: il prodotto è 621)
34×36 = ... (3×4 = 12 e 4×6 = 24: il prodotto è 1224)

Vale la pena di soffermarsi, in particolare, sulla coppia 5+ 5. Anzi, se l'insegnante lo ritiene opportuno, si può partire proprio da questa situazione particolare.
Chiediamo agli allievi di calcolare i prodotti:

© INDIRE 2014

5×5 = ...

15×15 = ...

25×25 = ...

35×35 = ...

Si scoprirà che tutti i prodotti terminano per "25"; e che, come prima, le cifre precedenti si ottengono moltiplicando la cifra delle decine per il suo successivo.
Per esempio:

35×35 = 1225 (3×4 = 12 e 5×5 = 25)

65×65 = 4225 (6×7 = 42 e 5×5 = 25)

Una volta che il metodo è stato capito, si invitano gli allievi a eseguire calcoli a mente e a verificare il risultato con la calcolatrice.

45×45 = 2025

55×55 = 3025

L'obiettivo è quello di aiutare i ragazzi a individuare regolarità, nonché a eseguire il calcolo a mente, senza usare l'algoritmo "classico" della moltiplicazione.

DA RICORDARE

- se le cifre delle unità sono 2 e 8, i prodotti terminano con 16 = 2×8
- se le cifre delle unità sono 5 e 5, i prodotti terminano con 25 = 5×5
- le altre cifre, in tutt'e due i casi, si comportano secondo un modello comune.

Va sempre tenuto ben presente che il procedimento funziona solo se partiamo da coppie amiche del 10 (2+8 = 10 e 5+5 = 10).

© INDIRE 2014

Fase 2 – Il foglio di calcolo

Dalla fine della Classe III alla IV

Se l'insegnante lo ritiene opportuno, si può proporre quanto già visto con un foglio di calcolo.

Cifre delle unità

3	**7**

3+7 = 10

cifra delle decine	primo fattore	secondo fattore	**prodotto**
0	3	7	**21**
1	13	17	**221**
2	23	27	**621**
3	33	37	**1221**
4	43	47	**2021**
5	53	57	**3021**
6	63	67	**4221**
7	73	77	**5621**
8	83	87	**7221**
9	93	97	**9021**

Le cifre dell'unità, anche in questi prodotti, sono coppie amiche del 10. Presentano, quindi, le stesse caratteristiche dei prodotti precedenti.
Osservando i prodotti, si possono riproporre domande che aiutino gli allievi a scoprire analogie fra le varie righe.

© INDIRE 2014

Come sono le ultime due cifre? E le prime due cifre?

Si prosegue con altri prodotti, con il supporto di un foglio di calcolo o eventualmente di una calcolatrice.

12×18 = 216	ha per cifre finali il prodotto di ... e come prima cifra il ...
15×15 = 225	ha per cifre finali il prodotto di ... e come prima cifra il ...
13×17 = 221	ha per cifre finali il prodotto di ... e come prima cifra il ...
...	...
22×28 = 616	ha per cifre finali il prodotto di ... e come prima cifra il ...
25×25 = 625	...
23×27 = 621	...
...	...
52×58 = 3016	...
55×55 = 3025	...
53×57 = 3021	...
...	...

Tab. 1

12×18 = 216	ha per cifre finali il prodotto di **2×8** e come prima cifra il **2**
15×15 = 225	ha per cifre finali il prodotto di **5×5** e come prima cifra il **2**
13×17 = 221	ha per cifre finali il prodotto di **3×7** e come prima cifra il **2**
...	...
22×28 = 616	ha per cifre finali il prodotto di **2×8** e come prima cifra il **6 = 2×3**
25×25 = 625	...
23×27 = 621	...
...	...
52×58 = 3016	...
55×55 = 3025	...
53×57 = 3021	...
...	...

Tab. 2

Ogni volta, si osservano le regolarità e si invitano i bambini a esprimerle a parole. Come già detto, la cosa più difficile da capire è che, in tutti i casi, le prime due cifre si ottengono moltiplicando la cifra delle decine per la cifra stessa aumentata di 1 unità.

© INDIRE 2014

Ecco una rappresentazione che il docente può proporre agli allievi per approfondire questa strategia.

52×58 =

Le prime due cifre si ottengono con 5×(5+1). E le ultime due cifre con 8×2

↓ **30** ↓ **16**

Il risultato è **3016**.

Siamo pronti per eseguire altre moltiplicazioni con numeri grandi che hanno le stesse caratteristiche. Lanciamo la sfida in classe.

Chi è il più veloce nel calcolo?

In questa situazione, un bambino che abbia acquisito familiarità con il procedimento potrà trovare il risultato con il calcolo mentale più velocemente rispetto a un compagno che usi uno strumento di calcolo.

Calcola a mente e verifica con la calcolatrice
84×86 =
73×77 =
72×78 =
91×99 =

È importante che i bambini capiscano che, in certi casi, il calcolo mentale risulta più rapido di una calcolatrice.

È anche utile proporre un certo numero di prodotti già eseguiti (come i seguenti) e chiedere di trovare gli errori:

52×58 = 3018 82×88 = 7216
51×59 = 309 54×56 = 3024

© INDIRE 2014

63×67 = 2142 96×94 = 9024

Fase 3 – Moltiplicare per 10, 100, 1000 e oltre

Dalla fine della Classe III alla IV

Ogni volta che si deve moltiplicare per 10 si spostano le cifre verso sinistra di un posto, aggiungendo uno zero a destra. Questo discende dal fatto che il nostro sistema di numerazione è in base 10. Gli allevi interiorizzano, quasi sempre, questo procedimento, che alla fine diventa un automatismo. Ma deve essere ben compresa la giustificazione di questo automatismo perché, quando si opera con numeri decimali o si devono fare divisioni per 10, 100, 1000 e oltre, se le idee non sono chiare, si incorrere spesso in errori. E allora vale la pena proporre agli allievi di rappresentare il procedimento con le tabelle seguenti:

×10

			1	3
		1	3	0

×100

			2	3
	2	3	0	0

×1000

			5	3
5	3	0	0	0

E così via. È richiesto agli allievi di continuare con altri numeri. Via via, lo schema sarà abbandonato e si chiederà una risposta senza calcoli scritti.

© INDIRE 2014

Ci si comporta in modo analogo quando si deve dividere per 10, per 100, ecc.
Una volta introdotti i numeri decimali, sarà bene proporre moltiplicazioni e divisioni del tipo:

3,5×10, 7,2×100, 45:10, 0,2:10, ecc.

All'inizio sarà bene eseguire i calcoli con carta e penna, eventualmente con l'aiuto di schemi come le tabelle precedenti; poi si passerà al calcolo mentale. In entrambi i casi, è sempre utile un *controllo* dell'ordine di grandezza del risultato.
Per esempio, quando eseguo il prodotto 8,61×10, mi devo aspettare un risultato poco più grande di 8×10 = 80.

Fase 4 – Moltiplicare per 5

Dalla fine della Classe III alla IV

Poniamo una domanda agli allievi:

Saper moltiplicare per 10, ci aiuta a moltiplicare per 5 senza fare calcoli scritti?

Ovviamente 10 = 5×2.
Chiediamo allora di calcolare a mente 5×32. Come si procede? Raccogliamo le congetture degli allievi, insistendo sul fatto che 5 è la metà di 10.
Con una discussione guidata dall'insegnate, si arriva al seguente procedimento:

PROCEDIMENTO

1. si calcola la metà di 32
   32:2 = 16
2. si moltiplica 16×10
   16×10 = 160

Il numero ottenuto è il risultato 32×5 = 160.

(Naturalmente, si ottiene lo stesso risultato moltiplicando prima per 10 e poi calcolando la metà del prodotto).

© INDIRE 2014

Proponiamo altri esempi, in cui si moltiplica per 5 un numero pari (24, 62, 328, 604, …); si può anche lanciare una sfida tra i ragazzi.

In modo più o meno esplicito, si cercherà di far capire che, siccome 5 è la metà di 10, moltiplicare per 5 equivale a "moltiplicare per 10 e poi dividere per 2", oppure a "dividere prima per 2 e poi moltiplicare per 10".

Il metodo funziona anche con numeri dispari, ma richiede più attenzione e comunque risulta meno rapido. Per esempio, per calcolare 23×5, si deve prima trovare la metà di 23 (cioè 11,5) e poi moltiplicare per 10: il prodotto è 115.
Ora si può chiedere agli allievi di moltiplicare a mente un numero pari per 50, 500, 5000:

8×50, 18×50, 6×500, ecc.

Come si procede?

È sempre di fondamentale importanza prestare attenzione all'ordine di grandezza del risultato (qualunque metodo di calcolo venga usato), in modo da correggere eventuali errori.

Fase 5 – Moltiplicare per 25

Classi IV e V

Anche per la moltiplicazione di un numero per 25 ci sono scorciatoie.
Facciamo notare che 25 = 100:4. Detto questo, chiediamo agli allievi di calcolare 25×64.
Si richiama il procedimento visto per moltiplicare per 5 e si chiede se è possibile e come estendere la procedura al numero 25.
Con l'aiuto dell'insegnante, si individuano i passi da compiere:

© INDIRE 2014

PROCEDIMENTO

1. si divide 64 per 4
   64:4 = 16
2. si moltiplica 16 per 100
   16×100 = 1600

Il risultato è 25×64 = 1600.

Naturalmente, il procedimento è vantaggioso se il primo fattore è un multiplo di 4.

È importante fra capire agli allievi che, prima di affrontare un calcolo, bisogna "osservare" con attenzione i numeri e l'operazione da fare. In certi casi si arriva rapidamente al risultato con un calcolo a mente, in altri è utile un calcolo scritto, in altri ancora può essere opportuna una calcolatrice.

La matematica abitua a trovare le soluzioni più semplici ed efficaci nelle situazioni diverse. Il calcolo mentale con le sue diverse strategie ha anche questa finalità formativa.

© INDIRE 2014

Attività 3 - Le strategie più adatte

Fase 1 – Strategie di calcolo

Dalla Classe III in avanti

Il docente assegna alcuni calcoli e chiede agli allievi di trovare strategie adatte per arrivare al risultato in modo rapido. Si ascoltano e si rilanciano i suggerimenti e le argomentazioni degli allievi. Poi si invitano a registrare sul quaderno e sulla lavagna le procedure proposte.

Prima le addizioni e le sottrazioni

108 + 7 = 100 + (8 + 7) = 115

208 + 305 = (200 + 8) + (300 + 5) = (200 + 300) + (8 + 5) = 513

22 + 9 + 8 = (22 + 8) + 9 = 39

11 + 35 + 9 = (11 + 9) + 35 = ...

99 + 68 = 99 + 1 + 68 – 1 = 100 + 67= 167

Il docente può provare a verbalizzare quest'ultima procedura. Si tratta di aggiungere 1 al 99, e poi togliere 1 unità al secondo addendo. Il metodo usato negli esempi che seguono è analogo.

9 + 47 = 9 + (1 + 46) = 10 + 46 = 56
98 + 15 = 98 + (2 + 13) = (98 + 2) + 13 = 113
80 + 45 = 80 + (20 + 25) = (80 + 20) + 25 = 125
112 − 104 = (100 + 12) − (100 + 4) = 12 − 4
132 − 19 = 133 − 20 = 100 + (33 – 20) = 113

© INDIRE 2014

$336 - 99 = (336 + 1) - (99 + 1) = 337 - 100 = 237$

Nelle uguaglianze abbiamo applicato proprietà delle operazioni (proprietà commutativa e associativa dell'addizione, ecc.). Negli ultimi esempi abbiamo usato la proprietà invariantiva della sottrazione: la differenza di due numeri non cambia se aggiungiamo ad entrambi uno stesso numero.
In generale, un uso attento, anche se non pienamente consapevole, delle proprietà delle operazioni permette, in molti casi, di arrivare al risultato senza calcoli scritti.
Per un riepilogo delle principali proprietà delle operazioni, si veda la sezione "Spunti per un approfondimento disciplinare".

E poi le moltiplicazioni

Il docente chiede agli allievi di trovare la strada più veloce per eseguire alcuni prodotti:

$5\times14 = (5\times2)\times7 = 70$
$13\times20 = (13\times2)\times10 = 260$
$11\times60 = (11\times6)\times10 = 660$
$15\times6 = (15\times2)\times3 = 30\times3$
$45\times8 = (45\times2)\times4 = 90\times4 = 360$

Le ultime strategie di calcolo richiedono che si sappiano eseguire semplici scomposizioni dei numeri in fattori.

Questi calcoli suggeriscono un gioco.

Quando i ragazzi sanno eseguire velocemente semplici calcoli e sanno esplicitare le strategie utilizzate, si passa ad un'attività che richiede maggiore autonomia e iniziativa.
L'idea è di organizzare un gioco dove i ragazzi sono i protagonisti: inventano espressioni calcolabili a mente (facendo ricorso alle strategie di calcolo note) e trovano i risultati attivando le competenze di calcolo mentale acquisite.
Si divide la classe in gruppi che hanno il compito di inventare espressioni con una struttura analoga a quelle viste.

© INDIRE 2014

Si propone ora la gara:

SVOLGIMENTO DELLA GARA

1. I gruppi elaborano, in un tempo stabilito dal docente, gli esercizi e scrivono le espressioni su un foglio che viene piegato in due parti
2. Il docente, dopo aver verificato la congruenza tra l'esercizio elaborato dagli allievi e la consegna data, mette ciascun foglietto in una cesta
3. Ultimata la raccolta dei foglietti, l'insegnante dà il via alla gara che si può svolgere a livello individuale o per gruppi
4. L'insegnante estrae un foglietto e scrive alla lavagna l'esercizio
5. Il gruppo che per primo dà la risposta esatta conquista un punto
6. Esauriti i fogli depositati nella cesta, si procede al conteggio dei punti totalizzati
7. Si proclama il vincitore o i vincitori
8. Ai vincitori si dà la consegna di pensare ad altre espressioni da proporre ai compagni nei giorni successivi.

Il gioco può essere riproposto a distanza di qualche settimana, lasciando ai ragazzi il tempo di sedimentare le conoscenze acquisite.

Fase 2 - Strategie di calcolo con il 9

Dalla Classe III in avanti

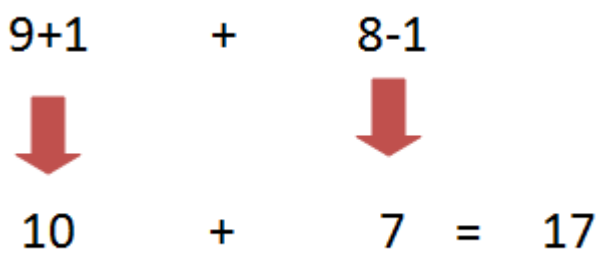
Prima le addizioni e le sottrazioni

Rivediamo con più attenzione alcuni calcoli che coinvolgono numeri come 9, 99, ecc.

Il docente inizia da casi molto semplici, aiutandosi con la lavagna o con opportuni cartoncini su cui sono scritti i numeri.

Inizia poi scrivendo un'addizione molto semplice, come 9 + 8, e chiede ai ragazzi di trovare la strategia più rapida per eseguire il calcolo.

Con l'aiuto dell'insegnante si arriverà ad uno schema come il seguente:



© INDIRE 2014

Una strategia analoga si può applicare quando si devono eseguire delle addizioni con 99 o con 98.
Per esempio:

99 + 68 = 100 + 68 – 1 = 100 + 67 = 167
98 + 57 = 100 + 57 – 2 = 100 + 55 = 155

Il docente può provare a verbalizzare la procedura. Si tratta aggiungere 1 al 9, o al 99, e poi togliere al risultato 1 unità.

La vicinanza con il 10, il 100 e il 1000 è un vantaggio!

E poi le moltiplicazioni
Ora passiamo alle **moltiplicazioni.**

Ricordiamo con gli allievi che la moltiplicazione è un'addizione ripetuta e quindi, in analogia con quanto accade con le addizioni, è possibile trovare strategie veloci di calcolo.

Partiamo da un moltiplicazione molto semplice:
9×8 = (10 − 1)×8 = (10×8) − 8 = 80 − 8.

Condividiamo con gli allievi questa uguaglianza e avviamo alcuni calcoli.
9×13 = (10 − 1)×13 = 130 − 13 = 117
9×25 = (10 − 1)×25 = 250 − 25 = 225

In modo analogo si opera con il 99 che è 100 − 1.

© INDIRE 2014

Indicazioni metodologiche

Da un punto di vista matematico, è interessante notare che la nostra numerazione posizionale permette di ritrovare proprietà dei numeri nella scrittura dei numeri stessi: pensiamo, ad esempio, al criterio di divisibilità dei numeri interi per 9: un numero è divisibile per 9 (proprietà del numero che non dipende dalla notazione) se e solo se è divisibile per 9 la somma delle sue cifre (riferimento alla notazione che usiamo per scrivere il numero). (Cfr. Lucilla Cannizzaro in *Seminario di formazione per docenti*, Quaderni MPI, n. 23, 1997).

Nei ragionamenti numerici i bambini fanno un uso implicito delle proprietà formali delle operazioni aritmetiche. La commutatività dell'addizione nasce dal principio dell'irrilevanza dell'ordine nel conteggio e da credenze e concezioni sull'addizione sviluppate in attività di tipo concreto. Per Vergnaud (1986) nell'azione pratica si manifestano veri e propri "teoremi in atto" inconsapevoli.

Si noti che, in genere, un bambino commette meno errori quando lavora a livello di significato rispetto a quando esegue procedure formali senza un contesto. Secondo Carpenter (1986) questa circostanza mostra che le competenze procedurali si fondano su quelle concettuali e anche che le sole conoscenze concettuali non portano a completa maturazione la destrezza nell'uso di procedure.

Eventuali difficoltà e suggerimenti

Le difficoltà principali risiedono nel fatto che le varie attività viste appaiono essenzialmente come "esercizi". Ciò dipende dalla natura del tema matematico proposto. Il docente deve creare in classe situazioni di gioco e di "sana" competitività tra gli allievi, stimolando la scoperta e la curiosità verso strategie di calcolo più veloci e efficaci. Il confronto con l'uso di una calcolatrice è un indubbio stimolo: è importante capire che si ricorre a una calcolatrice quando ce n'è bisogno, perché in varie situazioni un calcolo a mente è più rapido e più affidabile.

Potrà capitare che, in una classe, qualche bambino impari in fretta le varie strategie, mentre per altri sono necessari tempi più lunghi. Sarà cura dell'insegnante trovare situazioni anche diversificate, che pongano nuove piccole sfide al bambino più bravo, senza mai perdere gli altri.

© INDIRE 2014

Approfondimenti disciplinari

Dividere per 5 e per 25

Dalla fine della Classe IV alla V

Le strategie per eseguire mentalmente le moltiplicazioni per 5 e 25 ci inducono a supporre che ci siano scorciatoie anche per le divisioni per 5 e 25. Infatti è così. Negli ultimi due anni della Scuola primaria, i ragazzi conoscono e operano con i numeri decimali.

Presentiamo agli studenti una divisione per 5, ad esempio 32:5.

Vediamo come si può procedere:
32 : 5 = (32×2) : 10 = 64 : 10 = 6,4
Il risultato è 32 : 5 = 6,4

In generale, per dividere un numero per 5, basta moltiplicare quel numero per 2 e dividere il prodotto per 10.

Nota per l'insegnante

Ecco la procedura per il docente:

N : 5 = (2×N) : (2×5) = 2N : 10

In modo analogo si procede per dividere un numero per 25, ricordando che 25 = 100:4
Per esempio, per calcolare 9:25 si può procedere così:
(9×4) : (25×4) = 36 : 100 = 0,36.

Nota per l'insegnante

Ecco la procedura per il docente:

N : 25 = (4×N) : (4×25) = 4N : 100

© INDIRE 2014

Calcolo di quadrati

Riprendiamo l'attività 2 (fase 1) e consideriamo il quadrato di un numero che termina con 5:

55×55 = 3025 (si calcola 5 per 6, e poi si aggiungono le cifre 25)
65×65 = 4225 (si calcola 6 per 7, e poi si aggiungono le cifre 25)
ecc.
Lo stesso metodo si può applicare anche a numeri maggiori di 100, ma è necessaria un po' di attenzione. Per esempio:

105×105 = 11025 (si calcola 10 per 11 e si ottiene 110, e poi si aggiungono le cifre 25);

205×205 = 42025 (si calcola 20 per 21 e si ottiene 420, e poi si aggiungono le cifre 25).

Giustifichiamo alcune procedure

A proposito delle cifre che hanno per somma 10

(Attività 2/Fase 1)

Il caso più semplice è il quadrato di un numero che termina con la cifra 5. Infatti, detto d il numero delle decine, il numero considerato si può scrivere come d×10 + 5.
Abbiamo allora:
$(10d + 5)^2 = 100\, d^2 + 100d + 25 = d\times(d+1)\times 100 + 25$.

Consideriamo poi un caso più generale, per esempio il prodotto 32×38.

Applichiamo più volte la proprietà distributiva, considerando i vari prodotti parziali e raggruppandoli in modo opportuno:

© INDIRE 2014

$32\times38 = (30 + 2)\times(30 + 8) = 30\times30 + 30\times2 + 30\times8 + 2\times8 =$
$= 30\times30 + 30\times(2 + 8) + 2\times8 = 30\times(30 + 10) + 2\times8 = 30\times40 + 2\times8 =$
$= 3\times4\times100 + 2\times8 = 1216.$

Riassumiamo le proprietà delle operazioni

Un riassunto delle più significative **proprietà delle operazioni**.

Addizione e moltiplicazione godono della proprietà ***commutativa***:
$a + b = b + a$
$a\times b = b\times a$

Naturalmente le precedenti uguaglianze, come pure le successive, valgono qualunque siano i valori numerici attribuiti alle lettere che compaiono nelle uguaglianze.

Addizione e moltiplicazione godono anche della proprietà ***associativa***:
$(a + b) + c = a + (b + c)$
$(a\times b)\times c = a\times(b\times c)$

La proprietà associativa è molto utile perché, quando si considera un'addizione con più di due addendi (o una moltiplicazione con più di due fattori), permette di togliere parentesi, o di modificare la posizione delle parentesi.

Vale la proprietà ***distributiva*** della moltiplicazione rispetto all'addizione:
$a\times(b + c) = a\times b + a\times c$ $\qquad$ $(a + b)\times c = a\times c + b\times c.$

Questa proprietà si applica spesso sia nel calcolo mentale, sia nel calcolo scritto: il consueto metodo per calcolare in colonna per esempio il prodotto 24×37 si basa proprio sul fatto che $24\times37 = 24\times(30 + 7) = 24\times30 + 24\times7$.

Vale anche la proprietà ***distributiva*** della divisione rispetto all'addizione, ma solo se l'addizione compare come dividendo:

© INDIRE 2014

$(a + b):c = a:c + b:c$.

Infine, la sottrazione e la divisione godono della proprietà ***invariantiva***:

$a - b = (a + n) - (b + n)$ $\qquad$ $a - b = (a - n) - (b - n)$

$a : b = (a \times n) : (b \times n)$ $\qquad$ $a : b = (a:n) : (b:n)$

Le ultime proprietà valgono sotto la condizione che le operazioni indicate si possano eseguire nell'insieme numerico che si sta considerando. Per esempio, se si considerano solo numeri positivi, nell'uguaglianza $a - b = (a - n) - (b - n)$ si dovrà scegliere come n un numero minore di a e di b.

Oggi si preferisce non parlare della "proprietà dissociativa", perché non è una proprietà diversa dalla proprietà associativa. Vediamo meglio la situazione in un semplice esempio.

Dovendo calcolare 9 + 51, conviene scrivere il secondo addendo come somma 1+50:

$9 + 51 = 9 + (1 + 50)$.

Fino a questo punto non abbiamo applicato alcuna proprietà delle operazioni, perché è sempre lecito sostituire ad un numero un'espressione (racchiusa fra parentesi) che abbia come risultato quel numero. Per esempio, sono corrette le uguaglianze $9\times8 = 9\times(10 - 2) = 9\times(16:2) = 9\times(2\times3 + 2)$.

Riprendiamo l'esempio da cui siamo partiti: al punto a cui siamo arrivati, è utile modificare la posizione della parentesi, e questo è lecito proprio per la proprietà associativa:

$9 + 51 = 9 + (1 + 50) = (9 + 1) + 50 = 60$.

© INDIRE 2014

Risorse

Bibliografia

Glenn, W.H., Johnson, D.A. *Strategie di calcolo*. Zanichelli, Bologna, 1968

Millán Gasca, A. *All'inizio fu lo scriba*. Mimesis, Milano, 2004.

Graziani, M. Pitagorici si nasce. *L'origine naturale matematico*. Aracne, Roma, 2010.

Sitografia

Sistema di numerazione, Wikipedia
http://it.wikipedia.org/wiki/Sistema_di_numerazione
(*visitato in marzo 2021*)

© INDIRE 2014

*Questo percorso didattico è stato realizzato nel 2014 da INDIRE con i fondi del Progetto **PON Matematica (M@t.abel)**, codice B-10-FSE-2010-3, cofinanziato dal Fondo Sociale Europeo.*

La grafica, i testi, le immagini, l'audio, i video e ogni altra informazione disponibile in qualunque formato sono utilizzabili a fini didattici e scientifici, purché non a scopo di lucro e sono protetti ai sensi della normativa in tema di opere dell'ingegno (legge 22 aprile 1941, n. 633).

© INDIRE 2014